Chapitre 1 : Vocabulaire sur les ensembles, la logique et les applications…

I Les ensembles

A) La notion d'appartenance

Soit E un ensemble, soit a un « objet ».

L'énoncé « $a \in E$ » signifie : a appartient à E.

La négation de cet énoncé s'écrit « $a \notin E$ » ; autrement dit, l'énoncé $a \notin E$ est équivalent à : $\text{non}(a \in E)$.

Exemple :

$2 \in \mathbb{N}$, $2 \in \mathbb{C}$, $1{,}5 \notin \mathbb{N}$ sont vrais.

$1{,}5 \in \mathbb{N}$, $4 \notin \mathbb{N}$ sont faux.

B) Inclusion

Soient deux ensembles E et F.

L'énoncé « $E \subset F$ » se lit E est inclus dans F et signifie : tout élément de E est élément de F.

Exemple : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Remarques :

- $\forall E, E \subset E$
- L'équivalence suivante est toujours vraie : $(E \subset F \text{ et } F \subset E) \Leftrightarrow F = E$.

C) Vocabulaire et notations

- $\varnothing$ désigne l'unique ensemble qui n'a pas d'élément. On convient que $\varnothing \subset E$ est vrai quel que soit E.
- $\{a, b, c\}$ désigne l'ensemble dont les éléments sont exactement a, b, c. (remarque : $\{1,2,3\} = \{2,3,1\} = \{1,2,2,3\}$)
- Soit P une propriété définie sur un ensemble E. Pour tout $x \in E$, $\mathrm{P}(x)$ est un énoncé (vrai ou faux).

Exemple : P pourrait être la propriété « être pair » définie sur $\mathbb{Z}$.

P(6) est vrai ; P(-7) est fausse ; P(3.2) n'a pas de sens.

La notation $\{x \in E, \mathrm{P}(x)\}$ désigne l'ensemble des éléments de E qui ont la propriété P.

$\mathrm{P}(x)$ est un énoncé avec une variable libre x.

$\{x \in E, \mathrm{P}(x)\}$ est un ensemble avec une variable muette x.

D) Opérations sur les parties d'un ensemble

Soit E un ensemble.

Une partie de E est un ensemble inclus dans E.
On note $P(E)$ l'ensemble des parties de E.

Ainsi, on a l'équivalence : $A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E$

On a aussi : $\varnothing \in P(E),\ E \in P(E)$

Exemple : soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble à trois éléments. Alors :

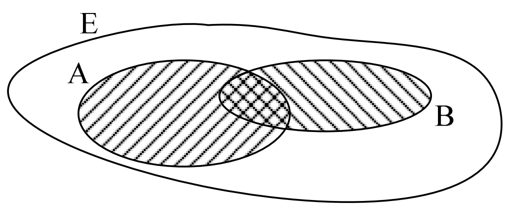
$P(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$

Soient A et B deux parties de E.

$A \cup B = \{x \in E, (x \in A \text{ ou } x \in B)\}$ (réunion)

$A \cap B = \{x \in E, (x \in A \text{ et } x \in B)\}$ (intersection)

$A \setminus B = \{x \in E, (x \in A \text{ et } x \notin B)\}$ (différence)



Sur le dessin :
- réunion : // \\ ××
- intersection : ××
- différence : //

Cas particulier :

Si $B \subset A$, $A \setminus B$ est le complémentaire de B dans A, noté $C_A B$

E) Produit cartésien

Soient E, F deux ensembles.

$E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) formés d'un élément x de E et d'un élément y de F.

Rappel : $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$

De même on peut définir $E \times F \times G \times ...$

$E \times E$ est aussi noté E^2 (et $\underbrace{E \times E \times ... \times E}_{n \text{ fois}}$ est noté E^n

II Logique

On y utilise :
- Des lettres de variables, de constantes, de propriétés, de relations…
- Des connecteurs et, ou, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.
- La négation non
- Des quantificateurs $\forall, \exists$

Pour l'utilisation, les règles, voir à l'usage.
Notons cependant :

- Si E désigne un ensemble, P une propriété définie sur E :
  - l'énoncé $\forall x \in E, \mathrm{P}(x)$ signifie que quel que soit x de E, $\mathrm{P}(x)$, soit que tout élément de E vérifie P.
  - l'énoncé $\exists x \in E, \mathrm{P}(x)$ signifie qu'il existe un élément de E qui vérifie P.

Exemple : $E = \{1,3,5,4\}$, P ="être pair" ; alors $\exists x \in E, \mathrm{P}(x)$ est vrai.

- On a les équivalences suivantes (négation) :

$$\mathrm{non}(\forall x \in E, \mathrm{P}(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, \mathrm{non}(\mathrm{P}(x))$$

$$\mathrm{non}(\exists x \in E, \mathrm{P}(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E, \mathrm{non}(\mathrm{P}(x))$$

- Concernant « et » et « ou » :

$$\forall x \in E, (\mathrm{P}(x) \text{ et } \mathrm{Q}(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \mathrm{P}(x)) \text{ et } (\forall x \in E, \mathrm{Q}(x))$$

$$\forall x \in E, (\mathrm{P}(x) \text{ ou } \mathrm{Q}(x)) \Leftarrow (\forall x \in E, \mathrm{P}(x)) \text{ ou } (\forall x \in E, \mathrm{Q}(x))$$

$$\exists x \in E, (\mathrm{P}(x) \text{ et } \mathrm{Q}(x)) \Rightarrow (\exists x \in E, \mathrm{P}(x)) \text{ et } (\exists x \in E, \mathrm{Q}(x))$$

$$\exists x \in E, (\mathrm{P}(x) \text{ ou } \mathrm{Q}(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \mathrm{P}(x)) \text{ ou } (\exists x \in E, \mathrm{Q}(x))$$

- Autres règles :

A et B sont deux énoncés quelconques.

$$\mathrm{non}(A \text{ et } B) \Leftrightarrow \mathrm{non}(A) \text{ ou } \mathrm{non}(B)$$

$$\mathrm{non}(A \text{ ou } B) \Leftrightarrow \mathrm{non}(A) \text{ et } \mathrm{non}(B)$$

$$\mathrm{non}(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \text{ et } \mathrm{non}(B)$$

Une simplification d'écriture :
$\forall x \in E, \forall x' \in E, (\mathrm{P}(x) \text{ et } \mathrm{P}(x') \Rightarrow x = x')$: il y a au plus un élément de E tel que $\mathrm{P}(x)$.
$[\exists x \in E, \mathrm{P}(x)] \text{ et } [\forall x \in E, \forall x' \in E, (\mathrm{P}(x) \text{ et } \mathrm{P}(x') \Rightarrow x = x')]$: il existe un et un seul $x \in E$ tel que $\mathrm{P}(x)$: cet énoncé est noté $\exists! x \in E, \mathrm{P}(x)$.

Contraposée :
Soient A et B deux énoncés. On a l'équivalence :

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\mathrm{non}(B) \Rightarrow \mathrm{non}(A))$$

III Les applications

E, F, G désignent ici des ensembles quelconques.

A) Généralités

La donnée d'une application f est la donnée :

- D'un ensemble de départ E.
- D'un ensemble d'arrivée F.
- Pour chaque élément x de E, d'un élément de F noté $f(x)$ et appelé l'image de x par l'application f.

On note : $f : \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$

Exemples :

- L'application : $\begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x \end{array}$ est l'identité sur E, notée Id_E

- $\underset{x \mapsto x^2}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+}$, $\underset{x \mapsto x^2}{\mathbb{R}^- \to \mathbb{R}}$, $\underset{x \mapsto x^2}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$, $\cancel{\underset{x \mapsto x^2}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^-}}$ (L'ensemble d'arrivée ne convient pas), $\underset{x \mapsto x^2}{\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}}$, $\cancel{\underset{x^2 \mapsto x}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}}$ (Mauvaise variable), $\underset{x \mapsto x^2}{\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+}$; toutes ces applications sont des applications différentes.

On note $\mathfrak{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

B) Composition

Définition : Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$. $g \circ f$ désigne l'application de E dans G qui à tout élément x de E associe $g(f(x))$.

Ainsi, pour tout x de E, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Théorème : la loi $\circ$ est une loi associative sur l'ensemble des fonctions de E dans E. Elle admet un élément neutre Id_E, et elle n'est pas commutative en général.

Démonstration :

- $\circ$ constitue une loi sur $\mathfrak{F}(E,E)$:

Pour $f \in \mathfrak{F}(E,E)$, $g \in \mathfrak{F}(E,E)$, $g \circ f$ est bien défini.

- Associativité : soient f, g, h trois éléments de $\mathfrak{F}(E,E)$.

Montrons que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Déjà, les deux applications $f \circ (g \circ h)$ et $(f \circ g) \circ h$ sont bien de E dans E.

Soit $x \in E$. On a :

$(f \circ (g \circ h))(x) = f[(g \circ h)(x)] = f(g(h(x)))$

$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$

C'est valable pour tout x de E. donc les deux applications sont égales. C'est valables pour toutes applications $f, g, h \in \mathfrak{F}(E,E)$. Donc la loi $\circ$ est associative.

Attention : écrire $f \circ [g(x)]$ n'a aucun sens. En effet, la loi $\circ$ prend comme arguments deux applications, et ici $g(x)$ est un élément de E.

- Elément neutre :

Pour tout $f \in \mathfrak{F}(E,E)$, $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f = f$. En effet :

Déjà, $f, \mathrm{Id}_E \circ f, f \circ \mathrm{Id}_E \in \mathfrak{F}(E,E)$. Pour tout x de E, on a :

$(f \circ \mathrm{Id}_E)(x) = f(\mathrm{Id}_E(x)) = f(x)$

$(\mathrm{Id}_E \circ f)(x) = \mathrm{Id}_E(f(x)) = f(x)$ car $f(x) \in E$

- Non commutativité : dès que E a au moins trois éléments. En effet : supposons que E a au moins trois éléments. Notons a, b, c trois éléments distincts de E.

Soient alors deux applications $f, g \in \mathfrak{F}(E,E)$ définies par :

$$\begin{cases} f(a) = b \\ f(b) = a \\ \forall x \in E \setminus \{a,b\}, f(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(a) = c \\ g(c) = a \\ \forall x \in E \setminus \{a,c\}, g(x) = x \end{cases}$$

Alors :

$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(b)=b$

$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(c)=c$

Généralisation :

On a associativité "en général" de la loi $\circ$: pour tous $f\in\mathfrak{F}(E,F)$, $g\in\mathfrak{F}(F,G)$, $h\in\mathfrak{F}(G,H)$, on a : $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$, qu'on note aussi $h\circ g\circ f$

Démonstration : les deux applications $h\circ(g\circ f)$ et $(h\circ g)\circ f$ sont bien des éléments de $\mathfrak{F}(E,H)$. Ensuite, procéder comme pour montrer l'associativité dans $\mathfrak{F}(E,E)$

C) Injectivité, surjectivité

Soit $f:E\to F$.

- On dit que *f* est injective lorsque $\forall x\in E,\forall x'\in E,(f(x)=f(x')\Rightarrow x=x')$

Autrement dit : si deux éléments de *E* ont la même image par *f*, alors ils sont égaux

Ou encore : deux éléments distincts de *E* on toujours des images distinctes (c'est la contraposée de l'énoncé précédent)

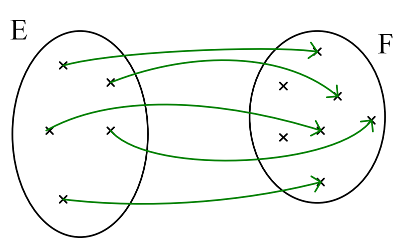
- On dit que *f* est surjective lorsque $\forall x\in F,\exists x\in E,(y=f(x))$

C'est-à-dire que tout élément de *F* est l'image d'un élément de *E*.

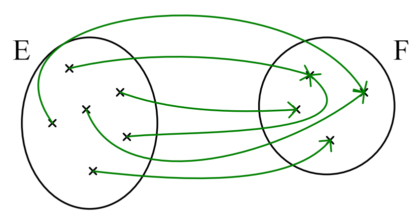
- On dit que *f* est bijective lorsqu'elle est à la fois injective et surjective.

Exemples :

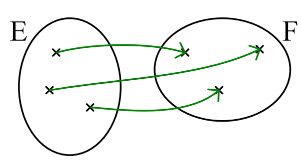
(1)



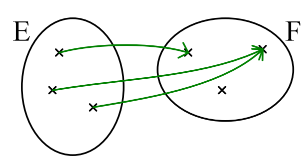
Injective non surjective



Surjective non injective



Bijective



Ni injective ni surjective

(2)

$f:\underset{x\mapsto x^2}{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ n'est ni injective ni surjective : $f(-1)=f(1)$ et non$(\exists x\in\mathbb{R},x^2=-4)$

$g:\underset{x\mapsto x^2}{\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+}$ est surjective, non injective.

$h:\underset{x\mapsto x^2}{\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}}$ est injective non surjective.

$\varphi:\underset{x\mapsto x^2}{\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+}$ est bijective.

(3)

On note H l'humanité, M l'ensemble des mères, A l'ensemble des aînés.

$\begin{array}{l} H \to H \\ x \mapsto \text{mère de } x \end{array}$ n'est ni injective ni surjective.

$\begin{array}{l} M \to H \\ x \mapsto \text{enfant de } x \end{array}$ ne peut pas être définie, car x peut avoir plusieurs enfants.

$\begin{array}{l} H \to M \\ x \mapsto \text{mère de } x \end{array}$ est surjective non injective.

$\begin{array}{l} M \to H \\ x \mapsto \text{aîné de } x \end{array}$ est injective non surjective.

$\begin{array}{l} M \to A \\ x \mapsto \text{aîné de } x \end{array}$ est bijective.

Antécédent éventuel.

Soit $f : E \to F$

Soit $y \in F$. Un antécédent de y est un élément x de E tel que $y = f(x)$.

Attention, il n'y a en général ni existence ni unicité.

Proposition :

f est injective si et seulement si tout élément de F a au plus un antécédent.
f est surjective si et seulement si tout élément de F a au moins un antécédent.
f est bijective si et seulement si tout élément de F a exactement un antécédent.

Démonstration :

Pour l'injectivité :

$\Rightarrow$: supposons f injective. Supposons que y élément de F a un antécédent x. Soit x' un autre antécédent. On a alors $y = f(x)$ et $y = f(x')$. Donc $f(x) = f(x')$. Comme f est injective, $x = x'$. Donc si y admet un antécédent, il n'en admet qu'un seul.

$\Leftarrow$: supposons f non injective. Alors il existe $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$. Alors, en notant $y = f(x)\ (= f(x'))$, y admet deux antécédents distincts x et x'. Donc non(tout élément de F a au plus un antécédent). (On a montré la contraposée).

Pour la surjectivité, il suffit de traduire les deux côtés de l'équivalence pour voir qu'on écrit exactement la même chose.

Pour la bijectivité, on utilise les deux résultats précédents.

Proposition :

La composée de deux injections est une injection. Il en est de même pour la composée de deux surjections ou de deux bijections.

Démonstration :

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$

(1) Supposons f et g injectives. Montrons que $g \circ f$ l'est aussi. (c'est-à-dire que $\forall x, x' \in E, ((g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Rightarrow x = x')$)

Soient $x, x' \in E$. Supposons que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Montrons que $x = x'$.

On a : $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, soit $g(f(x)) = g(f(x'))$. Comme g est injective, on a alors $f(x) = f(x')$. Comme f est injective, on a donc $x = x'$.

(2) Supposons f et g surjectives. Montrons que $g \circ f$ l'est aussi. (c'est-à-dire que $\forall y \in G, \exists x \in E, y = (g \circ f)(x)$)

Soit $y \in G$. Comme g est surjective, il existe $x' \in F$ tel que $y = g(x')$.

Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $x' = f(x)$

Ainsi, $y = g(x') = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

D) Réciproque d'une bijection

Soit $f : E \to F$ une application bijective.

On peut introduire l'application de F dans E qui à tout élément de F associe son unique antécédent par f dans E. Cette application s'appelle la réciproque de f, notée f^{-1}.

$f^{-1}: \begin{array}{l} F \to E \\ x \mapsto \text{l'unique élément } y \text{ de } E \text{ tel que } f(y)=x \end{array}$

$\forall x \in F, \forall y \in E, (y = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(y))$

Proposition :

Soit $f : E \to F$ bijective.

Alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$

Démonstration :

* $f \circ f^{-1}$ est bien défini et va de F dans F.

Soit $x \in F$

Alors $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$ (car $f^{-1}(x)$ est l'antécédent de x par f)

* $f^{-1} \circ f$ est bien défini et va de E dans E.

Soit $x \in E$.

Alors $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$ (car x est l'antécédent de $f(x)$ par f^{-1}).

Théorème (inversible $\Rightarrow$ bijectif).

Soit $f : E \to F$.

S'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$

Démonstration :

Soit $f : E \to F$. Supposons qu'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$

(1) Alors f est injective :

Soient $x, x' \in E$, supposons que $f(x) = f(x')$.

Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, soit $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Ainsi, $x = x'$.

(2) Et f est surjective :

Soit $y \in F$. Alors $y = (f \circ g)(y) = f(g(y))$

Donc y a un antécédent par f, à savoir $g(y)$, et ce quel que soit y.

Donc f est surjective

Donc f est bijective.

(3) Montrons que $f^{-1} = g$

On a : $g = g \circ \mathrm{Id}_F = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_E \circ f^{-1} = f^{-1}$

Conséquence : si f est bijective, f^{-1} l'est aussi et $(f^{-1})^{-1} = f$

E) Image directe, image réciproque

Définitions :

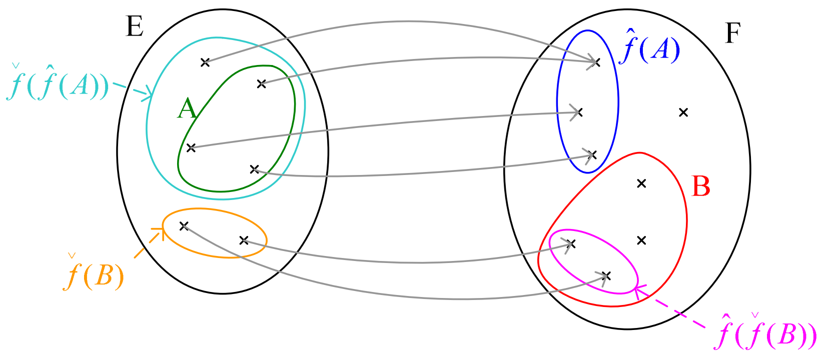
Soit $f : E \to F$

- Soit A une partie de E. On appelle image directe de A par f, et on note $\hat{f}(A)$ l'ensemble des images par f des éléments de A, c'est-à-dire : $\hat{f}(A)=\{y\in F, \exists x\in A, y=f(x)\}=\{f(x), x\in A\}$
- Soit B une partie de F. On appelle image réciproque de B par f et on note $\check{f}(B)$ l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B, c'est-à-dire : $\check{f}(B)=\{x\in E, f(x)\in B\}$

Cas particulier :
L'image directe par f de E est l'ensemble image de f, noté $\mathrm{Im}(f)$

Soit $f:E\to F$. Alors, $\begin{array}{l}\tilde{f}:E\to \mathrm{Im}(f)\\ x\mapsto f(x)\end{array}$ est évidemment surjective.

Visualisation :



Proposition :

Si $f:E\to F$ est bijective, alors pour toute partie B de F, $\check{f}(B)=\widehat{f^{-1}}(B)$

(1) : montrons que $\widehat{f^{-1}}(B)\subset\check{f}(B)$

Soit $x\in\widehat{f^{-1}}(B)$. Montrons que $x\in\check{f}(B)$ (c'est-à-dire que $f(x)\in B$).

$x\in E$ car $\widehat{f^{-1}}(B)\subset E$, et il existe $y\in B$ tel que $x=f^{-1}(y)$ par définition de $\widehat{f^{-1}}(B)$. Donc $f(x)=f(f^{-1}(y))=y$. Or, $y\in B$. Donc $f(x)\in B$. Donc $x\in\check{f}(B)$, d'où la première inclusion

(2) : montrons que $\check{f}(B)\subset\widehat{f^{-1}}(B)$

Soit $x\in\check{f}(B)$. On a : $f(x)\in B$, et $x=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)$ avec $y=f(x)\in B$.

Donc $x\in\widehat{f^{-1}}(B)$. D'où l'autre inclusion et l'égalité.

Soit $f:E\to F$, bijective, et A une partie de E. Alors $\hat{f}(A)=\check{f^{-1}}(A)$. En effet, il suffit d'appliquer l'égalité précédente avec f^{-1} qui est aussi une bijection de F dans E.

$\widehat{f^{-1}}(A)=(\check{f^{-1}})^{-1}(A)$, c'est-à-dire $\widehat{f^{-1}}(A)=\check{f}(A)$

Conséquence : pour une application f quelconque de E dans F, on peut noter $f(A)$ pour $\hat{f}(A)$ (c'est la nature de $A\subset E$ qui permet de distinguer l'image directe) et $f^{-1}(B)$ pour $\check{f}(B)$ lorsque $B\subset F$. (attention, le $^{-1}$ ne signifie pas pour autant que f est bijective !).