Chapitre 5 : Corps (Commutatifs)

I Définition

Soit $\mathbb{K}$ un ensemble muni de deux lois + et $\times$.

On dit que $(\mathbb{K},+,\times)$ est un corps (au sens corps commutatif) lorsque :

- $(\mathbb{K},+)$ est un groupe commutatif (de neutre noté $0_{\mathbb{K}}$)
- $(\mathbb{K}\setminus\{0_{\mathbb{K}}\},\times)$ est un groupe commutatif (de neutre noté $1_{\mathbb{K}}$)
- $\times$ est distributive sur $+$.

Ainsi, cela revient à dire que $(\mathbb{K},+,\times)$ est un corps lorsque $(\mathbb{K},+,\times)$ est un anneau commutatif non réduit à $\{0_{\mathbb{K}}\}$ et tout élément de $\mathbb{K}\setminus\{0_{\mathbb{K}}\}$ admet un inverse pour la loi $\times$.

Exemple :

$(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des corps.

II Sous corps

Soit $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps et soit L une partie de $\mathbb{K}$. On dit que L est un sous corps de $\mathbb{K}$ lorsque :

- L est stable par $+$ et $\times$.
- $\forall x\in L,(-x)\in L$ et $\forall x\in L\setminus\{0_{\mathbb{K}}\},x^{-1}\in L$
- $1_{\mathbb{K}}\in L$

Proposition :

Si L est un sous corps d'un corps $(\mathbb{K},+,\times)$, alors $+$ et $\times$ constituent des lois de composition internes sur L, et $(L,+,\times)$ est un corps.

Exemple :

$\mathbb{R}$ est un sous corps de $(\mathbb{C},+,\times)$.

III Un calcul dans un corps : somme de termes en progression géométrique

Soit $(\mathbb{K},+,\times)$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Soit $q\in\mathbb{K}$

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q, c'est-à-dire :

$\forall n\in\mathbb{N},u_{n+1}=qu_n$

Soit $n\in\mathbb{N}$, et soit $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$.

Alors :

Si $q=1_{\mathbb{K}}$, $S_n=(n+1).u_0$

Si $q\neq 1_{\mathbb{K}}$, $S_n=(u_0-u_{n+1})(1-q)^{-1}$

IV Morphisme de corps

C'est la même chose qu'un morphisme d'anneaux.

Remarque :

La clause (3) de la définition d'un morphisme d'anneau de A vers B qui demande que l'image de 1_A soit 1_B peut être oubliée lorsque A et B sont des corps, car elle est alors conséquence de (1) et (2).

V Corps des fractions d'un anneau intègre

Théorème et définition (admis) :

Soit $(A,+,\times)$ un anneau *intègre*.

Alors il existe un corps $(\mathbb{K},+,\times)$, unique à isomorphisme près, tel que :

- $(A,+,\times)$ est un sous anneau de $(\mathbb{K},+,\times)$ (autrement dit, A est inclus dans K et les lois + et × sur $\mathbb{K}$ prolongent les lois + et × sur A)
- Tout élément x de $\mathbb{K}$ s'écrit $x = ab^{-1}$ avec $a \in A$, $b \in A \setminus \{0\}$

On dit alors que $\mathbb{K}$ est le corps des fractions de A.

Exemple :

$\mathbb{Q}$ est le corps des fractions de $\mathbb{Z}$.