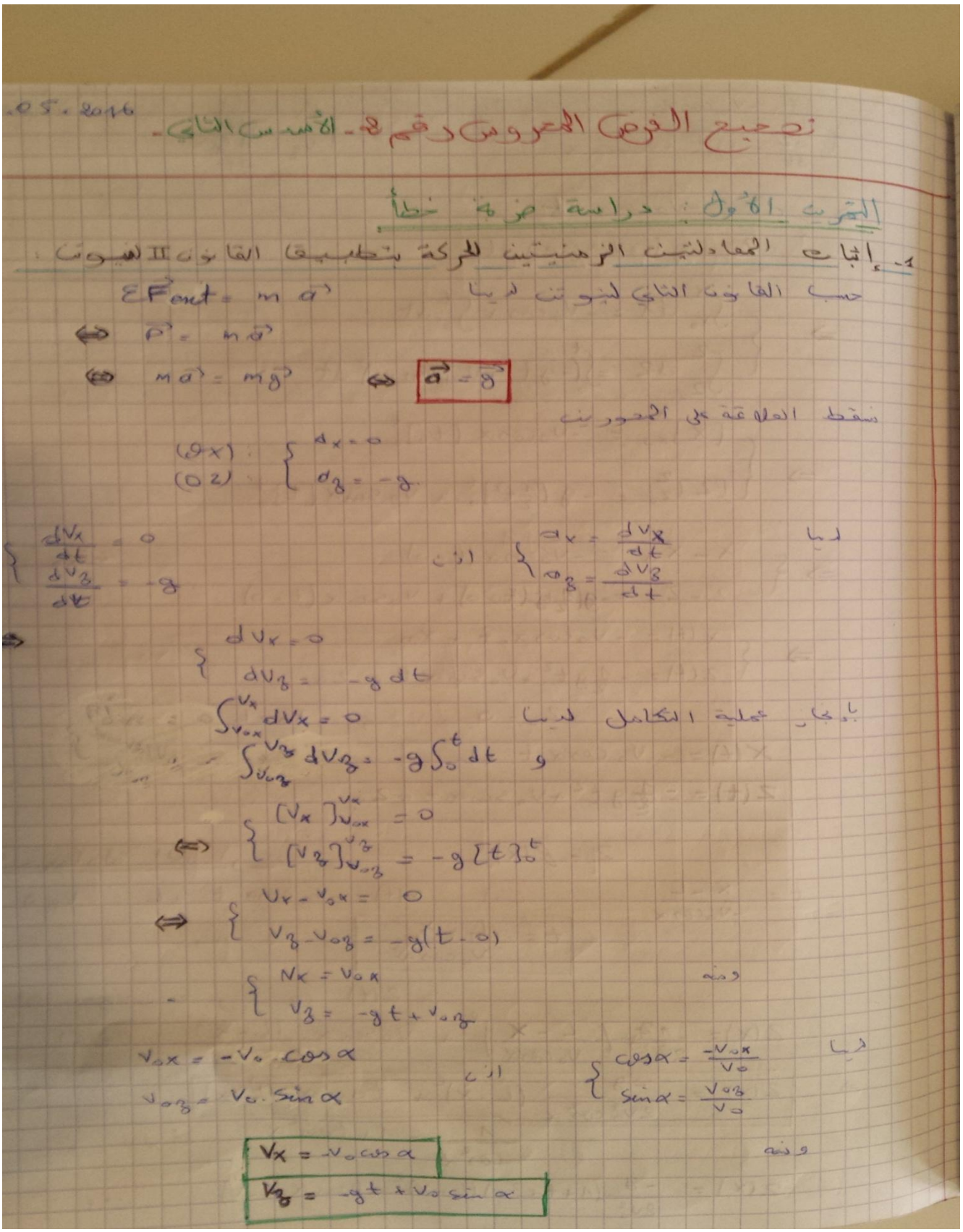
تصحيح فرض محروس رقم 2 الدورة 2 السنة الثانية علوم رياضية، 2015 / 2016

بقلم التلميذ : الحسين أوحيسين

الموضوع يتضمن : دراسة ضربة خطأ ، دراسة حركة كرة القدم في مجال الثقالة بدون احتكاك وباحتكاك ، دراسة حركة كوكب حول الشمس ، تفضيض كرة معدنية بالتحليل الكهربائي

التمرين الأول : دراسة ضربة خطا ، دراسة حركة كرة القدم في مجال الثقالة بدون احتكاك وباحتكاك



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -V_0 \cos\alpha \\ \frac{dz}{dt} = -gt + V_0 \sin\alpha \end{cases}$$ ci-1 $\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} \\ V_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$ ci-2

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = -V_0 \cos\alpha \, dt \\ dz = (-gt + V_0 \sin\alpha)\, dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{x_0}^{x} dx = -V_0 \cos\alpha \int_0^t dt \\ \int_{z_0}^{z} dz = \int_0^t (-gt + V_0 \sin\alpha)\, dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [x]_{x_0}^{x} = -V_0 \cos\alpha \, [t]_0^t \\ [z]_{z_0}^{z} = -g\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^t + V_0 \sin\alpha \, [t]_0^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = -V_0 \cos\alpha \,(t - 0) \\ z - z_0 = -g\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}0^2\right) + V_0 \sin\alpha \,(t - 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = -V_0 \cos\alpha \, t + x_0 \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin\alpha \, t + z_0 \end{cases}$$

$z_0 = 0$; $x_0 = L$ ci-2

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = -V_0 \cos\alpha \, t + L \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin\alpha \, t \end{array}}$$

$z = f(x)$

$t = \frac{x - L}{-V_0 \cos\alpha}$ ci-1 $x(t) = -V_0 \cos\alpha \, t + L$ ci-2

$$\boxed{t = \frac{L - x}{V_0 \cos\alpha}}$$

$z(t)$ t

$$z(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{L - x}{V_0 \cos\alpha}\right)^2 + V_0 \sin\alpha \cdot \frac{(L - x)}{V_0 \cos\alpha}$$ ci-1

$$\Leftrightarrow \boxed{z(x) = \frac{-g}{2V_0^2 \cos^2\alpha}(L - x)^2 + \tan\alpha \cdot (L - x)}$$

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$ ci-2

$$z(x) = \frac{-g}{2V_0^2}(1 + \tan^2\alpha)(L - x)^2 + \tan\alpha (L - x)$$ ci-1

$$z(x) = \frac{-g}{2v_0^2}(L-x)^2\tan^2\alpha + (L-x)\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2}(L-x)^2$$ وهي

ملحوظة

$$z(x) = A\tan^2\alpha + B\tan\alpha + C$$

بحيث $A = \frac{-g}{2v_0^2}(L-x)^2$ / $B = L-x$ / $C = \frac{-g}{2v_0^2}(L-x)^2$

3- الشرط الذي يجب أن تحققه السرعة البدئية لتمر الكرة فوق

لكي تمر الكرة فوق الحائط يجب تحقق الشرط التالي

$$z(x = L-\ell) > h$$

$$\Leftrightarrow \frac{-g}{2v_0^2}\ell^2\tan^2\alpha + \ell\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2}\ell^2 - h > 0$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{g\ell}\tan\alpha + 1 + \frac{2v_0^2 h}{g\ell^2} < 0 \quad (I)$$

لحل المتراجحة (I)

$$\tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{g\ell}\tan\alpha + 1 + \frac{2v_0^2 h}{g\ell^2} = 0$$

نحسب المميز المختصر لهذه المعادلة

$$\Delta = \left(-\frac{v_0^2}{g\ell}\right)^2 - \left(1 + \frac{2v_0^2 h}{g\ell^2}\right) > 0 \quad (II)$$

طريقة 1: نضرب المتراجحة (II) في ℓ^2

$$\frac{v_0^4}{g^2} - \left(\ell^2 + \frac{2v_0^2 h}{g}\right) > 0$$ أي

$$\Leftrightarrow \frac{v_0^4}{g^2} - 2\cdot\frac{v_0^2}{g}\times h + h^2 - h^2 - \ell^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{v_0^2}{g} - h\right)^2 > h^2 + \ell^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_0^2}{g} - h > \sqrt{h^2+\ell^2} \Leftrightarrow \frac{v_0^2}{g} > h + \sqrt{h^2+\ell^2}$$

$$\Leftrightarrow v_0^2 > g\left(h + \sqrt{h^2+\ell^2}\right)$$

$$v_0 > \sqrt{g\left(h + \sqrt{h^2+\ell^2}\right)}$$ وهي

$$\Delta = \frac{1}{g^2\ell^2}\left(v_0^4 - 2v_0^2 gh - g^2\ell^2\right) > 0$$ ب.1 طريقة 2

$v_0^4 - 2v_0^2 gh - g^2\ell^2$ نحل المتراجحة

$$\boxed{v_0 > \sqrt{g\left(h + \sqrt{h^2+\ell^2}\right)}}$$ حيث v_0 متوجهة

ب. لتكن α الزاوية المحصورة بين $\vec{v}_0$ و $\vec{i}$ بدلالة g و ℓ و h و v_0 :

$$\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 - \tan\alpha\, x + h + \frac{g\ell^2}{2v_0^2} = 0$$ (E)

$$\tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{g\ell}\tan\alpha + 1 + \frac{2v_0^2 h}{g\ell} < 0$$ ج.

$\tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{g\ell}\tan\alpha + 1 + \frac{2v_0^2 h}{g\ell} = 0$ معادلة من الدرجة الثانية لها $\Delta > 0$ لأن

$\tan(\alpha_2)$; $\tan(\alpha_1)$ حيث

$$\begin{cases} \tan(\alpha_1) = \frac{v_0^2}{g\ell} - \sqrt{\Delta} \\ \tan(\alpha_2) = \frac{v_0^2}{g\ell} + \sqrt{\Delta} \end{cases}$$

$$\tan(\alpha_1) = \frac{v_0^2}{g\ell} - \frac{1}{g\ell}\sqrt{v_0^4 - 2v_0^2 gh - g^2\ell^2} > 0$$ لأن

$$\tan(\alpha_2) = \frac{v_0^2}{g\ell} + \frac{1}{g\ell}\sqrt{v_0^4 - 2v_0^2 gh - g^2\ell^2} > 0$$

$\tan\alpha$	$-\infty$		$\tan(\alpha_1)$		$\tan(\alpha_2)$		$+\infty$
ax^2+bx+c (E)		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\tan(\alpha_1) < \tan\alpha < \tan(\alpha_2)$$ لأن

$$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$$ أي

$$\text{Arctan}\left(\frac{v_0^2}{g\ell} - \frac{1}{g\ell}\sqrt{v_0^4 - 2v_0^2 gh - g^2\ell^2}\right) < \alpha < \text{Arctan}\left(\frac{v_0^2}{g\ell} + \frac{1}{g\ell}\sqrt{v_0^4 - 2v_0^2 gh - g^2\ell^2}\right)$$

5 - لتحديد القيمة الدنيا لـ v_0 لتجاوز الحائط علما أن α ثابت و تحقق: $\tan\alpha > \frac{h}{\ell}$

$$z(x) = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}(L-x)^2 + (L-x)\tan\alpha$$ لدينا

عند $x = L-\ell$ $\quad z(x=L-\ell) \geq h$

$$\Leftrightarrow \frac{-g\ell^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + \ell\tan\alpha \geq h$$

$$\Leftrightarrow \frac{g\ell^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \leq \ell\tan\alpha - h$$

$$\Leftrightarrow v_0^2 \geq \frac{g\ell^2}{2\cos^2\alpha(\ell\tan\alpha - h)}$$

$$\Leftrightarrow v_0^2 \geq \frac{g^2\ell^2}{\cos^2\alpha}\left(\frac{1}{2g[\ell\tan\alpha - h]}\right)$$

$$\Leftrightarrow v_0 \geq \frac{g\ell}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{2g[\ell\tan\alpha - h]}}$$

بحيث $\ell\tan\alpha - h > 0 \Leftarrow \tan\alpha > \frac{h}{\ell}$

ومنه السرعة البدئية الدنيا هي: $\boxed{v_{0min} = \frac{g\ell}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{2g(\ell\tan\alpha - h)}}}$

ت - شرط تسجيل الهدف:

ليتم تسجيل الهدف يجب أن يتحقق الشرط $z(x=0) < H$

وبنفس الطريقة السابقة (السؤال 3) $(\Delta > 0)$

نجد أن $v_0 > \sqrt{g\left[H + \sqrt{H^2+L^2}\right]}$

ث - الشرط الذي يجب أن تحقق الزاوية α:

$z(x=0) < H$ لدينا

$$\frac{-g}{2v_0^2}L^2\tan^2\alpha + L\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2}L^2 - H < 0$$ إذن

$$\Leftrightarrow \tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{gL}\tan\alpha + 1 + \frac{2v_0^2H}{gL^2} > 0$$

$\tan(\alpha_1) = \frac{v_0^2}{gL} - \sqrt{\Delta}$ ، $\tan(\alpha_2) = \frac{v_0^2}{gL} + \sqrt{\Delta}$ لدينا

$$\tan(\alpha_1') = \frac{V_0^2}{gL} - \frac{1}{gL}\sqrt{V_0^4 - 2V_0^2 gH - g^2L^2}$$

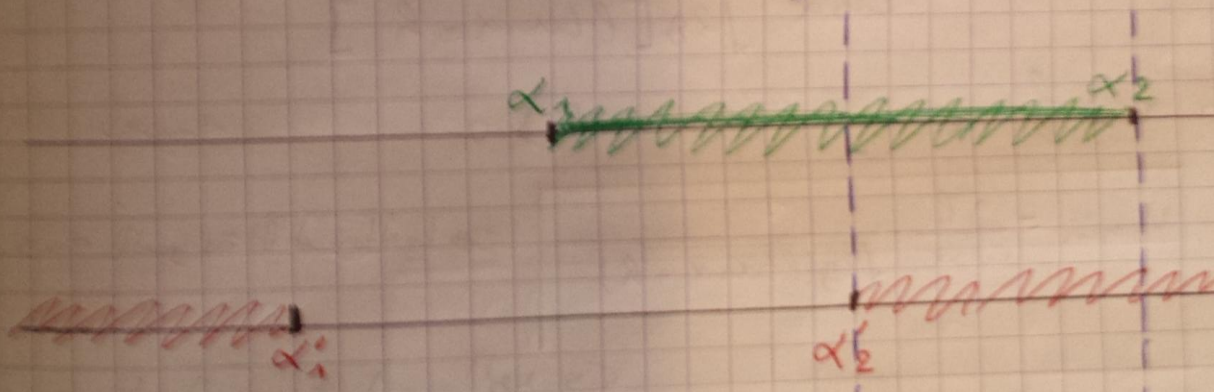
$$\tan(\alpha_2') = \frac{V_0^2}{gL} + \frac{1}{gL}\sqrt{V_0^4 - 2V_0^2 gH - g^2L^2}$$

$\tan\alpha$	$-\infty$		$\tan(\alpha_1')$		$\tan(\alpha_2')$		$+\infty$
signe de y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\tan\alpha \in]-\infty, \tan(\alpha_1')[\cup]\tan(\alpha_2'), +\infty[$$

$\tan\alpha < \tan(\alpha_1')$; $\tan\alpha > \tan(\alpha_2')$ إذا

$$\begin{cases} \tan\alpha_1 < \tan\alpha < \tan\alpha_2 & \text{إذا} \\ \tan\alpha < \tan(\alpha_1') \text{ ; } \tan\alpha > \tan & \end{cases}$$



الحل النهائي :

$\tan(\alpha_2') < \tan\alpha < \tan(\alpha_2)$ هو الحل المقبول ، أي :

$$\alpha_2' < \alpha < \alpha_2$$

1.8. بتطبيق القانون II لنيوتن لدينا $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow \boxed{m\vec{g} - \lambda\vec{v} = m\vec{a}}$

بإسقاط العلاقة على المحورين:

$$\begin{cases} -\lambda v_x = m a_x \\ -mg - \lambda v_3 = m a_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} + \frac{\lambda}{m} v_x = 0 \\ \frac{dv_3}{dt} + \frac{\lambda}{m} v_3 = -g \end{cases}} \quad (II)$$

2.8. تعبير كل من v_x و v_3:

يكتب حل المعادلات التفاضلية من الشكل التالي

$$v(t) = Ae^{-\beta t} + B$$

لنحدد v_x: نعوض في تعبير الحل في المعادلة (II)

$$-A\beta e^{-\beta t} + \frac{\lambda}{m}\left(Ae^{-\beta t} + B\right) = 0 \Rightarrow Ae^{-\beta t}\left(\frac{\lambda}{m} - \beta\right) + \frac{\lambda}{m}B = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\lambda}{m}} \; ; \boxed{B = 0}$$

$$\boxed{v_x(t) = Ae^{-\frac{\lambda}{m}t}} \; ; v_x(t=0) = A = v_{0x} = -v_0\cos\alpha$$

$$\boxed{A = -v_0\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x(t) = -v_0\cos\alpha\, e^{-\frac{\lambda}{m}t}}$$

لنحدد v_3:

$\boxed{\beta = \frac{\lambda}{m}}$ و $\boxed{B = -\frac{m}{\lambda}g}$ بنفس الطريقة كذلك:

$$v_3(t=0) = Ae^0 - \frac{m}{\lambda}g = v_{03} = v_0\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{A = v_0\sin\alpha + \frac{m}{\lambda}g}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_3(t) = \left(v_0\sin\alpha + \frac{m}{\lambda}g\right)e^{-\frac{\lambda}{m}t} - \frac{mg}{\lambda}}$$

3.8 بين أن $x(t)$ و $z(t)$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -v_0 \cos\alpha \, e^{-\frac{\lambda}{m}t} \\ \frac{dz}{dt} = -\frac{mg}{\lambda} t + \left(v_0 \sin\alpha + \frac{m}{\lambda} g\right) e^{-\frac{\lambda}{m}t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = -v_0 \cos\alpha \, e^{-\frac{\lambda}{m}t} \, dt \\ dz = \left[-\frac{mg}{\lambda} + \left(v_0 \sin\alpha + \frac{m}{\lambda} g\right) e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right] dt \end{cases}$$

$$\int_0^x dx = +v_0 \cos\alpha \frac{m}{\lambda} \left[e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right]_0^t$$

$$\int_0^z dz = -\left(v_0 \sin\alpha + \frac{m}{\lambda} g\right) \frac{m}{\lambda} \left[e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right]_0^t - \frac{mg}{\lambda} [t]_0^t$$

$$x(t) = \frac{m v_0 \cos\alpha}{\lambda} \left[e^{-\frac{\lambda}{m}t} - 1\right]$$

$$z(t) = \frac{m}{\lambda} \left(\frac{m}{\lambda} g + v_0 \sin\alpha\right) \left[1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right] - \frac{mg}{\lambda} t$$