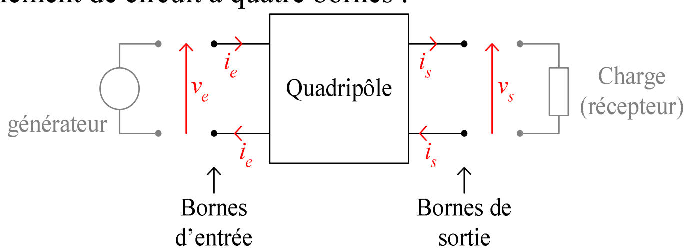
Chapitre 4 : Quadripôles, fonctions de transfert, filtres

I Quadripôle électrocinétique

A) Définition

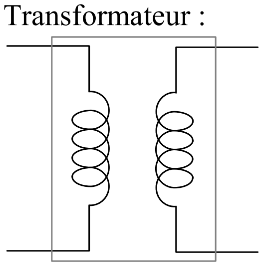
Elément de circuit à quatre bornes :



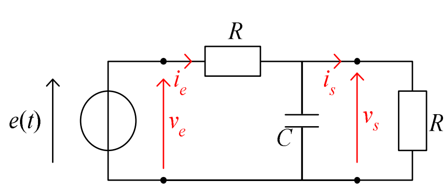
Quadripôle passif : pas de source auxiliaire de puissance électrique.
Quadripôle actif : présence d'une source auxiliaire de puissance.
Le fonctionnement électrique du quadripôle est caractérisé par :
v_e, v_s : tension d'entrée, de sortie du quadripôle
i_e, i_s : courant d'entrée, de sortie du quadripôle
Un quadripôle est dit linéaire lorsqu'il est constitué uniquement de dipôles et éléments de circuit linéaires.

B) Exemples de quadripôles

Transformateur :

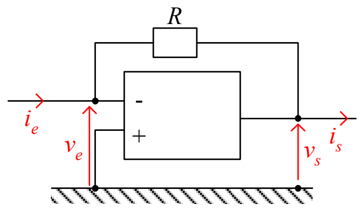


(passif)



(passif)

Montage à amplificateur opérationnel (A.O)



(actif)

II Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire en $\mathrm{RSF}(\omega)$.

$$\underline{v_e} = \underline{V_e} e^{j\omega.t} \qquad \underline{i_e} = \underline{I_e} e^{j\omega.t}$$
$$\underline{v_s} = \underline{V_s} e^{j\omega.t} \qquad \underline{i_s} = \underline{I_s} e^{j\omega.t}$$

A) Fonction de transfert (Transmittance)

Définition :

$\underline{H}(j\omega)$ (fonction de transfert) $= \dfrac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \dfrac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$ (amplification en tension)

ou $\dfrac{\underline{i_s}}{\underline{i_e}} = \dfrac{\underline{I_s}}{\underline{I_e}}$ (amplification en courant)

ou $\dfrac{\underline{V_s}}{\underline{I_e}}$ (Transimpédance)

ou $\dfrac{\underline{I_s}}{\underline{V_e}}$ (Transadmittance)

$\left(\dfrac{\text{fonction d'entrée}}{\text{fonction de sortie}}\right)$

Attention : $\underline{H}$ dépend du quadripôle et du reste du circuit.

$\underline{H}(j\omega) = |\underline{H}(j\omega)| e^{j\arg(\underline{H}(j\omega))} = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$

$G(\omega)$: gain du quadripôle.

$\varphi(\omega)$: avance de phase de la sortie sur l'entrée.

On définit le gain en décibel : $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log_{10}(G(\omega))$

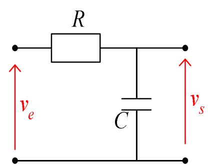
III Diagramme de Bode

A) Définition

Consiste à tracer les graphes G_{dB} et φ en fonction de $\log_{10}(\omega/\omega_0)$, où ω_0 est soit une pulsation caractéristique du circuit, soit $\omega_0 = 1\mathrm{rad.s}^{-1}$. On peut aussi tracer en fonction de ω sur un papier millimétré en échelle logarithmique. (unité : décade).

B) Exemple : circuit *R*,*C* et *C*,*R*

Circuit *R*,*C* :



Source : $v_e = V_e \cos(\omega . t + \varphi)$

Charge : circuit ouvert ($i_s = 0$)

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_R}} \text{ (diviseur de tension)}$$

$\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$. On pose $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$

Donc $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

Ainsi, $G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$; $\varphi(\omega) = -\arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$

Diagramme de Bode :

En basse fréquence ($\omega << \omega_0$) :

$\lim\limits_{\omega \to 0} G(\omega) = 1$ donc $\lim\limits_{\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \to -\infty} G_{\text{dB}} = 0$. On a donc une asymptote horizontale en $-\infty$.

$\lim\limits_{\omega \to 0} \varphi(\omega) = 0$ donc $\lim\limits_{\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \to -\infty} \varphi(\omega) = 0$. On a aussi une asymptote horizontale.

En haute fréquence ($\omega >> \omega_0$) :

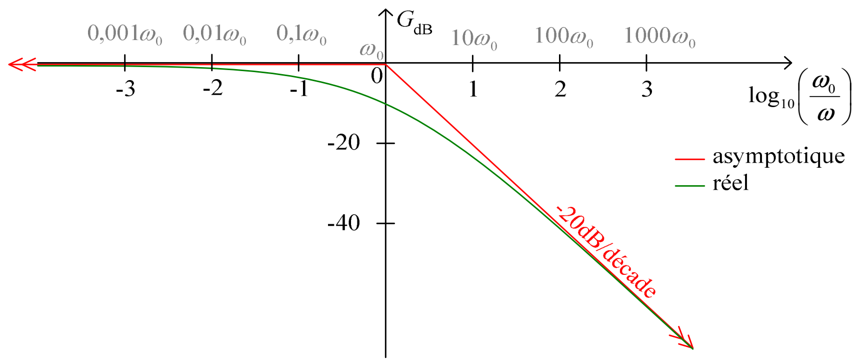
$$G(\omega) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\omega}{\omega_0}$$

Donc $\lim\limits_{\omega \to +\infty} \left(\log(G\omega) - \log\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right) \right) = 0$

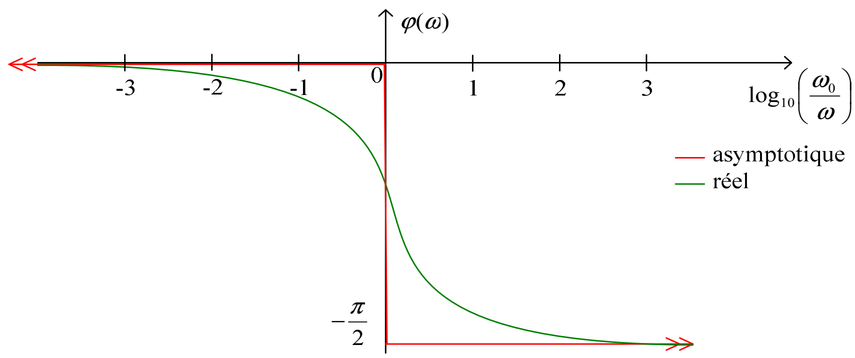
Soit $\lim\limits_{\omega \to +\infty} \left(\underbrace{G_{\text{dB}}(\omega)}_{Y} - (-20 \log \underbrace{\frac{\omega_0}{\omega}}_{X}) \right) = 0$

On a une asymptote d'équation $Y = -20X$ (soit $G_{\text{dB}}(\omega) = -20 \log \dfrac{\omega_0}{\omega}$) en $+\infty$.

$\lim\limits_{\omega \to +\infty} \varphi(\omega) = -\dfrac{\pi}{2}$. On a donc une asymptote horizontale en $+\infty$

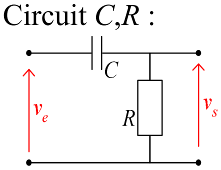


$$G(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{\text{dB}}(\omega_0) = -3\text{dB}$$



$$\varphi(\omega_0) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$$

Circuit C,R :



Source : $v_e = V_e \cos(\omega.t + \varphi)$

Charge : R_∞.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \text{, avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$G(\omega) = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

En basse fréquence ($\omega << \omega_0$) :

$$G(\omega) \underset{0}{\sim} \frac{\omega}{\omega_0}$$

Donc $\lim_{\omega \to 0}\left(G_{\mathrm{dB}}(\omega) - 20\log\frac{\omega_0}{\omega} \right) = 0$

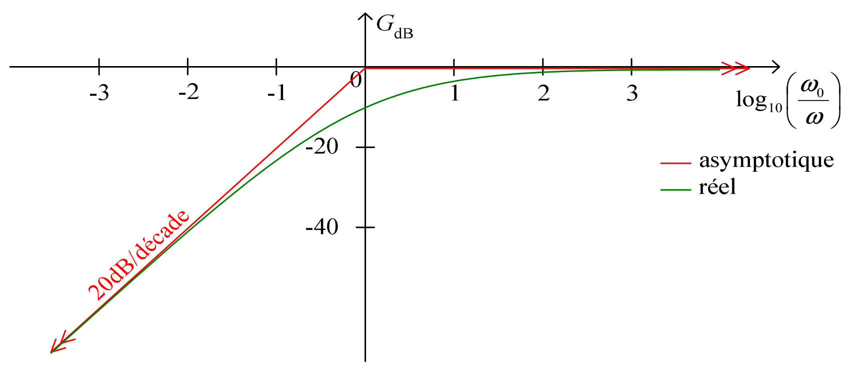
On a une asymptote d'équation $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log\frac{\omega_0}{\omega}$ en $-\infty$.

$$\lim_{\omega \to 0} \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

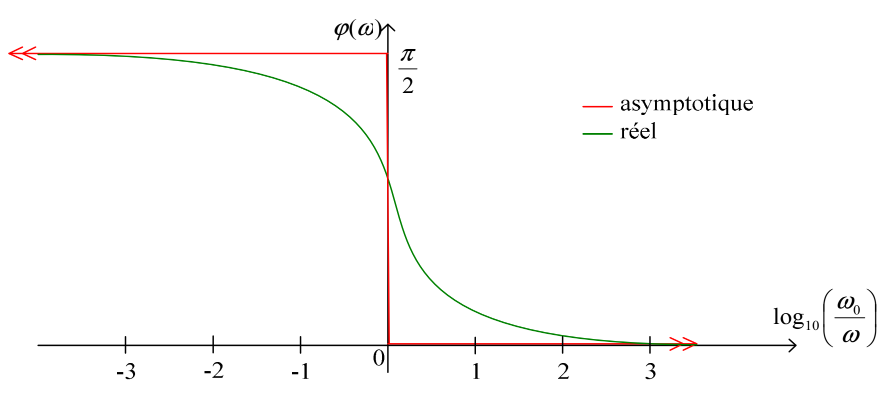
En haute fréquence ($\omega >> \omega_0$) :

$G(\omega) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\omega/\omega_0}{\omega/\omega_0} \underset{+\infty}{\sim} 1$. Donc $\lim_{\omega \to +\infty} G(\omega) = 1$; $\lim_{\omega \to +\infty} G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 0$

$$\lim_{\omega \to +\infty} \varphi(\omega) = 0$$



Pour $\varphi(\omega)$, c'est le même que le précédent décalé de $\pi/2$ vers le haut :



C) Diagramme de Bode asymptotique

Définition du diagramme de Bode asymptotique : c'est la réunion des asymptotes haute fréquence et basse fréquence. (Le diagramme de Bode asymptotique est très proche du réel.) Remarque : on peut avoir plusieurs domaines de fréquences (haute fréquence, basse fréquence et intermédiaire).

IV Filtres du 1er ordre

A) Décomposition en série de Fourier

Soit F de période T (pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$). Alors, d'après le théorème de Fourier :

$$\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \exists (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, \forall t \in \mathbb{R}, F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\omega.n.t) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(\omega.n.t)$$

On a :

$$a_0 = \langle F(t) \rangle_t$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^t F(t')\cos(\omega.n.t')dt'$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^t F(t')\sin(\omega.n.t')dt'$$

Notation compacte :

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\omega.n.t + \varphi_n) \ \ (a_0 = C_0 \cos\varphi_0)$$

Terme 0 : valeur moyenne
Terme n : harmonique de rang n de la décomposition de Fourier.
Exemple : le son d'un instrument de musique

$$F(t) = \underbrace{C_1 \cos(\omega.t + \varphi_1)}_{\substack{\text{fondamental} \\ = \text{hauteur de la note}}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega.n.t + \varphi_n)}_{\substack{\text{harmoniques, donnent} \\ \text{le "timbre" de la note}}}$$

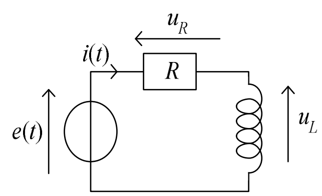
Si F n'est pas périodique, on a toujours une décomposition, appelée « transformée de Fourier » (mais éventuellement avec une intégrale au lieu de la somme)

Exemple : décomposition spectrale de la lumière :

$$\underbrace{F(t)}_{\substack{\text{onde lumineuse} \\ \text{en un point}}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\omega.n.t + \varphi_n)}_{\substack{\text{composantes monochromatiques} \\ \text{de } F(t)}}$$

B) Théorème de superposition

Un circuit linéaire correspond à la donnée d'équations (différentielles) linéaires.



$$e(t) = u_R + u_L = Ri(t) + L\frac{di}{dt}$$
$$e_1(t) \to i_1(t)$$
$$e_2(t) \to i_2(t)$$
$$e_1(t) + e_2(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} \Leftrightarrow i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

Théorème de superposition : pour calculer la réponse à $e(t) = e_1(t) + e_2(t)$, il suffit de sommer les réponses à chacune des excitations prises individuellement (valable non seulement pour des sommes, mais aussi pour des combinaisons linéaires).

Conséquence : pour $e(t)$, excitation périodique ou non, la série/transformée de Fourier donne $e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos(\omega.n.t + \varphi_n)$

On trouve alors la réponse $i_n(t)$, pour chaque *n*, à $E_n \cos(\omega.n.t + \varphi_n)$. Dans ce cas, $\underline{I}_n = \frac{\underline{E}_n}{R + jn\omega L}$, soit $i_n(t) = |\underline{I}_n| \cos(\omega.n.t + \arg(\underline{I}_n))$

Donc $i_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |\underline{I}_n| \cos(\omega.n.t + \arg(\underline{I}_n))$

C) Définition et classification d'un filtre

Un filtre est un quadripôle linéaire.

Bande passante du filtre :

$$BP = \left\{\omega, G(\omega) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}\right\} = \left\{\omega, G_{\mathrm{dB}}(\omega) \geq G_{\mathrm{dB}}^{\max} - 3\mathrm{dB}\right\}$$

Un filtre est dit :

Passe-bas si la bande passante est de la forme $[0;\omega_1]$.

Passe-haut si la bande passante est de la forme $[\omega_1;+\infty[$.

Passe-bande si la bande passante est de la forme $[\omega_1;\omega_2]$

Coupe-bande si la bande passante est de la forme $[0;\omega_1] \cup [\omega_2;+\infty[$

Pour un quadripôle linéaire, $\underline{H}(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}$, où *P* et *Q* sont des polynômes de degré $\leq n$; *n* désigne alors l'ordre du filtre.

Exemple : passe-bas

$$v_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\omega.n.t + \varphi_n) \quad ; \quad v_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C'_n \cos(\omega.n.t + \varphi'_n)$$

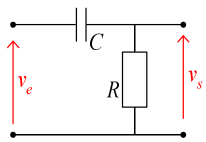
$$G(n\omega) = \frac{C'_n}{C_n}$$

Pour $\omega << \omega_1$, C'_n et C_n sont comparables (les basses fréquences sont transmises)

Pour $\omega >> \omega_1$, $C'_n << C_n$ (les hautes fréquences sont atténuées)

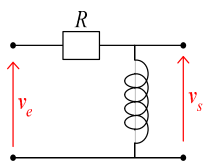
D) Filtres passe-haut : R,L et C,R

1) Fonction de transfert



Charge : sortie ouverte.

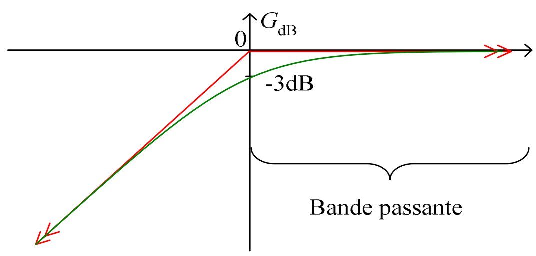
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$



Charge : sortie ouverte.

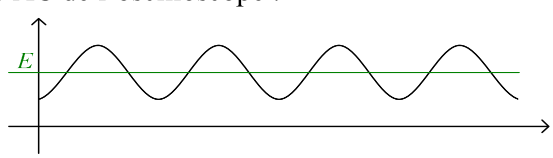
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega L/R}{1 + j\omega L/R} = \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{R}{L}$$

On a donc un filtre du premier ordre.



2) Application

Touche AC de l'oscilloscope :



La touche AC est un filtre passe-haut

$$v_e(t) = E + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega.n.t + \varphi_n)$$

$$\updownarrow = \langle v_e \rangle$$

$$v_s(t) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega.n.t + \varphi_n) = v_e(t) - E$$

3) Comportement pseudo dérivateur

Si $\omega << \omega_0$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega/\omega_0}{1+j\omega/\omega_0} \sim j\frac{\omega}{\omega_0}$$

ou $\underline{V_s} = j\frac{\omega \underline{V_e}}{\omega_0}$ soit $v_s(t) = \frac{1}{\omega_0}\frac{dv_e}{dt}$ (en RSF(ω))

Pour une fonction périodique quelconque :

$$v_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\omega.n.t + \varphi_n) \quad (\omega = \frac{2\pi}{T})$$

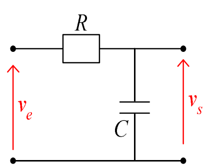
Donc $v_s(t) = \sum_{\substack{n \text{ tq} \\ n\omega << \omega_0}} \frac{1}{\omega_0}\frac{d(C_n\cos(\omega.n.t+\varphi_n))}{dt} + \sum_{\text{autres}} \frac{1}{\omega_0}\frac{d(C_n\cos(\omega.n.t+\varphi_n))}{dt}$

Si la plupart des composantes de Fourier de v_e sont dans le domaine atténué ($n\omega << \omega_0$), alors $v_s(t) \approx \frac{1}{\omega_0}\frac{dv_e(t)}{dt}$

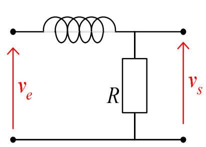
E) Filtres passe-bas

1) Fonction de transfert

En sortie ouverte :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega} = \frac{1}{1+j\omega/\omega_0}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$



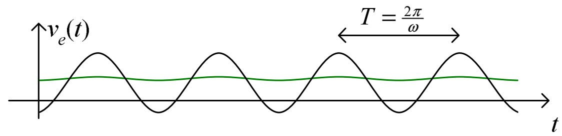
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R+j\omega L} = \frac{1}{1+j\omega/\omega_0}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{R}{L}.$$

Pulsation de coupure :

$$\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad \left|\underline{H}(j\omega)\right|_{\max} = 1. \quad \left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \omega = \omega_0$$

On a donc un filtre passe-bas, de bande passante $[0;\omega_0]$

2) Application : redressement



On utilise un filtre passe-bas $\omega_0 << \omega$

$$v_e(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega . n . t + \varphi_n)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow^{\approx}$$

$$v_s(t) = C_0 \qquad + \quad 0$$

$(\underline{H}(0) = 1)$

3) Comportement pseudo-intégrateur

En $\mathrm{RSF}(\omega)$, pour $\omega >> \omega_0$:

$$\underline{H}(j\omega) \sim \frac{1}{j\omega / \omega_0} \sim \frac{\omega_0}{j\omega}$$

Donc $\underline{V_s} = \dfrac{\omega_0 \underline{V_e}}{j\omega}$. Donc $v_s(t) = \omega_0 \displaystyle\int_{t_0}^{t} v_e(t')dt'$

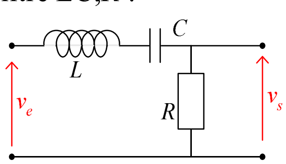
Pour un signal périodique ($T = \dfrac{2\pi}{\omega}$) de moyenne nulle :

$$v_e(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega . n . t + \varphi_n) \quad (C_0 = 0)$$

avec $\omega >> \omega_0$, $v_s(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \omega_0 \int_{t_0}^{t} C_n \cos(\omega . n . t' + \varphi_n) dt' = \omega_0 \int_{t_0}^{t} v_e(t')dt'$

F) Exemple de filtre du 2nd ordre

Filtre *LC,R* :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}$$

Etude du diagramme de Bode :

En basse fréquence, $|\underline{Z_C}| >> R$ et $|\underline{Z_C}| >> |\underline{Z_L}|$

C'est-à-dire $RC\omega << 1 \Leftrightarrow \omega << \frac{1}{RC} = \omega_1$ et $\frac{1}{C\omega} >> L\omega \Leftrightarrow \omega << \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\underline{H}(j\omega) \sim \frac{R}{\frac{1}{jC\omega}} \sim j\frac{\omega}{\omega_1}$$

Donc $G_{\mathrm{dB}}(\omega) \sim 20\log\frac{\omega}{\omega_1}$.

Donc $G_{\mathrm{dB}}(\omega)$ a une asymptote d'équation $G_{\mathrm{dB}} = 20\log\frac{\omega}{\omega_1}$

En haute fréquence, $|\underline{Z_L}| >> R$ et $|\underline{Z_L}| >> |\underline{Z_C}|$

De même, avec $\omega_2 = \frac{R}{L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\underline{H}(j\omega) \sim \frac{R}{j\omega L} \sim \frac{1}{j\omega/\omega_2}$

Donc $G_{\mathrm{dB}}(\omega)$ a une asymptote d'équation $G_{\mathrm{dB}} = -20\log\frac{\omega}{\omega_2}$

Comparaison des pulsations :

$$\omega_1\omega_2 = \frac{1}{RC}\times\frac{R}{L} = \omega_0^2$$

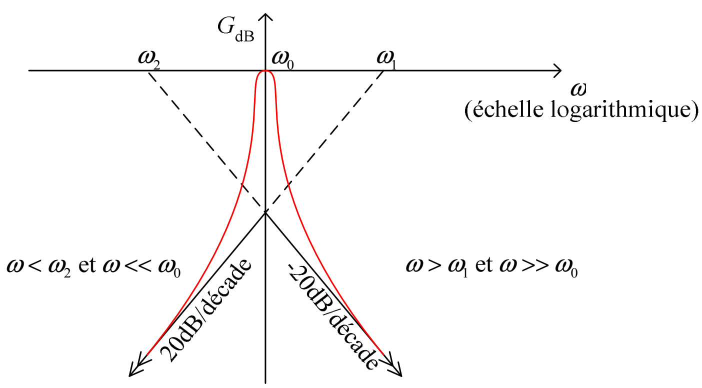
Donc $\log_{10}\omega_0 = \frac{\log_{10}\omega_1 + \log_{10}\omega_2}{2}$

$$\omega_1/\omega_2 = \frac{1}{RC}\times\frac{L}{R} = \frac{L^2}{R^2LC} = \frac{L^2\omega_0^2}{R^2} = Q^2$$

Si $Q > 1$, $\omega_2 < \omega_0 < \omega_1$

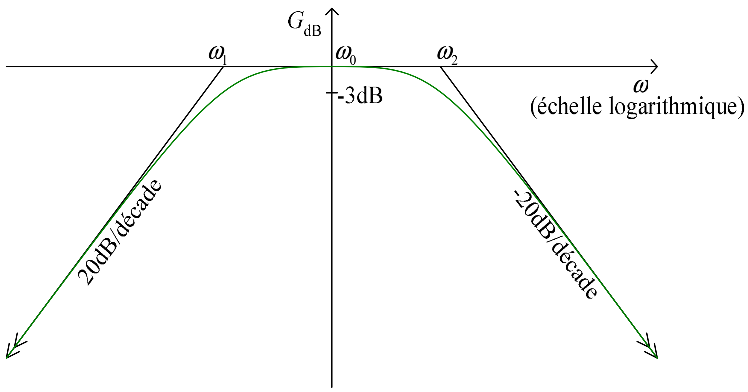
Si $Q < 1$, $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$

Cas $Q >> 1$:



Le gain est maximum quand $\omega = \omega_0$, $G(\omega_0) = 1$. On a un filtre passe bande (très sélectif : la bande est très petite)

Cas $Q < 1$:



pour les fréquences intermédiaires : $G_{dB} \approx 0$

Bande passante $\approx [\omega_1 ; \omega_2]$