## La nuit du 21 juin 1822 (5,5 points)

*L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.*
L'une des expériences historiques permettant de déterminer la célérité du son dans l'air a été réalisée en 1822 près de Paris par ordre du Bureau des longitudes. Présenté ci-après, l'extrait du *Traité élémentaire de physique par M. l'abbé Pinault* (1836) relate cette expérience :
« Les deux stations que l'on avait choisies étaient Villejuif et Montlhéry. À Villejuif, le capitaine Boscary fit déposer, sur un point élevé, une pièce de six[(1)], avec des gargousses[(2)] de deux et trois livres de poudre. À Montlhéry, le capitaine Pernetty fit déposer une pièce de même calibre, avec des gargousses de même poids. Les expériences furent faites de nuit et commencèrent à onze heures du soir, le 21 et le 22 juin 1822. De Villejuif on apercevait très distinctement le feu de l'explosion de Montlhéry et vice versa : le ciel était serein et à peu près calme. La température de l'atmosphère était de 15,9 degrés Celsius. Les coups de canon des deux stations opposées étaient réciproques, de sorte que les résultats ne fussent pas influencés par le vent. Chacun des observateurs notait sur son chronomètre le temps qui s'écoulait entre l'apparition de la lumière et l'arrivée du son. On peut prendre 54,6 secondes pour le temps moyen que le son mettait à passer d'une station à l'autre. Les deux canons étaient à une distance de 9 549,6 toises[(3)]. »
Données :

- célérité de la lumière dans l'air $c = 3,0 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ ;
- constante des gaz parfaits $R = 8,3\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$ ;
- masse d'une mole d'air $M = 2,9 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$ ;
- température absolue $T(K) = \theta(C) + 273,1$ .



## I. Détermination expérimentale et historique de la célérité des ondes sonores dans l'air

1. Les ondes sonores sont des ondes mécaniques longitudinales. Définir une onde mécanique puis préciser ce que signifie le caractère longitudinal de l'onde sonore.
2. Dans l'expérience, la célérité des ondes sonores produites par les deux canons opposés est-elle augmentée, diminuée ou inchangée lors de leur croisement ?
3. En utilisant les valeurs mesurées par les observateurs, calculer la valeur de la célérité des ondes sonores, notée $v_{\mathrm{exp}}$. D'après le texte, pour les observateurs, de quel(s) paramètre(s) dépend, a priori, la célérité du son ?
*Aide au calcul :*
$\frac{9\,549,6}{1,9490} = 4\,899,7$ ;
$9\,549,6 \times 1,9490 = 18\,612$ ;
$\frac{4\,899,7}{54,6} = 89,7$ ;
$\frac{54,6}{18612} = 293 \times 10^{-5}$ ;
$\frac{18612}{54,6} = 341$ .

4. Les observateurs déclenchent leur chronomètre à l'apparition de la lumière. Quelle durée négligent-ils ?
Pourquoi est-ce raisonnable ?

## II. Détermination de la célérité des ondes sonores dans l'air en utilisant un modèle théorique

Le développement de la mécanique des fluides a permis d'élaborer un modèle pour la propagation des ondes mécaniques dans les gaz. L'expression théorique de la célérité de ces ondes qui découle de ce modèle est :

$$v_{\text{théo}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

avec M la masse d'une mole d'air, T sa température absolue, R la constante des gaz parfaits et $\gamma$ un nombre sans dimension qui dépend notamment des propriétés de l'air.
La valeur du coefficient $\gamma$ de l'air a été déterminée par Rückhardt (1929, scientifique allemand) en utilisant les propriétés élastiques des gaz avec le dispositif schématisé figure 1.
Un piston étanche coulisse sans frottement dans un tube cylindrique ; le tube et le récipient enferment une quantité de matière $n_0$ d'air. Le piston écarté de sa position d'équilibre oscille autour de cette position d'un mouvement analogue à celui de l'oscillateur élastique $\{$ressort + solide de masse $m\}$.
Le système $\{$air + piston de masse $m\}$ est équivalent à un système $\{$ressort + solide de masse $m\}$.



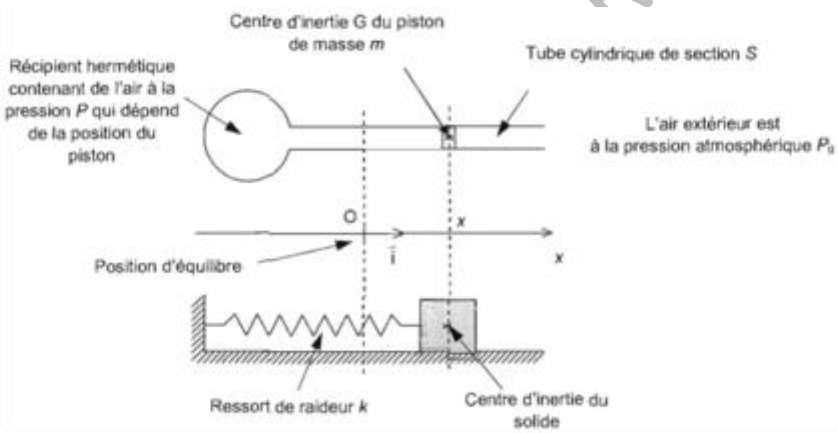


**Figure 1. Système $\{$air + piston$\}$ et système $\{$ressort + solide$\}$**

Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen.
La position du piston est repérée par son abscisse *x* sur l'axe O*x* dont l'origine O est confondue avec la position du piston à l'équilibre.
*Dans tout l'exercice, les frottements sont négligés. L'air extérieur et l'air intérieur sont à la même température. Cette température est constante tout au long de l'expérience, on la note $T_0$.*
1. Le piston est soumis aux forces citées ci-après :

- le poids $\vec{P}$ ;

- la réaction du support $\vec{R}$ ;
- les forces pressantes de l'air à l'intérieur du récipient, dont la somme est équivalente à une force unique $\overrightarrow{F_{int}}$ ;
- les forces pressantes de l'air à l'extérieur du récipient, dont la somme est équivalente à une force unique $\overrightarrow{F_{ext}}$ .

Donner pour chacune de ces forces la nature de l'interaction : interaction de contact ou à distance.

2. L'ensemble des forces s'exerçant sur le piston est équivalent à une force unique horizontale :

$\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{i}$ avec $k = \frac{\gamma S^2 P_0^2}{n_0 R T_0}$ où *k* est une constante positive.

Pourquoi peut-on dire que cette force se comporte comme une force de rappel ? Justifier.

3. Écarté de sa position d'équilibre, le piston oscille autour de cette position avec une fréquence propre notée $f_0$.

a) Énoncer la deuxième loi de Newton.

b) Déterminer l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie G du piston, en projetant sur l'axe (O*x*) l'égalité vectorielle obtenue en appliquant la deuxième loi de Newton.

c) L'équation différentielle obtenue peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\pi^2 f_0^2 x = 0$$
.

En déduire l'expression de *k* en fonction de la masse *m* du piston et de sa fréquence propre $f_0$.

4. Montrer que le coefficient $\gamma$ a pour expression :

$$\gamma = \frac{4\pi^2 f_0^2 m n_0 R T_0}{S^2 P_0^2}$$
.

5. Dans les unités du système international, on trouve $\gamma = 1,4$ à la température $\theta = 15,9\,C$ de l'atmosphère dans la nuit du 21 juin 1822.

Recopier et compléter le calcul qu'il faut poser pour obtenir ce résultat.

$$\gamma = \frac{4\pi^2 \times 1{,}0^2 \times \ldots \times 1{,}0 \times 8{,}3 \times \ldots}{(3{,}1 \times 10^{-4} \times 1{,}013 \times 10^5)^2} = 1,4$$
.

*Données :*

- masse du piston : $m = 14,8\,g$ ;
- section du tube cylindrique : $S = 3,1\,cm^2$ ;
- fréquence propre : $f_0 = 1,0\,Hz$ ;
- pression atmosphérique : $P_0 = 1,013\,bar$ ;
- $1\,bar = 10^5\,Pa$ ;
- quantité de matière d'air enfermé : $n_0 = 1,0\,mol$ .

6. Calculer la valeur théorique $v_{théo}$ de la célérité des ondes sonores dans l'air à cette température $\theta$.

*Aide aux calculs :* $\frac{1,4 \times 8,3}{2,9} = 4,0$ ;
$\sqrt{289} = 17$ ;
$\frac{2,9}{(1,4 \times 8,3)} = 25 \times 10^{-2}$ ;
$\frac{17}{5} = 3,4$ .

### III. Cohérence avec la mesure effectuée dans la nuit du 21 juin 1822

1. Vérifier que la valeur théorique $v_{\text{théo}}$ est proche de la valeur expérimentale $v_{\text{exp}}$ déterminée dans la question I. 3.
2. Si l'expérience s'était déroulée en hiver avec une température extérieure de 0 °C et en considérant que γ reste constant, la valeur trouvée de la célérité serait-elle plus grande ou plus petite ? Justifier.

1. *Pièce de six* : pièce de canon.
2. *Gargousses* : charges de poudre contenues dans une enveloppe de tissu ou de papier au diamètre de la chambre du canon.
3. *Toise* : unité de longueur ancienne qui correspond à 1,949 m.

Corrigé

### I. Détermination expérimentale et historique de la célérité des ondes sonores dans l'air

1. Une onde mécanique est le phénomène de propagation d'une perturbation dans un milieu matériel sans transport de matière.
L'onde mécanique est qualifiée de longitudinale lorsque la direction de propagation est parallèle à la direction de la perturbation. C'est le cas des ondes sonores, qui correspondent à la propagation d'une compression locale de l'air.
2. Les deux ondes se superposent au moment du croisement (leurs amplitudes s'additionnent) mais leur célérité est inchangée.
3. $v_{\text{exp}} = \frac{d}{\Delta t}$

**A.N.** $v_{\text{exp}} = \frac{9\,549,6 \times 1,949}{54,6} = \frac{18\,612}{54,6} = 341 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Les observateurs ont noté la température de l'air et mentionnent l'influence du vent ; ce sont donc les deux paramètres dont dépendrait, d'après eux, la célérité du son.
4. En déclenchant leur chronomètre à l'apparition de la lumière, les observateur négligent la durée de propagation de l'onde lumineuse.
Si on compare la valeur obtenue pour la célérité du son dans l'air ($341 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) avec la célérité de la lumière ($3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), le rapport est de l'ordre de $10^6$, il est donc raisonnable de négliger la durée de propagation de l'onde lumineuse.

### II. Détermination de la célérité des ondes sonores dans l'air en utilisant un modèle théorique

1. Le poids est une interaction à distance.
La réaction du support et les forces pressantes sont des interactions de contact.
2. La force résultante $\vec{F}$ est de la forme $\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{\imath}$, comme la force de rappel élastique d'un ressort.

Son sens est opposé à celui du vecteur $\overrightarrow{OG} = x \cdot \vec{\imath}$ et sa valeur est donc proportionnelle à l'élongation $|x|$ : ce sont bien les propriétés d'une force de rappel, qui tend à ramener le point G vers la position d'équilibre O, et ce d'autant plus intensément qu'il s'en est éloigné.

3.

a) Deuxième loi de Newton : dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle $\sum \overrightarrow{F_{ext}}$ des forces extérieures appliquées au système est égale au produit de la masse *m* du système par l'accélération $\overrightarrow{a_G}$ de son centre d'inertie : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$.

b) D'après l'énoncé, la force résultante $\vec{F}$ est égale à la somme vectorielle des forces extérieures $\sum \overrightarrow{F_{ext}}$. La deuxième loi de Newton s'écrit donc ici simplement : $\vec{F} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$ soit, en projection sur l'axe (O*x*) :

$$F_x = m \cdot a_x = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-k \cdot x = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

Finalement, l'équation différentielle peut s'écrire : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$.

c) En identifiant les deux expressions, on obtient : $4\pi^2 \cdot f_0^2 = \frac{k}{m}$

On en déduit $k = 4\pi^2 \cdot f_0^2 \cdot m$

4.

$$k = \frac{\gamma \cdot S^2 \cdot P_0^2}{n_0 \cdot R \cdot T_0} = 4\pi^2 \cdot f_0^2 \cdot m$$

On en déduit $\gamma = \frac{4\pi^2 \cdot f_0^2 \cdot m \cdot n_0 \cdot R \cdot T_0}{S^2 \cdot P_0^2}$

5. **A.N.**

$$\gamma = \frac{4\pi^2 \times 1{,}0^2 \times 14{,}8 \times 10^{-3} \times 1{,}0 \times 8{,}3 \times (15{,}9 + 273{,}1)}{(3{,}1 \times 10^{-4} \times 1{,}013 \times 10^5)^2}$$

$$\gamma = 1{,}4$$

*Attention aux conversions d'unités :* *m* en kg, $T_0$ en K, S en $m^2$ et P en Pa…

6. $v_{théo} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T_0}{M}}$

**A.N.** $v_{théo} = \sqrt{\frac{1{,}4 \times 8{,}3 \times (15{,}9 + 273{,}1)}{2{,}9 \times 10^{-2}}}$

**A.N.** $v_{théo} = \sqrt{\frac{1{,}4 \times 8{,}3}{2{,}9} \times \frac{289}{10^{-2}}} = \sqrt{4{,}0 \times 289 \times 10^2}$

**A.N.** $v_{théo} = 2{,}0 \times \sqrt{289} \times 10 = 20 \times 17 = 3{,}4 \times 10^2\ m \cdot s^{-1}$

## III. Cohérence avec la mesure effectuée dans la nuit du 21 juin 1822

1. On a obtenu $v_{exp} = 341\ m \cdot s^{-1}$ et $v_{théo} = 3{,}4 \times 10^2\ m \cdot s^{-1}$. Ces deux valeurs sont parfaitement cohérentes.

*Remarque : on ne peut pas calculer d'écart relatif entre ces deux valeurs puisqu'elles sont* *numériquement identiques, mais données avec 3 chiffres significatifs pour la première et 2 seulement pour la deuxième…*

2. D'après l'expression littérale $v_{\text{théo}} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T_0}{M}}$, si la température diminue alors la célérité de l'onde sonore diminue également