Université Cadi Ayyad
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Safi

CONCOURS D'ADMISSION: 2006

Concours d'entrée en 3^{ieme} année à l'ENSA de Safi
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Date: 18 juillet 2006

Durée du sujet: 3 heures
Enseignant: Mr LAKHEL E.

N.B. *Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

Partie I: Séries de Fourier et Fonctions à variation bornée

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, continue par morceaux et de période 2π, on assoucie ses coefficients de Fourier exponentiels définis, pour $n \in \mathbb{Z}$, par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$ et ses coefficients de Fourier trigonométriques définis par: $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cos(nt)dt$ (pour $n \in \mathbb{N}$) et $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)sin(nt)dt$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$.)
On pose, pour tout entier naturel p et tout réel x:

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p}(a_n(f)cos(nx) + b_n(f)sin(nx)).$$

Pour deux réels $a < b$ on note $S_{[a,b]}$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a, b]$. Si f est une fonction de $[a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in S_{[a,b]}$, on note

$$V(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

On dira que la fonction f est à variation bornée s'il existe un réel positif M tel que pour toute $\sigma \in S_{[a,b]}$, l'on ait : $V(\sigma, f) \leq M$. On appelle alors **variation totale** de f sur $[a, b]$ le réel positif noté :

$$V([a, b], f) = \sup_{\sigma\in S_{[a,b]}} V(\sigma, f).$$

I-A. Résultats préliminaires

I-1. Rappeler le théorème de Dirichlet en précisant de quel type de convergence il s'agit. Cette convergence pourrait-elle être uniforme sur $\mathbb{R}$?

I-2. On considère la fonction continue $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de période 2π paire et définie pour $x \in [0, \pi]$ par $\varphi(x) = \sqrt{x}$. Donner l'allure de la courbe de cette fonction et expliquer pourquoi elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

I-3. **Théorème de Cesàro**
Soit (u_n) une suite de complexes qui converge vers le complexe l.

a. Justifier, simplement, en utilisant un théorème de sommation de relations de comparaison, que:

$$\sum_{k=0}^{n}(u_k - l) = o(n + 1) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

b. En déduire que la suite $(\frac{u_0+u_1+\ldots+u_n}{n+1})$ converge vers l.

I-4. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et de période 2π dont la somme de Fourier de rang n est notée $S_n(f)$. Pour n entier naturel non nul, on définit la somme de Fejér de f de rang n, notée $\sigma_n(f)$ comme la moyenne de Sesàro des sommes de Fourier:

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}(S_0(f) + S_1(f) + \ldots + S_n(f)).$$

On démontre, et **nous l'admettrons, le théorème de Fejér:**
≪La suite de polynômes trigonométriques $(\sigma_n(f))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f≫.

Une application: Si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ est une fonction continue et de période 2π telle que la suite $(S_n(f))$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, montrer que la suite $(S_n(f))$ converge vers la fonction f.

I-5. Si (u_n) est une suite de réels positifs qui converge vers 0, montrer qu'il existe une suite de réels (d_n) décroissante et de limite nulle telle que, pour tout entier naturel n, $0\leq u_n\leq d_n$ (on pourra, par exemple, vérifier que la suite $(sup\{u_k, k\geq n\})_n$ convient).

I-B. Fonctions à variation bornée

I-6. Montrer que la fonction $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(0)=0$ et $f(x)=x\cos(\frac{\pi}{2x})$ si $x\neq 0$ est continue et n'est pas à variation bornée sur $[0,1]$.
(on pourra choisir $\sigma=(x_k)_{0\leq k\leq n+1}$ subdivision de $[0,1]$:

$$x_0=0,\ x_{n+1}=1\ \text{ et }\ \forall\, k\in\{1,...,n\},\quad x_k=\frac{1}{2(n+1-k)}).$$

I-7. Exemples généraux.

a. Montrer qu'une fonction $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ qui est monotone est à variation bornée sur $[a,b]$ et préciser $V([a,b],f)$.

b. Montrer qu'une fonction $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ qui est somme de deux fonctions monotones est à variation bornée sur $[a,b]$.

c. Montrer qu'une fonction $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ qui est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux est à variation bornée.

I-8. Soit une fonction f de $[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ à variation bornée sur $[a,b]$ et soit $a<c<b$.
Montrer que chacune des restrictions de f aux intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$ est à variation bornée et que:

$$V([a,c],f)+V([c,b],f)\leq V([a,b],f).$$

I-9. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction continue et de période 2π telle que la restriction de f à l'intervalle $[0,2\pi]$ soit à variation bornée.
Pour n entier relatif et N entier naturel, tous deux non nuls, on utilisera la subdivision $\sigma=(x_k)_{0\leq k\leq |n|N}$ de $[0,2\pi]$ définie, pour k entier compris entre 0 et $|n|N$, par: $x_k=\frac{2\pi k}{|n|N}$.
Pour k entier compris entre 0 et $|n|N$, on notera $V_k(f)$ la variation totale de f sur l'intervalle $[x_{k-1},x_k]$.

a. Vérifier que:

$$|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(t)-f(x_k))e^{-int}dt|\leq\sum_{k=1}^{|n|N}V_k(f)(x_k-x_{k-1}).$$

b. Montrer que:

$$|\sum_{k=1}^{|n|N}f(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}e^{-int}dt|\leq\frac{1}{|n|}V([0,2\pi],f).$$

c. En déduire que pour tout entier naturel non nul,

$$|c_n(f)|\leq\frac{1}{2\pi|n|}V([0,2\pi]),f).$$

I-10. Soit u_n une suite de complexes, on pose, pour tout entier naturel n,

$$S_n=\sum_{j=0}^{n}u_j\ \text{ et }\ \sigma_n=\frac{S_0+S_1+...+S_n}{n+1}.$$

On suppose que la suite (σ_n) converge vers un complexe L et on suppose qu'il existe une constante réelle A non nulle telle que, pour tout entier naturel k, $|u_k|\leq\frac{A}{k+1}$.

a. Pour n et k entiers naturels non nuls, exprimer, à l'aide des termes de la suite (u_i), l'expression $k(S_n-L)-(n+k)(\sigma_{n+k-1}-L)+n(\sigma_{n-1}-L)$.

b. Soit une suite de réels (d_n) décroissante et de limite nulle telle que, pour tout entier naturel n, $|\sigma_n-L|\leq d_n$, montrer que, pour n et k entiers naturels non nuls:

$$|S_n-L|\leq(1+\frac{2n}{k})d_{n-1}+A\frac{k-1}{2(n+2)}.$$

c. L'entier naturel non nul n étant donné, on choisit k tel que $(k-1)^2 \leq 4n^2 d_{n-1} < k^2$. ($k-1$ est donc la partie entière de $2n\sqrt{d_{n-1}}$). Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a: $|S_n - L| \leq d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}}$. Que peut-on en déduire?

I-11. Montrer que la série de fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et de période 2π telle que la restriction de f à l'inttervalle $[0, 2\pi]$ soit à variation bornée converge uniformément vers la fonction f.

I-12. Montrer que la série de Fourier de la fonction φ de la question **2.** converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction φ.

Partie II: Matrices Stochastiques[1]

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^n$ (où $n \geq 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On se propose d'étudier l'ensemble des valeurs propres des matrices stochastiques d'ordre n. Une matrice $S = (s_{ij})_{i,j\in\{1,2,...,n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si et seulement si

$$\forall i, j \qquad s_{ij} \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall i \quad \sum_{j=1}^{n} s_{ij} = s_{i1} + s_{i2} + ... + s_{in} = 1.$$

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ces matrices sont stables par le produit. Dans la suite, on désigne par f un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ dont la matrice $S = (s_{ij})$ est stochastique.

II.1 V_1 le vecteur de E dont les composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont toutes égales à 1.
Montrer qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients réels positifs ou nuls est stochastique si et seulement si $MV_1 = V_1$.

II.2 Déduire que 1 est une valeur propre de f.

II.3 Soit λ une valeur propre de f autre que 1. Montrer que $|\lambda| \leq 1$.
(Indication: Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de $E = \mathbb{R}^n$, on convient de noter:

$$|x| = max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|).$$

pour $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que $|f(x)| \leq |x|$. Puis conclure).

II.4 Montrer que

$$Ker(f - Id) \oplus Im(f - Id) = \mathbb{R}^n.$$

II.5 Montrer que $Im(f - Id)$ est stable par f. Etablir que tout sous-espace propre E_λ de f associé à une valeur propre λ autre que 1 est inclus dans $Im(f - Id)$.

On suppose désormais que l'endomorphisme f est diagonalisable.

II.6 Montrer que la somme directe des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de f autre que 1 est égale à $Im(f - Id)$.

II.7 On complète une base $(v_1, v_2, ..., v_p)$ de $E_1 = Ker(f - Id)$ en une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, ..., v_n)$ de vecteurs propres de f. On note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de f rangées par modules décroissants $(1 = |\lambda_1| = ... = |\lambda_p| \geq |\lambda_{p+1}| \geq ... \geq |\lambda_n|)$, associées à ces vecteurs propres $v_1, v_2, ..., v_n$. Soit D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
Prouver que la suite de matrices (S^k) converge si est seulement si la suite (D^k) converge.
Déduire que la suite (S^k) est convergente.
(Pour une suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on dit que $\lim_{k\longrightarrow+\infty} A^k = A$, si , en notant: $A_k = (a_{ij}^{(k)})$, on a: $\forall i, j, \lim_{k\longrightarrow+\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$).

FIN DE L'EPREUVE.

[1]Ces matrices jouent un rôle important, notament en calcul de probabilités.