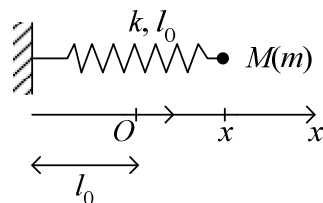


Chapitre 5 : Oscillateur mécanique en régime forcé

I Equation différentielle du mouvement de l'oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé

A) Mise en équation



x est l'élongation du ressort $= l - l_0$

Bilan des forces sur M :

- Tension du ressort $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{i} = -kx\vec{i}$
- Frottement visqueux $\vec{F}_v = -\mu \times \vec{v}_{/(R_{lab})} = -\mu \times \dot{x}\vec{i}$ (O fixe dans (R_{lab}))
- Force excitatrice sinusoïdale $\vec{F}_e = F_e \cos(\Omega t) \times \vec{i}$

Relation fondamentale de la dynamique appliquée à M dans (R_{lab}) galiléen :

$$m\vec{a}_{M/R_{lab}} = \vec{T} + \vec{F}_v + \vec{F}_e$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + F_e \cos(\Omega t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_e}{m} \cos(\Omega t)$$

$$\text{On pose } \begin{cases} 2\lambda = \frac{\mu}{m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda = \frac{\mu}{m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_e}{m} \cos(\Omega t)$$

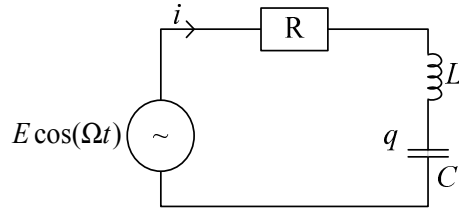
Rappel :

λ est le coefficient d'amortissement $[\lambda] = s^{-1}$

ω_0 est la pulsation propre $[\omega_0] = \text{rad.s}^{-1}$

Q est le facteur de qualité $[Q] = 1$

B) Analogie électrocinétique



Équation de maille :

$$E \cos(\Omega t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{c} \quad \text{avec } i = \frac{dq}{dt}$$

$$\text{donc } \ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L} \cos(\Omega t)$$

| | | | | | | |
|------------------|-----|-----|-----|-------|-------|-------|
| Electrocinétique | q | i | L | $1/C$ | R | E |
| Mécanique | x | v | m | k | μ | F_e |

C) Solution de l'OHA excité par une force sinusoïdale

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_e}{m} \cos(\Omega t)$$

Solution générale $x(t) = \text{SGH} + \text{SP}$

Equation homogène = équation différentielle d'un OHA

- Solution générale homogène :

$$\begin{cases} Q > \frac{1}{2} : \text{régime pseudo - périodique} \\ Q = \frac{1}{2} : \text{régime critique} \\ Q < \frac{1}{2} : \text{régime apériodique} \end{cases}$$

→ Solution exponentiellement décroissante, $T_x = 1/\lambda$ (régime transitoire)

- Solution particulière : on choisit l'unique solution particulière périodique à la pulsation Ω , appelée régime sinusoïdal forcé ou régime permanent sinusoïdal.

$$x_{\text{RSF}} = X \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\rightarrow x(t) = x_{\text{SGH}} + x_{\text{RSF}}$$

II Résonance d'élongation

A) Solution du RSF(Ω)

On cherche une solution $x(t) = X \cos(\Omega t + \varphi)$

$$\text{Donc } \underline{x}(t) = X e^{j(\Omega t + \varphi)} = X e^{j\varphi} \times e^{j\Omega t} = \underline{X} e^{j\Omega t}$$

$$\begin{aligned}
x \text{ solution de l'ED} &\Leftrightarrow -\Omega^2 \underline{x} + \frac{\omega_0}{Q} j\Omega \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = \frac{F_e}{m} e^{j\Omega t} \\
&\Leftrightarrow -\Omega^2 \underline{X} + \frac{\omega_0}{Q} j\Omega \underline{X} + \omega_0^2 \underline{X} = \frac{F_e}{m} \\
&\Leftrightarrow \underline{X} = \frac{F_e}{m} \times \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + j \frac{\omega_0 \Omega}{Q}} = \frac{F_e / (m\omega_0^2)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\Omega / \omega_0}{Q}} \\
&\Leftrightarrow \underline{X} = \frac{F_e / (m\omega_0^2)}{1 - y^2 + j \frac{y}{Q}} \quad \text{avec } y = \frac{\Omega}{\omega_0}
\end{aligned}$$

Ainsi $x(t) = |\underline{X}| \cos(\Omega t + \text{Arg} \underline{X})$

$$|\underline{X}| = X = \frac{F_e / (m\omega_0^2)}{\sqrt{(1 - y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2}}}$$

$$\text{Arg} \underline{X} = -\text{Arg}(1 - y^2 + j \frac{y}{Q}) = \begin{cases} -\text{Arctan} \frac{y/Q}{1 - y^2} & \text{si } y < 1 (y \geq 0) \\ \pi - \text{Arctan} \frac{y/Q}{1 - y^2} & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

B) Résonance d'élongation

Etude de $X(\Omega)$ ou $X(y)$ (analogue de l'étude de $U_c(\Omega)$, tension aux bornes du condensateur)

$$X(y) = \frac{F_e / (m\omega_0^2)}{\sqrt{(1 - y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2}}}, \quad y \in \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} X(y) = \frac{F_e}{m\omega_0^2} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} X(y) = 0$$

Les y tels que $X(y)$ soit un extremum sont exactement les y tels que $\underbrace{(1 - y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2}}_{f(y)}$ soit un extremum.

On a :

$$\begin{aligned}
f'(y) = 0 &\Leftrightarrow 2(1 - y^2)(-2y) + \frac{2y}{Q^2} \Leftrightarrow y\left(\frac{1}{Q^2} - 2(1 - y^2)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad y = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (y \geq 0)
\end{aligned}$$

- Cas $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Leftrightarrow Q > 1/\sqrt{2}$

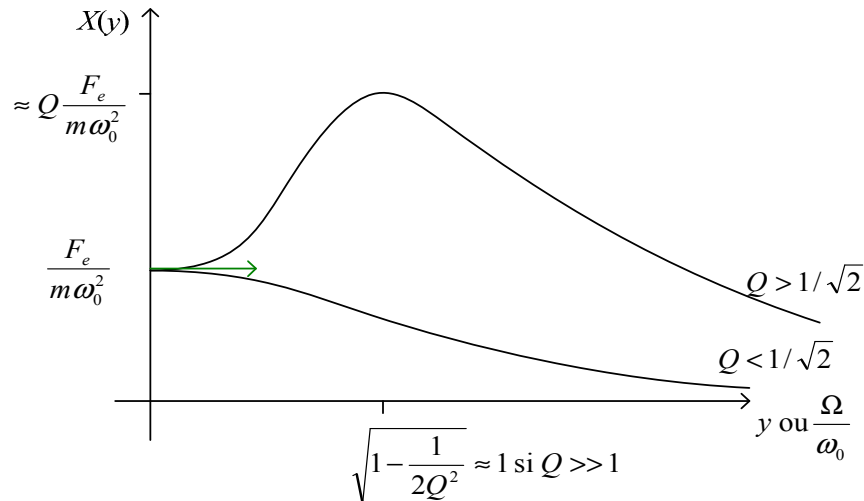
$y = 0$: Minimum relatif (tracer la courbe)

$$y = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} : \text{Maximum de } X(y)$$

$$\text{si } Q \gg 1, X_{\max} \approx Q \frac{F_e}{m\omega_0^2}$$

- Cas $1 - \frac{1}{2Q^2} < 0 \Leftrightarrow Q < 1/\sqrt{2}$

$y = 0$: Maximum de $X(y)$



Pulsations de coupure définies par $X(\Omega) = \frac{X_{\max}}{\sqrt{2}}$

Si Q est assez grand : deux solutions $\Omega_- < \Omega_{\text{résonance}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \Omega_+$

Largeur de bande passante = $\Omega_+ - \Omega_-$ et $\frac{\Omega_+ - \Omega_-}{\Omega_{\text{résonance}}} \approx \frac{1}{Q}$ si $Q \gg 1$

III Résonance de vitesse

A) Solution pour $v = \dot{x}$

$$x(t) = X \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\Omega X \sin(\Omega t + \varphi) = \Omega X \cos(\Omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$\text{ou } \underline{\dot{x}} = \underline{V} e^{j\Omega t} \text{ où } \underline{V} = j\Omega \underline{X}$$

Donc $V = \Omega X$ et $\text{Arg} \underline{V} = \text{Arg} \underline{X} + \pi/2$

$$V = \Omega X = \frac{F_e}{m\omega_0} \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2}}}$$

B) Etude de $V(y)$. Résonance de vitesse

Analogie de l'étude de la résonance d'intensité du RLC série

$$\lim_{y \rightarrow 0} V(y) = 0 \quad \lim_{y \rightarrow \infty} V(y) = 0$$

Si V admet un extremum en y , alors V^2 en admet un aussi en y

$$\text{On pose } f(y) = V(y)^2 \frac{1}{(F_e / (m\omega_0))^2} = \frac{y^2}{(1-y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2}}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(y) = 0 &\Leftrightarrow 2y \left((1-y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2} \right) - y^2 (2(1-y^2)(-2y) + 2y/Q^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2y \left((1-y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2} + 2(1-y^2)y^2 - \frac{y^2}{Q^2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2y(1-y^2)(1-y^2 + 2y^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = 1 \end{aligned}$$

On a donc un maximum de $V(\Omega)$ pour $\Omega = \omega_0$ ($y = 0$ est un minimum)

$$\text{Donc } V_{\max} = V(y = 1) = Q \frac{F_e}{m\omega_0}$$

$$\text{Pulsations de coupure } V(\Omega) = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V(\Omega)^2}{(F_e / (m\omega_0))^2} = \frac{V_{\max}^2}{2(F_e / (m\omega_0))^2} \Leftrightarrow \frac{y^2}{(1-y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2}} = \frac{Q^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \dots = Q^2(1-y^2)^2 \Leftrightarrow y = Q|1-y^2| = \varepsilon Q(1-y^2) \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1$$

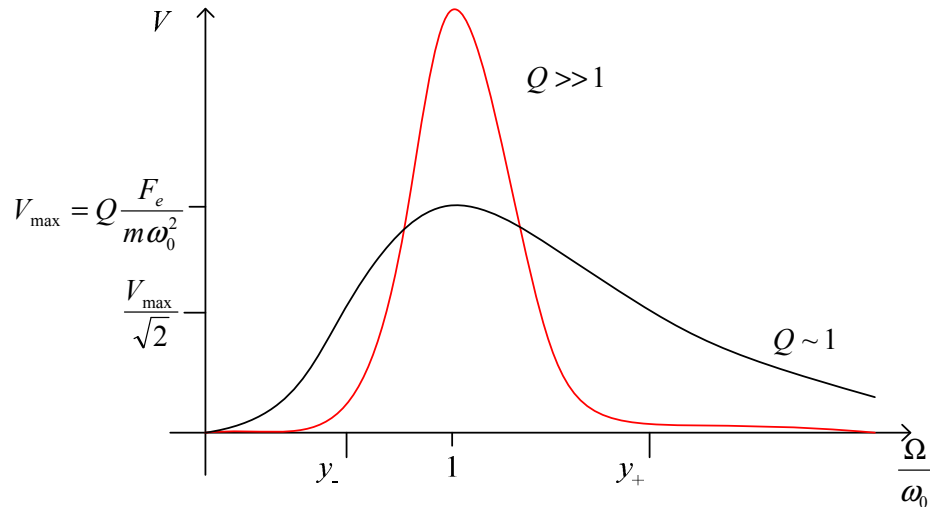
$$\Leftrightarrow y^2 + \frac{\varepsilon \times y}{Q} - 1 = 0 \quad (1/\varepsilon = \varepsilon)$$

$$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4$$

$$\text{Donc } y = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{\frac{-\varepsilon}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2}$$

$$y \geq 0 \text{ donc } y_- = \frac{\Omega_-}{\omega_0} = \frac{\frac{-1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2} \text{ et } y_+ = \frac{\Omega_+}{\omega_0} = \frac{\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2}$$

$$\frac{\Omega_+ - \Omega_-}{\omega_0} = y_+ - y_- = \frac{1}{Q} \quad (\forall Q)$$



IV Aspect énergétique

A) Résonance de puissance

Puissance p de la force de frottement :

$$p = \vec{F}_v \cdot \vec{v} = -\mu \times \vec{v} \cdot \vec{v} = -\mu \times v^2 = -\mu \times V \times \cos^2(\Omega t + \varphi + \pi/2)$$

(< 0)

$$\underbrace{\langle P_d \rangle}_{\text{puissance dissipée}} = \langle -p \rangle = \mu \times V^2 \times \frac{1}{2} \quad \left(\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2} \right)$$

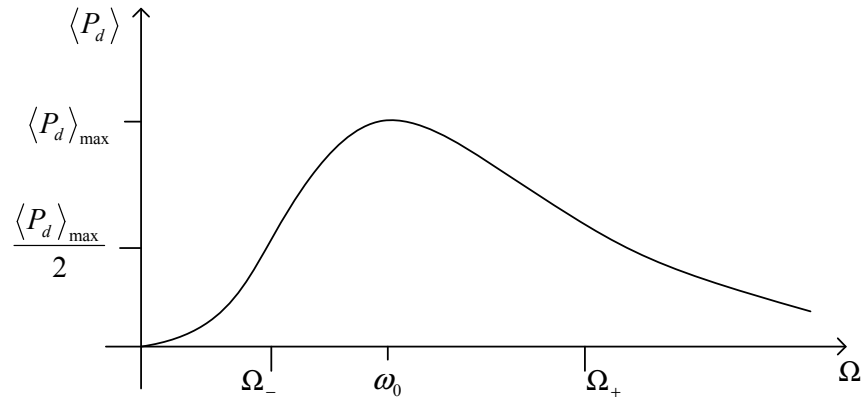
$$= \frac{1}{2} \mu \times \left(\frac{F_e}{m \omega_0} \right)^2 \frac{y^2}{(1-y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2}} \quad \text{avec } y = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

$$\langle P_d \rangle \text{ est maximale si } V \text{ est maximale, soit } \Omega = \omega_0 \text{ et } \langle P_d \rangle_{\max} = \frac{1}{2} \mu \times \left(\frac{F_e}{m \omega_0} \right)^2 Q^2$$

$$\langle P_d \rangle = \frac{\langle P_d \rangle_{\max}}{1 + Q^2 \frac{(1-y^2)^2}{y^2}} = \frac{\langle P_d \rangle_{\max}}{1 + Q^2 \left(\frac{1}{y} - y \right)^2}$$

$$\langle P_d \rangle(\Omega = 0) = \langle P_d \rangle(\Omega = +\infty) = 0$$

$$\langle P_d \rangle(\Omega_- \text{ ou } \Omega_+) = \frac{1}{2} \langle P_d \rangle_{\max}$$



B) Bilan énergétique

Théorème de l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,\text{élastique}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}mX^2\Omega^2 \sin^2(\Omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kX^2 \cos^2(\Omega t + \varphi)\end{aligned}$$

$$\langle \mathcal{E}_m \rangle = \frac{1}{4}mX^2\Omega^2 + \frac{1}{4}kX^2 = \frac{1}{4}mX^2\left(\Omega^2 + \frac{k}{m}\right) = \frac{1}{4}mX^2(\Omega^2 + \omega_0^2)$$

Théorème de l'énergie mécanique dans (R_{lab}) galiléen appliqué à M :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = P_{\bar{F}_v} + P_{\bar{F}_e}$$

$$\frac{d\langle \mathcal{E}_m \rangle}{dt} = \left\langle \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} \right\rangle = \langle P_{\bar{F}_v} \rangle + \langle P_{\bar{F}_e} \rangle$$

$$\langle \mathcal{E}_m \rangle = cte \left(= \frac{1}{4}mX^2(\Omega^2 + \omega_0^2) \right) \Rightarrow \langle P_{\bar{F}_e} \rangle = -\langle P_{\bar{F}_v} \rangle = \langle P_d \rangle$$

En régime permanent sinusoïdal la force excitatrice fournit à l'oscillateur une puissance moyenne égale à la puissance moyenne dissipée par frottement.

V Cas d'une force périodique non sinusoïdale

On considère $F_e(t)$ périodique, de période $\frac{2\pi}{\Omega}$

Théorème de Fourier : $F_e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_{e,n} \times \cos(n\Omega t + \Psi_n)$

Equation différentielle : $\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_e(t)}{m}$

Linéarité de l'équation différentielle : $F_{e,n} = RSF(n\Omega) \Rightarrow x_n(t) = X_n \cos(n\Omega t + \varphi_n + \Psi_n)$

Donc, pour $F_e(t)$, $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n(t)$