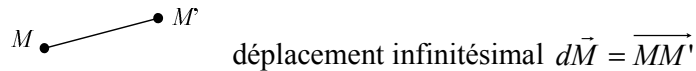


Chapitre 2 : Potentiel électrique

I Définition

A) Circulation du champ électrique \vec{E}

On considère un champ $\{\vec{E}\}$ créé par une distribution de charges.

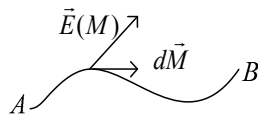


Définition :

Circulation élémentaire de \vec{E} associée à $d\vec{M}$:

$$\delta\mathcal{C} = \vec{E}(M) \cdot d\vec{M} .$$

Pour un contour $A \rightarrow B$:



$$\text{Circulation de } \vec{E} \text{ sur } A \rightarrow B : C_{AB}(\vec{E}) = \int_{AB} \delta\mathcal{C} = \int_{AB} \vec{E}(M) \cdot d\vec{M} .$$

Analogie mécanique :

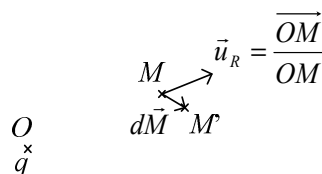
$$\delta W = \vec{F}(M) \cdot d\vec{M} , W_{AB}(\vec{F}) = \int_{AB} \vec{F}(M) \cdot d\vec{M} .$$

Remarque :

On parle de circulation pour des *champs de vecteurs* ; ainsi, un travail est une circulation, mais pas le contraire, puisqu'on n'utilise le terme de travail que pour une *force*.

B) Circulation du champ créé par une charge ponctuelle

1) Circulation élémentaire



On note $r = OM$.

$$\text{Ainsi, } \vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r .$$

$$d\vec{M} = \overline{MM'} = d(r\vec{u}_r) = dr \cdot \vec{u}_r + r \underbrace{d\vec{u}_r}_{\perp \vec{u}_r}$$

$$\delta\mathcal{C} = \vec{E}(M) \cdot d\vec{M} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\vec{u}_r \cdot d\vec{M}) = \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

2) Potentiel électrostatique

$$\delta C = \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = d\left(\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r}\right) = -d\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cte}\right) = -dV(M)$$

$V(M)$: potentiel électrostatique créé en M par la charge q située en O .

Remarque :

On choisit généralement la constante de sorte que $\lim_{M \rightarrow +\infty} V(M) = 0$.

$$\text{Ainsi, } V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

3) Propriétés

$$\delta C = -dV.$$

Donc, pour un contour AB :

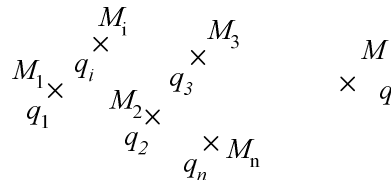
$$C_{AB}(\vec{E}) = \int_{AB} \delta C = \int_{AB} -dV = -(V(B) - V(A)) = V(A) - V(B).$$

Pour un contour fermé :

$$C_{AA}(\vec{E}) = \oint_C \vec{E}(M) \cdot d\vec{M} = V(A) - V(A) = 0$$

C) Théorème de superposition

1) Distribution discrète de charges



$\{q_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ crée en tout point M de l'espace un champ :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(M).$$

Donc :

$$\delta C = \vec{E}(M) \cdot d\vec{M} = \left(\sum_{i=1}^n \vec{E}_i(M) \right) \cdot d\vec{M} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\vec{E}_i(M) \cdot d\vec{M} \right)}_{=\delta C_i = -dV_i}$$

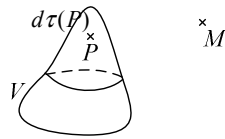
$$\text{Avec } V_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 M_i M}$$

$$\text{Donc } \delta C = \sum_{i=1}^n -dV_i = -d\left(\sum_{i=1}^n V_i \right)$$

Le champ électrique $\vec{E}_{\{q_i\}}$ dérive donc d'un potentiel, à savoir :

$$V(M) = \sum_{i=1}^n V_i(M) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 M_i M}$$

2) Distribution de charges continue



(On utilise $d\tau$ pour un volume élémentaire afin d'éviter les conflits de notation avec les potentiels)

On considère le champ $\{\vec{E}\}$ créé par V .

$$\delta C = \vec{E}(M) \cdot d\vec{M} = \iiint_V d\vec{E} \cdot d\vec{M} = \iiint_V -dV_{dq}$$

$$\text{Avec } V_{dq} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 PM} = \frac{\rho(P)d\tau(P)}{4\pi\epsilon_0 PM}$$

$$\text{D'où } \delta C = -d \underbrace{\iiint_V \frac{\rho(P)d\tau(P)}{4\pi\epsilon_0 PM}}_{V(M)}$$

On applique le même principe pour σ, λ .

Conclusion :

Le champ $\{\vec{E}\}$ dérive d'un potentiel pour toute distribution de charge (qu'elle soit continue ou discrète)

II Lien entre \vec{E} et V .

A) Gradient d'un champ scalaire

1) Définition

On considère $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire.
 $M \mapsto F(M)$

On lui associe le champ vectoriel :

$\overrightarrow{\text{grad}} F$, ou $\vec{\nabla} F$ ("nabla") : $M \mapsto \overrightarrow{\text{grad}}_M F$ défini par $dF = \overrightarrow{\text{grad}}_M F \cdot d\vec{M}$.

On admet que $\overrightarrow{\text{grad}}_M F$ est défini de manière unique (vu en math).

$$\begin{array}{c} M \quad d\vec{M} \quad M' \\ \bullet \quad \nearrow \quad \bullet \\ F(M') - F(M) = \overrightarrow{\text{grad}}_M F \cdot \overrightarrow{MM'} \end{array}$$

2) Expression dans les différents systèmes de coordonnées

• Cartésien :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad ; \quad d\vec{M} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

$$= \overrightarrow{\text{grad}}_M F \cdot d\vec{M} = \left(\overrightarrow{\text{grad}}_M F\right)_x dx + \left(\overrightarrow{\text{grad}}_M F\right)_y dy + \left(\overrightarrow{\text{grad}}_M F\right)_z dz$$

Ainsi, $\overrightarrow{\text{grad}}_M F \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix}$

- Cylindriques : $M(\rho, \theta, z)$

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{k} \quad ; \quad d\vec{M} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{k}$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial F}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

$$\text{Et } dF = \overrightarrow{\text{grad}}_M F \cdot d\vec{M} = \left(\overrightarrow{\text{grad}}_M F\right)_\rho dx + \left(\overrightarrow{\text{grad}}_M F\right)_\theta \rho d\theta + \left(\overrightarrow{\text{grad}}_M F\right)_z dz$$

Donc $\overrightarrow{\text{grad}}_M F \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial \rho} \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{1}{\rho} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix}$

Exemple :

$$F : M(x, y, z) \mapsto y$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}_M F \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{j}$$

$$\text{et } \overrightarrow{\text{grad}}_M F = \frac{\partial F}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\theta + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}$$

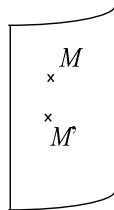
$$F(M) = y = \rho \sin \theta$$

D'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}_M F &= \sin \theta \vec{e}_\rho + \frac{\cos \theta}{\rho} \rho \vec{e}_\theta \\ &= \sin \theta (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + \cos \theta (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \vec{j} = \vec{j} \end{aligned}$$

3) Interprétation géométrique

On considère une surface $F = \text{cte} = \lambda$ (c'est-à-dire telle que pour tout point M de cette surface, $F(M) =$ cette constante ; on l'appelle une surface de niveau de F).



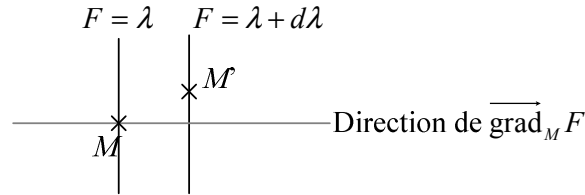
Soit M un point de cette surface, M' infiniment voisin de M sur cette surface.

$$\text{Alors } dF = F(M') - F(M) = \lambda - \lambda = 0 = \overrightarrow{\text{grad}}_M F \cdot \overrightarrow{MM'}$$

Donc $\overrightarrow{\text{grad}}_M F \perp \overrightarrow{MM'}$

Ainsi, $\overrightarrow{\text{grad}}_M F$ est perpendiculaire en M à la surface de niveau.

On prend maintenant deux surfaces de niveau infiniment voisines, $F = \lambda$ et $F = \lambda + d\lambda$, avec $d\lambda > 0$ (représentation en coupe) :



Soient M un point de la surface $F = \lambda$, M' infiniment voisin de M sur la surface $F = \lambda + d\lambda$.

Alors :

$$dF = F(M') - F(M) = d\lambda > 0$$

$$= \overrightarrow{\text{grad}}_M F \cdot \overrightarrow{MM'}$$

Donc $\overrightarrow{\text{grad}}_M F$ est dirigé vers les croissantes de F .

Enfin, avec l'expression différentielle, on remarque que $\overrightarrow{\text{grad}}_M F$ a une intensité (c'est-à-dire une norme) d'autant plus importante que F est « fortement croissante ».

B) Lien entre \vec{E} et V .

$$\delta C = \vec{E}(M) \cdot d\vec{M}$$

$$= -dV = -\overrightarrow{\text{grad}}_M V \cdot d\vec{M}$$

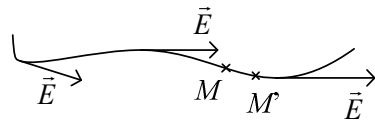
Donc, par unité de la définition du gradient :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

Ou, pour tout point de l'espace : $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M V$.

C) Topographie du champ électrique

1) Lignes de champ



C'est une courbe tangente en tout point à \vec{E} .

Soient M un point de l'espace et M' infiniment voisin de M appartenant à la ligne de champ passant par M .

Alors $\vec{E}(M) // \overrightarrow{MM'}$. Donc $\vec{E}(M) \wedge d\vec{M} = \vec{0}$. On obtient ainsi une équation différentielle dont la (les) solution(s) sont les lignes de champ.

2) Surfaces équipotentielles

Définition : Ce sont les surfaces de niveau de V .

(Les surfaces $V(M) = \text{cte}$)

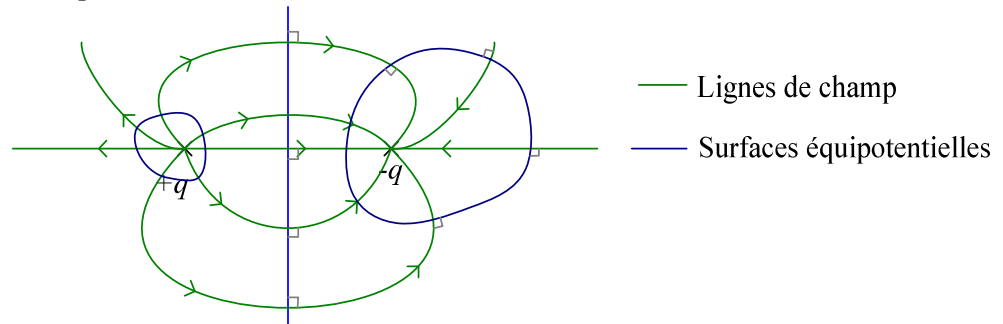
Exemple :

Pour une charge ponctuelle, $V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 OM}$

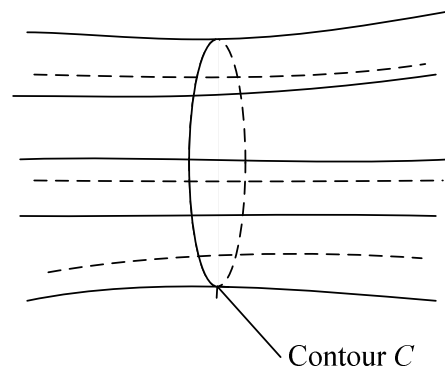
$V(M) = \text{cte} \Leftrightarrow OM = \text{cte} \Leftrightarrow M$ appartient à la sphère de centre O .

On a $\vec{E} = -\text{grad}V$. Donc \vec{E} est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles, et dirigé vers les potentiels décroissants.

Exemple :



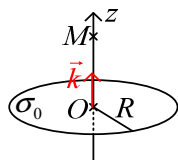
3) Tube de champ



L'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur le contour C forme une surface, appelée tube de champ.

D) Exemple de calcul de V .

Avec un disque uniformément chargé :



Sur l'axe, $\vec{E}(M) = \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{k}$ (vu au chapitre précédent)

Calcul de $V(M)$ pour un point M de l'axe (Oz :

$$C_{OM} = \int_{OM} \vec{E}(M) \cdot d\vec{M} = V(O) - V(M)$$

On choisit pour OM le segment rectiligne de O à M .

$$V(O) - V(M) = \int_{OM} E_z(z) \vec{k} \cdot (dz \vec{k}) = \int_0^{z_M} \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) dz.$$

Pour $z > 0$:

$$V(O) - V(M) = \int_0^{z_M} \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) dz = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} (z_M - 0 - \sqrt{R^2 + z_M^2} + R)$$

(Une primitive de $z \mapsto \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$ est $z \mapsto \sqrt{R^2 + z^2}$)

$$\text{Donc } V(M) = V(O) + \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z_M^2} - R - z_M)$$

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} V(M) = 0. \text{ Donc } V(O) = \frac{\sigma_0 R}{2\epsilon_0} \text{ (et } V(M) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z_M^2} - z_M))$$

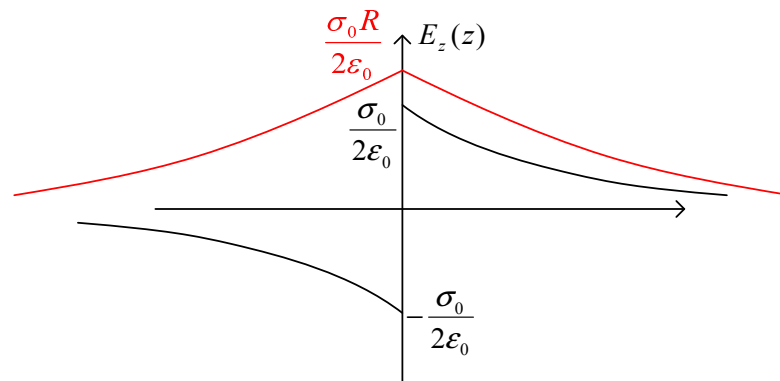
Et de même, pour z quelconque sur (Oz :

$$V(M) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z_M^2} - |z_M|)$$

Si $OM = z_M \gg R$:

$$\sqrt{R^2 + z_M^2} = z_M \sqrt{1 + \frac{R^2}{z_M^2}} = z_M \left(1 + \frac{R^2}{2z_M^2} \right)$$

$$\text{Donc } V(M) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{2z_M} = \frac{\sigma_0 \pi R^2}{4\pi \epsilon_0 z_M}$$



On observe une discontinuité du champ en $z = 0$.

$$\Delta \vec{E} = \lim_{z_M \rightarrow 0^+} \vec{E}(M) - \lim_{z_M \rightarrow 0^-} \vec{E}(M) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \vec{k}$$

Propriété générale :

Distribution	\vec{E}	V
Volumique	Continu	Continu
Surfacique	Discontinuité	Continu
Linéique	Non définis sur la distribution de charge	
Discrète		

Exemple : $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ n'est pas défini pour $r = 0$.

E) Symétries de $\{\rho\}$ et $\{V\}$.

Théorème (admis) :

$\{\rho\}$ et $\{V\}$ possèdent les mêmes symétries.

Exemples :

- Invariance par translation de direction \vec{i} :

Le potentiel est indépendant de x ; $V(x, y, z)$

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &= -\overrightarrow{\text{grad}}_M V \\ &= -\underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}}_{=0} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \\ &= E_y(y, z) \vec{j} + E_z(y, z) \vec{k}\end{aligned}$$

- Invariance par rotation d'axe (Oz et d'angle α quelconque :

Le potentiel est indépendant de θ : $V(\rho, \theta, z)$

$$\vec{E}(M) = E_\rho(\rho, z) \vec{e}_\rho + E_z(\rho, z) \vec{k}$$

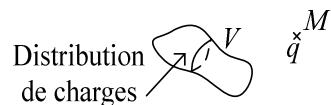
- Symétrie sphérique :

Le potentiel est indépendant de θ, φ : $V(r, \theta, \varphi)$

$$\vec{E}(M) = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r = E_r(r) \vec{e}_r$$

III Energie potentielle

A) Energie potentielle électrique d'une charge ponctuelle



Une distribution de charges crée un champ électrique $\{\vec{E}\}$ et un potentiel $\{V\}$ dans tout l'espace.

On considère une charge q en M soumise à la force de Coulomb :

$$\vec{F}_{V \rightarrow q} = q\vec{E}(M)$$

Pour un déplacement infinitésimal $d\vec{M}$:

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M} = q \underbrace{\vec{E}(M)}_{\mathcal{E}} \cdot d\vec{M} = q(-dV) = -d(qV)$$

Donc la force de Coulomb est conservative, et dérive d'une énergie potentielle :

$E_p = qV(M) + \text{cte}$, appelée aussi énergie potentielle de q dans le champ de potentiel $\{V\}$.

Remarque :

Soit \vec{F} une force conservative, et E_p l'énergie potentielle dont elle dérive.

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M} = -dE_p = -(\overrightarrow{\text{grad}}_M E_p \cdot dM)$$

Donc $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}_M E_p$

Exemple :

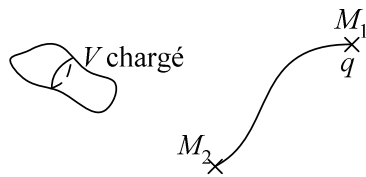
L'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{pp} = mgz + \text{cte}$$

$$\text{Donc } \vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_{pp} = -\frac{\partial E_{pp}}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial E_{pp}}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial E_{pp}}{\partial z} \vec{k} = -\frac{dE_{pp}}{dz} \vec{k} = -mg\vec{k}$$

(D'où le terme de "dérive d'une énergie potentielle" pour une force conservative)

B) Interprétation



Travail quasi-statique d'un opérateur pour amener la charge q de M_1 à M_2

(Quasi-statique : à tout instant, la vitesse et l'accélération sont quasiment nulles)

On a alors :

$$\vec{F}_{\text{élec}} + \vec{F}_{\text{op}} = m\vec{a} \approx \vec{0}.$$

Donc $\vec{F}_{\text{op}} \approx -\vec{F}_{\text{élec}}$.

$$\delta W_{\text{op}} = \vec{F}_{\text{op}} \cdot d\vec{M} = -\vec{F}_{\text{él}} \cdot d\vec{M} = dE_p$$

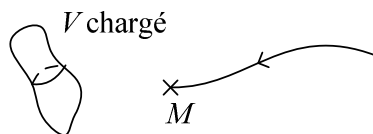
$$\text{Donc } W_{\text{op}} = \int_{M_1 \rightarrow M_2} dE_p = E_p(M_2) - E_p(M_1) = q(V(M_2) - V(M_1))$$

Si $V(M_2) > V(M_1)$ et $q > 0$, $W_{\text{op}} > 0$

Si $V(M_2) < V(M_1)$ et $q > 0$, $W_{\text{op}} < 0$

Ainsi, une charge $q > 0$ descend spontanément vers les régions de plus faible potentiel.

Si M_1 est à l'infini, et M_2 en un point M :



$$W_{\text{op}} = q(V(M) - V(\infty))$$

Si on choisit $E_p = qV$, nulle à l'infini (possible uniquement pour des distributions de charge d'extension finie) :

$$W_{op} = E_p(M) = qV(M)$$

C) Energie potentielle d'un système de deux charges

$$\begin{array}{c} M_1 \\ \times \\ q_1 \\ \\ q_2 \\ \times \\ M_2 \end{array}$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = q_2 \vec{E}_1(M_2) = q_2 (-\overrightarrow{\text{grad}}_{M_2} V_1) = -\overrightarrow{\text{grad}}_{M_2} q_2 V_1 = -\overrightarrow{\text{grad}}_{M_2} E_p$$

$$\text{Où } E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 M_1 M_2}$$

On retrouve l'expression de l'énergie potentielle d'interaction d'un système de deux particules isolées.

Travail d'un opérateur pour construire cette distribution, les charges q_1, q_2 étant initialement à l'infini (et infiniment éloignées l'une de l'autre).

1^{ère} étape :

On amène q_1 de l'infini à M_1 . Aucun champ, donc pas de travail. $W_{op}^{(1)} = 0$

2^{ème} étape :

q_1 est en M_1 , immobile.

On amène q_2 de l'infini à M_2 : $W_{op}^{(2)} = q_2 V(M_2)$

avec $V(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 M_1 M_2}$: potentiel en M_2 créé par la charge q_1 en M_1 .

$$\text{Donc } W_{op} = W_{op}^{(1)} + W_{op}^{(2)} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 M_1 M_2}$$

$$E_p = q_2 V_1(M_2) = q_1 V_2(M_1)$$

$$= \frac{1}{2} (q_1 V_2(M_1) + q_2 V_1(M_2))$$

Généralisation à n charges q_i en M_i :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(M_i)$$

Où $V(M_i)$ est le potentiel créé par toutes les charges en M_i