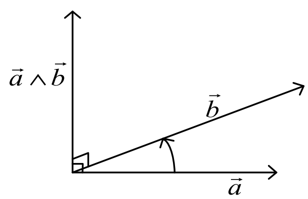
Chapitre 6 : Théorème du moment cinétique

I Moment d'une force, moment cinétique

A) Produit vectoriel

$\vec{a} \wedge \vec{b}$: Produit vectoriel de $\vec{a}$ par $\vec{b}$

- Direction perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$
- Sens de sorte que ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \wedge \vec{b}$) soit direct (règle de la main droite)
- Module $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\| \times |\sin(\vec{a}, \vec{b})|$



Propriétés : $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$

$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$

Dans une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ triorthonormée directe :

$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} \wedge \vec{b}\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} +1 \text{ sur les indices} \\ +1 \text{ sur les indices} \end{matrix}$$

Pour la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$\vec{j} \wedge \vec{k}$: Colinéaire à $\vec{i}$, de module 1, et de même sens que $\vec{i}$.

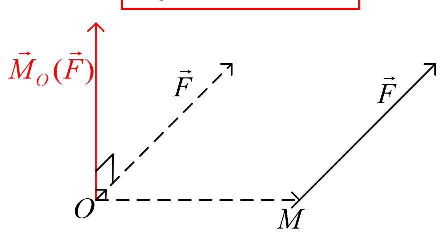
Donc $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$

B) Moment d'une force

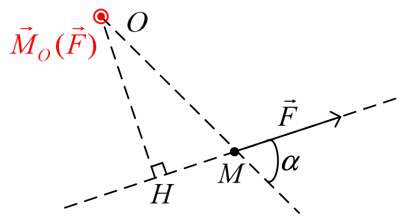
1) Moment d'une force en un point

Soit M soumis à une force $\vec{F}$, O un point de l'espace.

On définit $\boxed{\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}}$, moment en O de la force $\vec{F}$.



Dans le plan $(O, M, \vec{F})$:

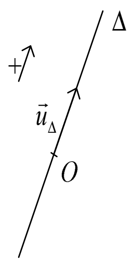


$$\left\|\vec{M}_O(\vec{F})\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \times \left\|\vec{F}\right\| \times |\sin\alpha| = OH \times \left\|\vec{F}\right\|$$

Si l'axe $(M, \vec{F})$ passe par O, $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$

2) Moment d'une force par rapport à un axe Δ orienté

On considère un axe Δ, orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$

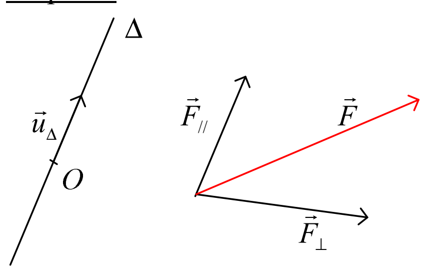


On a, par définition : $\boxed{M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta}$

Cette définition est indépendante de O :

$$\text{si } O' \in \Delta : \vec{M}_{O'}(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta = (\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta = (\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$
$$= \underbrace{(\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F})}_{\perp \vec{u}_\Delta} \cdot \vec{u}_\Delta + (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

Propriété



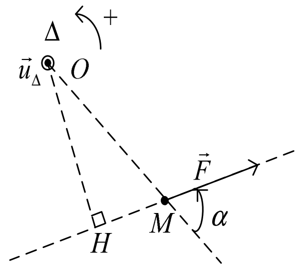
On a : $\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_\perp$ avec $\vec{F}_\perp$ perpendiculaire à Δ, $\vec{F}_{//}$ parallèle à Δ.

$$\text{On a alors} : M_\Delta(\vec{F}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta = (\underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{//}}_{\perp \vec{u}_\Delta} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_\perp) \cdot \vec{u}_\Delta$$
$$= (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_\perp) \cdot \vec{u}_\Delta = M_\Delta(\vec{F}_\perp)$$

Cas particulier : $\vec{F} // \Delta \Rightarrow \vec{F}_\perp = \vec{0} \Rightarrow M_\Delta(\vec{F}) = 0$

Dans le cas général : on peut se ramener au cas où $\vec{F} \perp \Delta$

On a dans le plan $(M, \vec{F}, \vec{A} \perp \Delta)$: (avec $\vec{F} \perp \Delta$)



$\alpha = (\overrightarrow{OM}, \vec{F})$ orienté par $\vec{u}_\Delta$

$$M_\Delta(\vec{F}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta = (\|\overrightarrow{OM}\| \times \|\vec{F}\| \times \sin\alpha \cdot \vec{u}_\Delta) \cdot \vec{u}_\Delta$$

$$= \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\vec{F}\| \times \sin\alpha$$

$M_\Delta(\vec{F}) > 0$ si $\alpha > 0$, c'est-à-dire si $\vec{F}$ tend à faire tourner M dans le sens direct associé à $\vec{u}_\Delta$

$M_\Delta(\vec{F}) < 0$ si $\alpha < 0$, c'est-à-dire si $\vec{F}$ tend à faire tourner M dans le sens horaire associé à $\vec{u}_\Delta$

$$|M_\Delta(\vec{F})| = \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\vec{F}\| \times |\sin\alpha| = OH \times \|\vec{F}\|$$

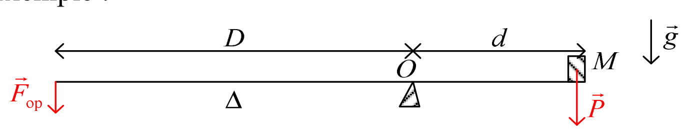
Donc $M_\Delta(\vec{F}) = OH \times \|\vec{F}\|$ si $\alpha > 0$

et $M_\Delta(\vec{F}) = -OH \times \|\vec{F}\|$ si $\alpha < 0$

(Attention, c'est uniquement lorsque $\vec{F} \perp \Delta$)

OH est appelé bras de levier.

Exemple :



On verra que la condition d'équilibre s'écrit $\sum M_\Delta = 0$

$$\Leftrightarrow M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{F}_{\text{op}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -M \times g \times d + F_{\text{op}} D = 0$$

$$\Leftrightarrow F_{\text{op}} = \frac{d}{D} M \times g$$

C) Moment cinétique dans (R)

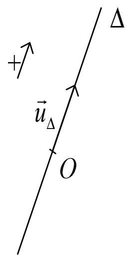
Rappel : quantité de mouvement de M dans (R) :

$$\boxed{\vec{p}_{M/(R)} = m \times \vec{v}_{M/(R)}}$$

Moment cinétique en O de M dans (R) :

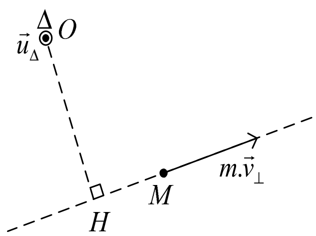
$$\boxed{\vec{\sigma}_{O/(R)}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}_{M/(R)} = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}_{M/(R)}}$$

Moment cinétique de M dans (R) autour de Δ orienté :



$$\boxed{\sigma_{\Delta/(R)}(M) = \vec{\sigma}_{O/(R)}(M) \cdot \vec{u}_\Delta}$$

Remarque : $\sigma_{\Delta/(R)}(M) = (\overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}_{M/(R)}) \cdot \vec{u}_\Delta = (\overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}_\perp) \cdot \vec{u}_\Delta$



$$M_\Delta(\vec{F}) = \pm OH \times m \times v_\perp$$

$$\begin{cases} +OH \times m \times v_\perp & \text{si M tourne dans le sens positif par rapport à } \vec{u}_\Delta \\ -OH \times m \times v_\perp & \text{si M tourne dans le sens négatif par rapport à } \vec{u}_\Delta \end{cases}$$

II Théorème du moment cinétique

A) Enoncé, démonstration

On considère un référentiel (R) galiléen, O un point fixe dans (R), M de masse m soumis à une résultante des forces $\vec{F}$.

On a :

$$\vec{\sigma}_{O/(R)}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}_{M/(R)}$$

$$\left.\frac{d(\vec{\sigma}_{O/(R)}(M))}{dt}\right|_{(R)} = \underbrace{\left.\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}\right|_{(R)}}_{=\vec{v}_{M/(R)} \text{ car } O \text{ fixe}} \wedge m \cdot \vec{v}_{M/(R)} + \overrightarrow{OM} \wedge \underbrace{\left.\frac{d(m \cdot \vec{v}_{M/(R)})}{dt}\right|_{(R)}}_{=m\vec{a}_{M/(R)}=\vec{F}}$$

$$= \vec{0} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{M}_0(\vec{F})$$

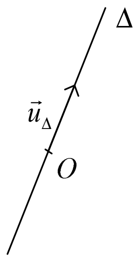
D'où le théorème :

$$\boxed{\left.\frac{d(\vec{\sigma}_{O/(R)}(M))}{dt}\right|_{(R)} = \vec{M}_0(\vec{F})} \; (\vec{F} \text{ est la résultante des forces})$$

Ainsi, $\vec{M}_0(\vec{F})$ correspond à l'aptitude de $\vec{F}$ à modifier le mouvement de rotation de M par rapport à O.

On considère un axe Δ orienté, fixe dans (R), passant par O.

(C'est-à-dire que O et $\vec{u}_\Delta$ sont fixes)



$$\sigma_{\Delta/(R)}(M) = \vec{\sigma}_{O/(R)}(M) \cdot \vec{u}_\Delta$$

$$\frac{d(\sigma_{\Delta/(R)}(M))}{dt} = \left.\frac{d(\vec{\sigma}_{O/(R)}(M))}{dt}\right|_{(R)} \cdot \vec{u}_\Delta + \vec{\sigma}_{O/(R)}(M) \cdot \left.\frac{d(\vec{u}_\Delta)}{dt}\right|_{(R)}$$

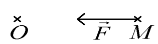
$$= \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta + 0$$

$$\boxed{\frac{d(\sigma_{\Delta/(R)}(M))}{dt} = M_\Delta(\vec{F})}$$

B) Utilisation du théorème du moment cinétique (TMC)

Remarque : le Théorème du Moment Cinétique en un point est parfaitement équivalent à la Relation Fondamentale de la Dynamique

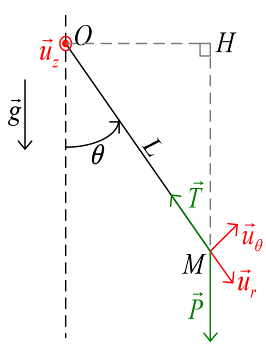
On l'utilise quand une force $\vec{F}$ inconnue « passe » par O. Ainsi, $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$.



Pour le théorème du moment cinétique projeté sur un axe Δ :

Si $\vec{F}$ passe par Δ ou si $\vec{F} // \Delta$, alors $M_\Delta(\vec{F}) = 0$.

C) Application : pendule simple



On est dans le référentiel terrestre (R_T) supposé galiléen.

$\overrightarrow{OM} = L \cdot \vec{u}_r$

$\vec{v}_{M/(R_T)} = L\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$

$$\vec{\sigma}_{O/(R_T)}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}_{M/(R_T)}$$

$$= \begin{vmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ mL\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ mL^2\dot{\theta} \end{vmatrix} = mL^2\dot{\theta} \cdot \vec{u}_z$$

$$\vec{M}_0(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_0(\vec{P}) = -OH \times mg \cdot \vec{u}_z = -L\sin\theta \times mg \cdot \vec{u}_z \text{ (reste valable quand } \theta < 0)$$

Théorème du moment cinétique dans (R_T) galiléen à M :

$$\left. \frac{d(\vec{\sigma}_{O/(R_T)}(M))}{dt} \right|_{(R_T)} = \vec{M}_0(\vec{T}) + \vec{M}_0(\vec{P}) = \vec{M}_0(\vec{P})$$

$$\Leftrightarrow mL^2\ddot{\theta} \cdot \vec{u}_z = -L\sin\theta \times mg \cdot \vec{u}_z$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Alternative : on considère l'axe $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$.

$$\vec{\sigma}_{\Delta/(R_T)}(M) = (mL^2\dot{\theta} \cdot \vec{u}_z) \cdot \vec{u}_z = mL^2\dot{\theta}$$

$$M_\Delta(\vec{T}) = 0$$

$$M_\Delta(\vec{P}) = L \times (-mg\sin\theta)$$

Donc $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{l}\sin\theta = 0$