Chapitre 3 : Cinématique du solide

I Introduction mathématique

A) Application antisymétrique

1) Définition

Pour un espace vectoriel E de dimension 3, une application $\vec{u} \mapsto A(\vec{u})$ est antisymétrique lorsque $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \vec{v} \cdot A(\vec{u}) = -\vec{u} \cdot A(\vec{v})$

2) Conséquences

$\vec{u} \cdot A(\vec{u}) = 0$

A est linéaire.

A l'inverse, si $\forall \vec{u} \in E, \vec{u} \cdot A(\vec{u}) = 0$ et $A(\vec{u}+\vec{v}) = A(\vec{u}) + A(\vec{v})$, alors A est antisymétrique.

En effet, on a alors $(\vec{u}+\vec{v}) \cdot A(\vec{u}+\vec{v}) = 0$

Donc $\vec{u} \cdot A(\vec{u}) + \vec{v} \cdot A(\vec{v}) + \vec{v} \cdot A(\vec{u}) + \vec{u} \cdot A(\vec{v}) = 0$ soit $\vec{v} \cdot A(\vec{u}) + \vec{u} \cdot A(\vec{v}) = 0$ donc A est antisymétrique.

3) Représentation matricielle

Dans une base $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \text{ (matrice antisymétrique)}$$

B) Produit vectoriel par $\vec{\Omega}$.

- Le produit vectoriel définit une application antisymétrique

Pour $\vec{\Omega}$ fixé dans E, $\vec{u} \mapsto A(\vec{u}) = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$.

Alors A est antisymétrique, puisque $\vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{u}) = -\vec{u} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{v})$

- Toute application antisymétrique se met sous la forme d'un produit vectoriel :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}}_{\vec{u}} = \ldots = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

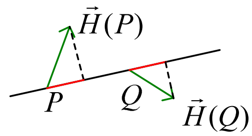
Ainsi, $A(\vec{u}) = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$

C) Champ de vecteurs équiprojectif

1) Définition

C'est une application $P \mapsto \vec{H}(P)$ telle que, pour tous P et Q :

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{H}(P) = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{H}(Q)$$



2) Application antisymétrique associée à un champ équiprojectif

Pour O donné :

$\overrightarrow{OP} = \vec{u}$

On définit $A(\vec{u}) = A(\overrightarrow{OP}) = \vec{H}(P) - \vec{H}(O)$

Alors :

- A est antisymétrique :

$$\overrightarrow{OQ} \cdot A(\overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}) \cdot A(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{PQ} \cdot A(\overrightarrow{OP}) + \underbrace{\overrightarrow{OP} \cdot (\vec{H}(P) - \vec{H}(O))}_{=\vec{0}}$$

$$= \overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{H}(P) - \vec{H}(O)) = \overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{H}(P) - \vec{H}(Q) + \vec{H}(Q) - \vec{H}(O))$$

$$= \overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{H}(Q) - \vec{H}(O)) = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}) \cdot (\vec{H}(Q) - \vec{H}(O))$$

$$= -\overrightarrow{PO} \cdot A(\overrightarrow{OQ})$$

- A est indépendant de O :

$$A(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = A(\overrightarrow{OQ}) - A(\overrightarrow{OP})$$

Donc $A(\overrightarrow{PQ}) = \vec{H}(Q) - \vec{H}(P)$

- $A(\overrightarrow{PQ}) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PQ}$

Ainsi, si $\vec{H}$ est équiprojectif, alors $\vec{H}(Q) - \vec{H}(P) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PQ}$, où $\vec{\Omega}$ est indépendant de Q et P.

II Solide

A) Définition

1) Solide physique

- Idéal : la distance entre les points matériels est invariante au cours du temps.

Il n'existe pas de matériau rigoureusement indéformable (par exemple, l'agitation thermique)

- Réel : la position moyenne des points matériels les uns par rapport aux autres peut être considérée comme invariante.

2) Solide cinématique

C'est un ensemble (éventuellement infini) de points cinématiques qui occupe tout l'espace et dont les distances sont invariantes au cours du temps.

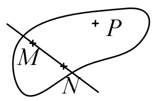
Ainsi, les vitesses relatives sont nulles les unes par rapport aux autres, et les vitesses absolues ne sont pas indépendantes.

Un point géométrique appartient à une infinité de solides cinématiques

B) Paramétrage de la position

Pour un point matériel, on a besoin de trois paramètres.
Ainsi, pour n points matériels indépendants, il faut $3n$ paramètres.
Pour un solide, seuls 6 paramètres sont nécessaires :

- On fixe la position de 3 points du solide :



On place M : trois paramètres.
On place ensuite N : plus que deux paramètres (sur une sphère de centre M).
Enfin pour P il n'y a plus qu'un paramètre (sur un cercle d'axe MN)

- On peut aussi choisir de fixer un point et trois angles (« paramétrage par les angles d'Euler »)

Remarque :
- Si un solide a un point fixe, on n'a plus besoin que de 3 paramètres
- Pour un axe fixe, il suffit d'un paramètre.

III Champ des vitesses d'un solide

Le fait que les distances soient invariantes impose que les vitesses des différents points soient liées.

A) Le champ des vitesses d'un solide est équiprojectif

On a pour deux points P et Q du solide :

$\overrightarrow{PQ}^2 = \text{cte}$

Donc $\dfrac{d(\overrightarrow{PQ}^2)}{dt} = 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{PQ} \cdot \dfrac{d\overrightarrow{PQ}}{dt} = 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{v}(Q) - \vec{v}(P)) = 0$.

B) Conséquence : le vecteur instantané de rotation

Comme le champ des vitesses est équiprojectif, on peut introduire $\vec{\Omega}$ tel que :

$\boxed{\vec{v}(P) = \vec{v}(Q) + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{\Omega}}$ (formule de Varignon)

- $\vec{\Omega}$: vecteur instantané de rotation, dépend du mouvement du solide, mais pas de P et Q.

- $\vec{\Omega}$ dépend du temps.
- $\vec{\Omega}$ dépend du référentiel
- $\vec{\Omega}$ apparaît ici comme un pseudo–vecteur.

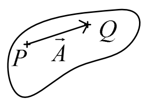
C) Torseur des vitesses

Pour les moments, on avait : $\vec{M}(O') = \vec{M}(O) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R}$.

Ainsi, le torseur des vitesses est le torseur de résultante $\vec{\Omega}$ et de moment en P $\vec{v}(P)$.

Il faut donc 6 paramètres pour déterminer le champ des vitesses.

D) Dérivation par rapport au temps d'un vecteur lié à *S*.



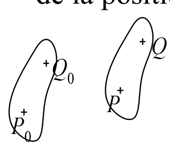
$\vec{A} = \overrightarrow{PQ}$.

Ainsi, $\left(\dfrac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \vec{v}(Q) - \vec{v}(P) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PQ}$, c'est-à-dire $\boxed{\left(\dfrac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \vec{\Omega} \wedge \vec{A}}$.

IV Mouvements d'un solide

A) Mouvement de translation

- Un solide est dit en translation si, à tout instant, la position du solide se déduit de la position initiale par une translation :



Ainsi, $\overrightarrow{PQ}(t) = \overrightarrow{P_0Q_0}$.

Remarque :

Le terme de translation n'a de sens que pour un *solide*.

- Propriétés :

- Tous les points du solide ont une trajectoire identique.
- Le champ des vitesses est uniforme (à un instant *t*, tous les points ont la même vitesse) : $\overrightarrow{PQ}(t) = \overrightarrow{P_0Q_0}$, donc $\vec{v}(Q) - \vec{v}(P) = 0$ ou $\vec{v}(Q) = \vec{v}(P)$.
- $\vec{\Omega} = \vec{0}$
- Réciproquement, si $\vec{\Omega} = \vec{0}$, alors $\vec{v}(Q) = \vec{v}(P)$, donc $\overrightarrow{PQ}(t) = \overrightarrow{P_0Q_0}$.

Ainsi, on a l'équivalence : $\boxed{S \text{ est en translation } \Leftrightarrow \vec{\Omega} = \vec{0}}$

(Le torseur des vitesses est alors un couple)

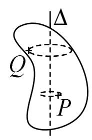
B) Mouvement de rotation autour d'un axe

1) Définition

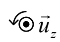
A tout instant, la position du solide se déduit de la position initiale par une rotation autour d'un axe.

2) Propriétés

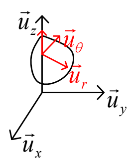
Toutes les trajectoires sont circulaires.



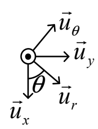
Vecteur $\vec{\Omega}$:

On oriente Δ : 

On note $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire de rotation (algébrique)



On suppose $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ fixes, et $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ liés à S.



Comme $\vec{u}_z$ est fixe, on a $\frac{d\vec{u}_z}{dt} = \vec{0}$. De plus, $\vec{u}_z$ est lié à S, donc on a d'autre part $\frac{d\vec{u}_z}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_z$. Ainsi, $\vec{\Omega} = \lambda \vec{u}_z$.

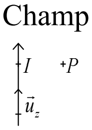
Comme $\vec{u}_r$ est lié à S, on a $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_r = \lambda \vec{u}_\theta$.

D'autre part, $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\dot{\theta} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$. Donc $\lambda = \dot{\theta}$.

Ainsi, $\boxed{\vec{\Omega} = \dot{\theta}.\vec{u}_z}$.

Remarque : On retrouve le fait que $\vec{\Omega}$ est un pseudo–vecteur (dépend de l'orientation choisie)

Champ des vitesses :



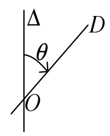
$$\vec{v}(P) = \underbrace{\vec{v}(I)}_{\vec{0}} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{IP} = \dot{\theta}.\vec{u}_z \wedge (r.\vec{u}_r + (z_p - z_I)\vec{u}_z) = r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta \,.$$

Remarque :

De même que pour la translation, le mouvement de rotation n'a de sens que pour un solide.

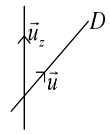
3) Mouvement de précession

- Définition :



C'est un mouvement pour lequel $\theta = \text{cte}$.
Ainsi, *D* va décrire une portion de cône.

- Equation du mouvement de précession :



$\|\vec{u}_z\| = 1$, $\|\vec{u}\| = \text{cte}$.
Pour un mouvement de précession :
Comme $\vec{u}$ est lié à *D*, on a $\boxed{\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}} = \dot{\theta}.\vec{u}_z \wedge \vec{u}$.
Inversement, si $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$ où $\vec{\Omega}$ est de direction fixe, on a :
- $\|\vec{u}\| = \text{cte}$ puisque alors $\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{u} \cdot \vec{\Omega} \wedge \vec{u} = 0$, soit $\vec{u}^2 = \text{cte}$.
- On note $\vec{\Omega} = \Omega.\vec{u}_z$:

Ainsi, $\vec{u}_z \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0$, donc $\frac{d(\vec{u} \cdot \vec{u}_z)}{dt} = 0$, soit $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}_z}) = \text{cte}$.
Ainsi, $\vec{u}$ est en mouvement de précession autour de $\vec{u}_z$.

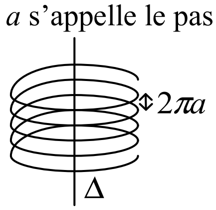
Vocabulaire :
« Précession » vient de « précéder », qui signifie « tomber en avant »…
On trouver parfois « précesser » ou « précessionner » pour un mouvement de précession.

C) Mouvement hélicoïdal

1) Définition

C'est un mouvement composé d'une rotation autour d'un axe Δ et d'une translation parallèle à Δ :
Le solide à un instant *t* se déduit du solide initial par :
- Une rotation d'angle θ autour de Δ.
- Une translation de vecteur $\vec{\lambda} = a\theta.\vec{u}_z$ (où Δ est dirigé par $\vec{u}_z$)

a s'appelle le pas réduit de l'hélice, Δ l'axe de rotation et de glissement :



2) Propriétés

- Trajectoire hélicoïdale :

Même axe Δ, même pas.

- $\vec{\Omega} = \dot{\theta}.\vec{u}_z$ (même démonstration que pour une rotation)
- Vitesse d'un point sur l'axe :

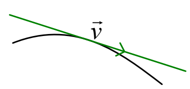
$\vec{\lambda} = a.\theta.\vec{u}_z$, donc $\vec{v} = a.\theta.\vec{u}_z = a.\vec{\Omega}$. Donc l'axe est l'axe central du torseur.

a dépend de l'orientation choisie :

Pour un pas de vis, on a $a > 0$ (correspond au sens dans lequel on tourne pour visser en général)

D) Mouvement quelconque

1) Préliminaire – mouvement d'un point matériel



Mouvement rectiligne uniforme tangent : c'est le mouvement qui a la même vitesse et la même position à l'instant t_0 mais dont l'accélération est nulle.

2) Mouvement d'un solide

A t_0, le champ des vitesses est caractérisé par :

- $\vec{\Omega}(t_0)$
- l'axe central du torseur, c'est-à-dire le lieu des points I tels que $\vec{v}(I) // \vec{\Omega}(t_0)$
- $\vec{v}(I)$ pour un point I de l'axe central.

C'est aussi le champ des vitesses d'un certain mouvement hélicoïdal.

Ainsi, à tout instant, le champ des vitesses du solide peut être considéré comme celui d'un mouvement hélicoïdal (appelé mouvement hélicoïdal tangent).

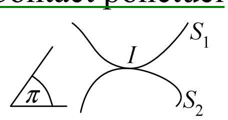
(Mais ce champ n'a pas le même champ d'accélération).

Ainsi, $\vec{\Omega}$ représente le vecteur instantané de rotation du mouvement hélicoïdal tangent.

V Mouvement de deux solides en contact

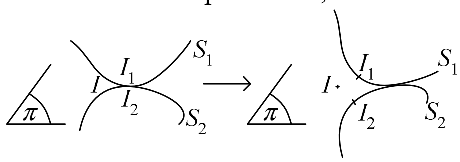
On considère ici des solides physiques idéaux.

A) Contact ponctuel



Le point I peut être considéré en tant que point fixe de π, mais aussi en tant que point lié à S_1 ou à S_2.

Si on considère que $I \in S_1$, on le note I_1.
Si on considère que $I \in S_2$, on le note I_2.
Si on considère que $I \in R$, on le note *I*.



B) Caractérisation du mouvement de S_1 par rapport à S_2.

On prend *R* absolu, S_2 relatif.
On doit donner $\vec{\Omega}_r$, $\vec{v}_r(I_1)$ pour obtenir le mouvement (relatif) de S_1 / S_2.

C) Glissement de S_1 / S_2.

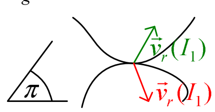
1) Vitesse de glissement de S_1 / S_2.

- Définition :

$\boxed{\vec{v}_g = \vec{v}_r(I_1)}$

- Propriétés :

$\vec{v}_g \in \pi$. En effet, supposons que $\vec{v}_g \notin \pi$. On a alors deux cas :



A l'instant d'après :
– Le solide n'est plus en contact.
– Le solide pénètre dans l'autre.
Dans les deux cas c'est impossible puisque les solides sont en contact, et qu'ils sont indéformables.

- Expression en fonction des vitesses absolues :

$\vec{v}_r(I_1) = \vec{v}_a(I_1) - \vec{v}_a(I_2)$.
(on a en effet $\vec{v}_a(I_1) = \vec{v}_r(I_1) + \vec{v}_a(\text{point coïncidant de } I_1) = \vec{v}_r(I_1) + \vec{v}_a(I_2)$)
Donc $\boxed{\vec{v}_g = \vec{v}_a(I_1) - \vec{v}_a(I_2)}$.

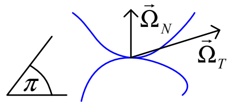
2) Condition de non glissement

Il n'y a pas glissement lorsque $\boxed{\vec{v}_g = \vec{0}}$.

Pas de glissement Glissement

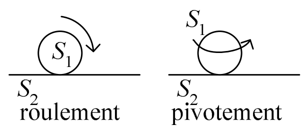
D) Roulement et pivotement

On a $\vec{\Omega}_r = \vec{\Omega}_{S_1/S_2}$.



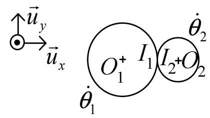
Ainsi, $\vec{\Omega}_r = \vec{\Omega}_N + \vec{\Omega}_T$ où $\vec{\Omega}_T \in \pi$ et $\vec{\Omega}_N \perp \pi$.

$\vec{\Omega}_N$ est la composante de pivotement, $\vec{\Omega}_T$ celle de roulement :



E) Applications

1) Première application



On suppose qu'il n'y a pas de glissement.

Quelle relation y a-t-il entre $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$?

On a $\vec{v}(I_1) = \vec{v}(I_2)$,

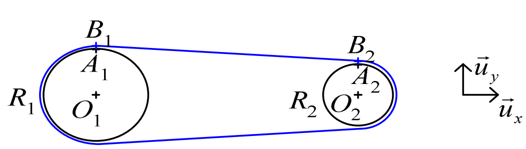
Soit $\vec{v}(O_1) + \overrightarrow{I_1O_1} \wedge \vec{\Omega}_1 = \vec{v}(O_2) + \overrightarrow{I_2O_2} \wedge \vec{\Omega}_2$

Donc $-R_1.\vec{u}_x \wedge \dot{\theta}_1\vec{u}_z = R_2.\vec{u}_x \wedge \dot{\theta}_2\vec{u}_z$,

d'où $\boxed{R_1\dot{\theta}_1 = -R_2\dot{\theta}_2}$.

En intégrant, on obtient $R_1\Delta\theta_1 = -R_2\Delta\theta_2$, ce qui signifie que la longueur parcourue dans un intervalle de temps est égale pour les deux roues.

2) Deuxième application



On suppose que le fil est inextensible et qu'il ne glisse pas sur les roues :

Comme il n'y a pas de glissement, $\vec{v}(A_1) = \vec{v}(B_1)$, $\vec{v}(A_2) = \vec{v}(B_2)$.

Comme le fil est inextensible (et B_1, B_2 sont sur le même segment), on a aussi $\vec{v}(B_1) = \vec{v}(B_2)$.

Enfin, d'après la formule de Varignon,

$$\vec{v}(A_1) = \vec{v}(O_1) + \overrightarrow{A_1O_1} \wedge \dot{\theta}_1\vec{u}_z = -R_1\dot{\theta}_1\vec{u}_x \qquad \vec{v}(A_2) = \vec{v}(O_2) + \overrightarrow{A_2O_2} \wedge \dot{\theta}_2\vec{u}_z = -R_1\dot{\theta}_1\vec{u}_x$$

Donc $\boxed{R_1\dot{\theta}_1 = R_2\dot{\theta}_2}$.