Chapitre 2 : Lois de composition interne

I Définition

Soit E un ensemble. Une loi de composition interne (l.c.i.) sur E est une application de $E \times E$ dans E. Si $*$ est le symbole désignant cette l.c.i, l'image de (x, y) est notée $x * y$. Ainsi, se donner une l.c.i. $*$ sur E, c'est se donner une application : $\begin{array}{c} E \times E \to E \\ (x,y) \mapsto x*y \end{array}$.

On parle souvent d'opération plutôt que de l.c.i.

Exemples :

- Les opérations usuelles + et $\times$ constituent des l.c.i sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$…
- La division $\div$ constitue une l.c.i sur l'ensemble $\mathbb{Q}^*$ (ou sur $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{C}^*$)
- La loi $\circ$ constitue une l.c.i sur l'ensemble $\mathfrak{F}(A, A)$ des applications d'un ensemble quelconque A vers lui-même.
- Sur l'ensemble $P(\Omega)$ des parties d'un ensemble Ω, les opérations $\cup$ et $\cap$ sont des l.c.i.
- L'addition entre fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est aussi une l.c.i sur $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

II Propriétés éventuelles

Dans tout ce paragraphe, $(E,*)$ désigne un ensemble muni d'une l.c.i.

A) Associativité

On dit que $*$ est associative lorsque, pour tous x, y, z de E : $x*(y*z) = (x*y)*z$

Cette valeur commune peut être alors notée sans ambiguïté $x*y*z$

B) Commutativité

On dit que $*$ est commutative lorsque, pour tous x, y de E, $x * y = y * x$.

C) Elément neutre

Soit $e \in E$. On dit que e est élément neutre pour $*$ lorsque, pour tout x de E, $x*e = e*x = x$ (les deux égalités doivent être vérifiées lorsque $*$ n'est pas commutative)

Proposition :
S'il y a dans E un élément neutre pour $*$, alors il n'y en a qu'un seul.

Démonstration :

Si e et e' sont deux éléments neutres, alors $e' = e * e' = e$ (La première égalité vient du fait que e est neutre, la seconde du fait que e' est neutre)

Définition :

Si $*$ est une l.c.i. associative sur E et s'il y a dans E un élément neutre pour $*$, on dit que $(E,*)$ est un monoïde. Si de plus $*$ est commutative, on dit que ce monoïde est commutatif.

Exemple : $(\mathbb{N},+)$ est un monoïde commutatif.

D) Symétrique

On suppose ici que E admet un neutre e pour $*$.

Soient x et x' deux éléments de E.

On dit que x' est symétrique de x (pour la loi $*$) lorsque $x * x' = x' * x = e$.

Proposition :

Si $*$ est associative, et si un élément x de E admet un symétrique pour $*$, alors il n'en a qu'un seul.

Démonstration :

Si x' et x'' sont symétriques de x, alors :

$x'' = e * x'' = (x' * x) * x'' = x' * (x * x'') = x' * e = x'$

Vocabulaire :

Un élément qui admet un symétrique est dit symétrisable. Ainsi, dans $\mathbb{Z}$ muni de la loi $\times$, l'ensemble des éléments symétrisables se réduit à $\{-1,1\}$.

En fait, dans le cas de certaines lois, comme la loi $\times$, on dit plutôt « inverse » et « inversible » plutôt que « symétrique » et « symétrisable ».

E) Distributivité

On suppose que E est muni d'une deuxième l.c.i. notée #. On dit que $*$ est distributive sur # lorsque, pour tous x, y, z de E : $x * (y \# z) = (x * y) \# (x * z)$ et $(y \# z) * x = (y * x) \# (z * x)$.

III Stabilité

$(E,*)$ désigne toujours un ensemble muni d'une l.c.i.

Soit F une partie de E. On dit que F est stable par $*$ lorsque, pour tous x, y de F, $x * y$ est encore dans F. Dans ce cas, on pourra dire que $*$ définit, par restriction, une l.c.i. sur F.

IV Autres propriétés

Soit $(E,*)$ un monoïde (ainsi, $*$ est associative). Alors l'ensemble S des éléments symétrisables de E est stable par $*$.

En effet :
Soient x, y deux éléments de S. On note x', y' leurs symétriques, e l'élément neutre de E.
On a :
$(x*y)*(y'*x') = x*(y*y')*x' = x*e*x' = x*x' = e$.
Et $(x'*y')*(y*x) = x'*(y'*y)*x = x'*e*x = x'*x = e$.
Donc $x*y \in S$, et le symétrique de $x*y$ pour $*$ est $y'*x$.

Soit A un ensemble, et soit E un ensemble muni d'une l.c.i. $*$. On définit sur $\mathfrak{F}(A,E)$ une loi $\hat{*}$ de la façon suivante :

Pour tous f, g de $\mathfrak{F}(A,E)$, $f \hat{*} g$ est l'application de A dans E qui à tout x de A associe $f(x)*g(x)$. Ainsi : $f \hat{*} g : \underset{x \mapsto f(x)*g(x)}{A \to E}$.

Proposition :

(1) Si $*$ est associative sur E, alors $\hat{*}$ est associative sur $\mathfrak{F}(A,E)$

(2) Si $*$ est commutative sur E, alors $\hat{*}$ est commutative sur $\mathfrak{F}(A,E)$

(3) Si il y a dans E un neutre pour $*$, alors il y a dans $\mathfrak{F}(A,E)$ un neutre pour $\hat{*}$

(4) Si tout élément de E admet dans E un symétrique pour $*$, alors tout élément de $\mathfrak{F}(A,E)$ admet dans $\mathfrak{F}(A,E)$ un symétrique pour $\hat{*}$.

(5) On munit E d'une deuxième l.c.i notée # et on définit de même la loi $\hat{\#}$ sur $\mathfrak{F}(A,E)$. Si $*$ est distributive sur #, alors $\hat{*}$ 'est distributive sur $\hat{\#}$.

Démonstration :

(1) Supposons $*$ associative sur E. Soient f, g, h trois éléments de $\mathfrak{F}(A,E)$.
Soit $x \in A$. On a :
$(f \hat{*} (g \hat{*} h))(x) = f(x)*(g \hat{*} h)(x) = f(x)*(g(x)*h(x)) = f(x)*g(x)*h(x)$
Et $((f \hat{*} g) \hat{*} h)(x) = (f \hat{*} g)(x)*h(x) = (f(x)*g(x))*h(x) = f(x)*g(x)*h(x)$
Donc $(f \hat{*} (g \hat{*} h))(x) = ((f \hat{*} g) \hat{*} h)(x)$.
Cette égalité est valable pour tout $x \in A$
D'où l'égalité des applications : $f \hat{*} (g \hat{*} h) = (f \hat{*} g) \hat{*} h$ et ainsi l'associativité de $\hat{*}$.

(2) Supposons $*$ commutative sur E. Soient $f, g \in \mathfrak{F}(A,E)$.
On a, pour tout x élément de A :
$(f \hat{*} g)(x) = f(x)*g(x) = g(x)*f(x) = (g \hat{*} f)(x)$.
Donc $f \hat{*} g = g \hat{*} f$.
C'est valable pour tous $f, g \in \mathfrak{F}(A,E)$. Donc $\hat{*}$ est commutative.

(3) Supposons qu'il y ait dans E un neutre pour $*$, noté e.
Alors l'application : $g : \underset{x \mapsto e}{A \to E}$, élément de $\mathfrak{F}(A,E)$, est neutre pour $\hat{*}$. En effet :
Soit $f \in \mathfrak{F}(A,E)$. On a, pour tout x élément de A :
$(g \hat{*} f)(x) = g(x)*f(x) = e*f(x) = f(x)$
et $(f \hat{*} g)(x) = f(x)*g(x) = f(x)*e = f(x)$
Donc $f \hat{*} g = g \hat{*} f = f$. Donc g est neutre pour $\hat{*}$.

(4) Supposons que tout élément de E admette dans E un symétrique pour $*$. Pour tout x de E, on note $\overline{x}$ le symétrique de x pour $*$. On note de plus e un neutre pour $*$.

Alors, pour toute application $f \in \mathfrak{F}(A,E)$, $f' : \begin{array}{l} A \to E \\ x \mapsto \overline{f(x)} \end{array}$ est symétrique de f pour $\hat{*}$.

En effet : Soit $f \in \mathfrak{F}(A,E)$. On a, pour tout x élément de A :

$(f \,\hat{*}\, f')(x) = f(x) * f'(x) = f(x) * \overline{f(x)} = e$

$(f' \hat{*} f)(x) = f'(x) * f(x) = \overline{f(x)} * f(x) = e$

Donc $f \,\hat{*}\, f' = f' \hat{*} f = g$ où $g : \begin{array}{l} A \to E \\ x \mapsto e \end{array}$.

Donc tout élément de $\mathfrak{F}(A,E)$ admet dans $\mathfrak{F}(A,E)$ un symétrique pour $\hat{*}$

(5) Supposons $*$ distributive sur #. Soient f, g, h trois éléments de $\mathfrak{F}(A,E)$.

On a, pour tout élément x de A :

$$(f \,\hat{*}\, (g \hat{\#} h))(x) = f(x) * (g \hat{\#} h)(x) = f(x) * (g(x) \# h(x)) = (f(x) * g(x)) \# (f(x) * h(x))$$
$$= (f \,\hat{*}\, g)(x) \# (f \,\hat{*}\, h)(x) = ((f \,\hat{*}\, g) \hat{\#} (f \,\hat{*}\, h))(x)$$

et :

$$((g \hat{\#} h) \,\hat{*}\, f)(x) = (g \hat{\#} h)(x) * f(x) = (g(x) \# h(x)) * f(x) = (g(x) * f(x)) \# (h(x) * f(x))$$
$$= (g \,\hat{*}\, f)(x) \# (h \,\hat{*}\, f)(x) = ((g \,\hat{*}\, f) \hat{\#} (h \,\hat{*}\, f))(x)$$

donc $f \,\hat{*}\, (g \hat{\#} h) = (f \,\hat{*}\, g) \hat{\#} (f \,\hat{*}\, h)$ et $(g \hat{\#} h) \,\hat{*}\, f = (g \,\hat{*}\, f) \hat{\#} (h \,\hat{*}\, f)$.

Ces égalités sont valables pour tous $f, g, h \in \mathfrak{F}(A,E)$. Donc $\hat{*}$ est distributive sur $\hat{\#}$.