Concours d'Entrée
à la 1ère année du Cycle d'Ingénieur

Epreuve de Mathématiques
Durée: 3h
Vendredi 09 juillet 2004

Instructions générales:

- Cet énoncé comporte 4 pages de texte.
- Livres et notes de cours ne sont pas autorisés.
- Les parties Algèbre et Analyse doivent être rédigées sur deux feuilles séparées.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repére ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction: les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

1 Algèbre

Exercice 1. Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On considère

$$\begin{array}{rccc} \Psi U \ : & M_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & MU. \end{array}$$

1. Ecrire la matrice de ΨU dans la base canonique de E.
2. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de ΨU?
   ΨU est-il diagonalisable?

Problème 1. E désigne un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou C). $L(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.
Soit u un élément de $L(E)$; u est un projecteur si et seulement si $u^2 = u \circ u = u$.

A) Soient p et q deux projecteurs.

1. Montrer que p et q sont diagonalisables.
2. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
3. Dans le cas où $p + q$ est un projecteur,
   a) Montrer que p et q sont simultanément diagonalisables;
      (i.e. il existe une base de E de vecteurs propres communs à p et à q).
   b) Déterminer $Im(p + q)$ et $Ker(p + q)$.

B) Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ n endomorphismes non nuls de E. On suppose que

$$\varphi_i \circ \varphi_j = \delta_{ij} \circ \varphi_i \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2,$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

1. Prouver que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} Im(\varphi_i)$.
2. En déduire que $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, rg(\varphi_i) = 1$ et que $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = id$.
3. Soit $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ une autre famille d'endomorphismes non nuls de E vérifiant également :
   $$\mu_i \circ \mu_j = \delta_{ij} \circ \mu_i \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2.$$
   Montrer qu'il existe un élément ω de $GL_n(E)$, l'ensemble des endomorphismes inversibles de E, tel que
   $$\mu_i = \omega \circ \varphi_j \circ \omega^{-1} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2.$$

2 Analyse

L'objet de ce problème est l'étude de l'équation différentielle suivante :

$$xy'' + (1-x)y' - \lambda y = 0 \qquad (\mathrm{E}_\lambda)$$

où y est une fonction de classe C^2 de la variable x et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Première Partie

I-1) *Solution de E_λ sur $\mathbb{R}$.*
Il est admis qu'il existe une fonction f_λ somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ solution dans $]-R, R[$ de E_λ. Cette fonction est définie par

$$f_\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

a) Déterminer les coeffiecients a_n, $n \geq 1$, en fonction de n et λ. Préciser les fonctions f_1, f_0, f_{-1}, f_{-2}.

b) Pour quelles valeurs de λ la fonction f_λ est-elle un polynôme? Préciser son degré en fonction de la valeur $-p$ donnée à λ et calculer le coefficient du terme de plus haut degré (le terme dominant).

c) Quel est le rayon de convergence R de la série entière de terme général $a_n x^n$, $n \geq 1$, lorsque λ est différent des valeurs obtenues précédement?

I-2) *Solution de E_1.*
Dans cette question le réel λ est égale à 1. On considère alors l'équation différentielle :

$$xy'' + (1-x)y' - y = 0 \qquad (\mathrm{E}_1)$$

a) Déterminer la solution générale de E_1 sur $]0, +\infty[$; exprimer cette solution à l'aide de fonctions usuelles et de la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$x \mapsto \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t.$$

b) Déterminer de même la solution générale de E_1 sur $]-\infty, 0[$.

c) i) Etudier la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t.$$

ii) En déduire la forme générale des solutions de E_1 sur toute la droite réelle $\mathbb{R}$.

Seconde Partie

L'objet de cette seconde partie est l'étude de certains propriétés de la fonction $f_{1/2}$. Dans ce but la fonction φ, définie par

$$\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{x\sin^2\theta}\ \mathrm{d}\theta \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

est introduite ainsi que les intégrales I_p définie par

$$I_p = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p}\theta\ \mathrm{d}\theta \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

II-1) Déterminer une relation entre les intégrales I_p et I_{p+1}. En déduire la valeur de l'intégrale I_p.

II-2) <u>*Relation entre φ et $f_{1/2}$*</u>.

a) Démontrer que la fonction φ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Est-elle de classe C^∞?

b) Déterminer le développement en série entière de la fonction φ sur un intervalle $]-R,R[$. En déduire qu'elle est proportionnelle à la fonction $f_{1/2}$. Préciser le coefficient de proportionnalité.

II-3) <u>*Encadrement de φ*</u>.

a) Démontrer que

$$\mathrm{e}^u \leq \frac{1}{1-u} \quad \forall u < 1.$$

b) Calculer l'intégrale suivante

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - x\sin^2\theta},$$

où x est un réel strictement inférieur à 1.

c) Déduire des résultats précédents que,

$$0 \leq \varphi(x) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}} \quad \forall x < 1.$$

d) En déduire que la fonction $f_{1/2}$ admet une limite en $-\infty$. Préciser cette limite.

e) Démontrer que

$$\varphi(x) \geq \frac{1}{\sqrt{-x}} \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-y^2}\ \mathrm{d}y \quad \forall x \leq -1.$$

f) En déduire la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{-1} f_{1/2}(x)\ \mathrm{d}x.$$