Chapitre 8 : Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou un sous corps de $\mathbb{C}$). (Muni des lois + et × naturelles)

I Définitions

A) Définition

Soit E un ensemble, muni d'une loi de composition interne $\oplus$ et d'une loi externe à opérateurs dans $\mathbb{K}$, notée $\cdot$, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{c} E\times E\to E \\ (u,v)\mapsto u\oplus v \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} \mathbb{K}\times E\to E \\ (\lambda,u)\mapsto \lambda\cdot u \end{array}.$$

On dit que $(E,\oplus,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$/un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$-ev) lorsque :

- $(E,\oplus)$ est un groupe commutatif
- Pour tous $u,v\in E$, $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, on a :

$(\lambda+\mu)\cdot u=\lambda\cdot u\oplus\mu\cdot u$

$\lambda\cdot(u\oplus v)=\lambda\cdot u\oplus\lambda\cdot v$

$(\lambda\times\mu)\cdot u=\lambda\cdot(\mu\cdot u)$

$1\cdot u=u$

Exemples :

$(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des $\mathbb{R}$-ev.

$(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

B) Règles de calcul

Soit $(E,\oplus,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev. Alors :

(1) $\forall u\in E, 0\cdot u=0_E$ (neutre pour $\oplus$ du groupe $(E,\oplus)$ appelé le vecteur nul de E)

Démonstration :

$\forall u\in E, 0\cdot u=(0+0)\cdot u=0\cdot u\oplus 0\cdot u$.

Donc $0\cdot u=0_E$

(2) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\lambda\cdot 0_E=0_E$

Démonstration :

$\lambda\cdot 0_E=\lambda\cdot(0_E\oplus 0_E)=\lambda\cdot 0_E\oplus\lambda\cdot 0_E$

Donc $\lambda\cdot 0_E=0_E$.

(3) $\forall u\in E,\forall\lambda\in\mathbb{K},\lambda\cdot u=0_E\Leftrightarrow\lambda=0 \text{ ou } u=0_E$

Démonstration :

Le sens $\Leftarrow$ a été vu avec (1) et (2).

Pour $\Rightarrow$: Supposons que $\lambda\cdot u=0_E$ et que $\lambda\neq 0$.

Montrons qu'alors $u=0_E$.

On introduit λ^{-1} (ce qui est possible car $\lambda\neq 0$).

Alors $\lambda^{-1}\cdot(\lambda\cdot u)=(\lambda^{-1}\times\lambda)\cdot u=1\cdot u=u$ d'une part,
Et $\lambda^{-1}\cdot(\lambda\cdot u)=\lambda^{-1}\cdot 0_E=0_E$ d'autre part.
Donc $u=0_E$
(4) $\forall u\in E,\forall\lambda\in\mathbb{K},(-\lambda)\cdot u=\ominus(\lambda\cdot u)=\lambda\cdot(\ominus u)$
Démonstration :
$(\lambda\cdot u)\oplus((-\lambda)\cdot u)=(\lambda+(-\lambda))\cdot u=0_E$. Donc $(-\lambda)\cdot u=\ominus(\lambda\cdot u)$
$(\lambda\cdot u)\oplus(\lambda\cdot(\ominus u))=\lambda\cdot(u\oplus\ominus u)=\lambda\cdot 0_E=0_E$. Donc $\lambda\cdot(\ominus u)=\ominus(\lambda\cdot u)$.
(5) $\forall u\in E,\forall n\in\mathbb{Z},n.u=n\cdot u$
(A gauche de l'égalité : itération dans $(E,\oplus)$; à droite : produit externe)
Démonstration :
Par récurrence pour les $n\geq 0$, puis la proposition (4) pour $n\leq 0$.
Ces règles permettent des écritures simplifiées :
$+$ pour $\oplus$, . pour $\cdot$ voire omis, $-\lambda u$ pour la valeur commune de $(-\lambda)\cdot u,\ominus(\lambda\cdot u)$ et $\lambda\cdot(\ominus u)$.

Vocabulaire :
Dans un $\mathbb{K}$-ev $(E,+,\cdot)$, les éléments de E sont appelés des vecteurs, et les éléments de $\mathbb{K}$ des scalaires.

C) Exemple important

Soit $n\in\mathbb{N}^*$
On munit $\mathbb{K}^n$ $(\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times\ldots\times\mathbb{K})$ de la loi $\oplus$ et de la loi externe $\cdot$ à opérateurs dans $\mathbb{K}$ définis ainsi :

Pour tous $\begin{cases}(x_1,x_2,\ldots x_n)\in\mathbb{K}^n\\(y_1,y_2,\ldots y_n)\in\mathbb{K}^n\\\lambda\in\mathbb{K}\end{cases}$:

$(x_1,x_2,\ldots x_n)\oplus(y_1,y_2,\ldots y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots x_n+y_n)$
$\lambda\cdot(x_1,x_2,\ldots x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots\lambda x_n)$.
Alors $(\mathbb{K}^n,\oplus,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Démonstration :
Déjà, $(\mathbb{K}^n,\oplus)$ est un groupe commutatif :
Le neutre pour $\oplus$ est évidemment $(0,0,\ldots 0)$, qui est bien dans $\mathbb{K}^n$.
Associativité :
Soient $x,y,z\in\mathbb{K}^n$. Alors $x=(x_1,x_2,\ldots x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots y_n)$ et $z=(z_1,z_2,\ldots z_n)$ où $x_1,x_2,\ldots x_n,y_1,y_2,\ldots y_n,z_1,z_2,\ldots z_n\in\mathbb{K}$
Alors :
$$\begin{aligned}x\oplus(y\oplus z)&=(x_1,x_2,\ldots x_n)\oplus((y_1,y_2,\ldots y_n)\oplus(z_1,z_2,\ldots z_n))\\&=\ldots=(x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2),\ldots x_n+(y_n+z_n))\\&=((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2,\ldots(x_n+y_n)+z_n)\\&=\ldots=(x\oplus y)\oplus z\end{aligned}$$

Commutativité :

Soient $x, y \in \mathbb{K}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$. Alors :

$$\begin{aligned}
x \oplus y &= (x_1, x_2, \ldots x_n) \oplus (y_1, y_2, \ldots y_n) \\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n) \\
&= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \ldots y_n + x_n) \\
&= y \oplus x
\end{aligned}$$

Existence d'un inverse pour $\oplus$ de tout élément de $\mathbb{K}^n$.

Soit $x \in \mathbb{K}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Alors $x' = (-x_1, -x_2, \ldots - x_n)$ est dans $\mathbb{K}^n$ et est évidemment inverse de x pour $\oplus$.

Soient maintenant $x, y \in \mathbb{K}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, avec $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$.

On a :

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu) \cdot x &= (\lambda + \mu) \cdot (x_1, x_2, \ldots x_n) \\
&= ((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)x_2, \ldots (\lambda + \mu)x_n) \\
&= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2, \ldots \lambda x_n + \mu x_n) \\
&= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots \lambda x_n) \oplus (\mu x_1, \mu x_2, \ldots \mu x_n) \\
&= \lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots x_n) \oplus \mu \cdot (x_1, x_2, \ldots x_n) \\
&= \lambda \cdot x \oplus \mu \cdot x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot (x \oplus y) &= \lambda \cdot (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n) \\
&= (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2), \ldots \lambda(x_n + y_n)) \\
&= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2, \ldots \lambda x_n + \lambda y_n) \\
&= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots \lambda x_n) \oplus (\lambda y_1, \lambda y_2, \ldots \lambda y_n) \\
&= \lambda \cdot x \oplus \lambda \cdot y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda\mu) \cdot x &= ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)x_2, \ldots (\lambda\mu)x_n) \\
&= (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2), \ldots \lambda(\mu x_n)) \\
&= \lambda \cdot (\mu x_1, \mu x_2, \ldots \mu x_n) \\
&= \lambda \cdot (\mu \cdot x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 \cdot x &= (1x_1, 1x_2, \ldots 1x_n) \\
&= (x_1, x_2, \ldots x_n) = x
\end{aligned}$$

Généralisation :

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev, on peut munir naturellement $E \times F$ d'une structure de $\mathbb{K}$-ev en posant, pour tous $u, u' \in E, v, v' \in F, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{cases} (u,v) + (u',v') = (u+u', v+v') \\ \lambda \cdot (u,v) = (\lambda \cdot u, \lambda \cdot v) \end{cases}$$

Et plus généralement $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ où les E_i sont des $\mathbb{K}$-ev.

D) Vecteurs, combinaisons linéaires

Ici, $(E,+,\cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-ev.

Définition :

Soit $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ une famille finie d'éléments de E.

Une combinaison linéaire de la famille $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ / des $u_i, i \in [\![1, n]\!]$ est un élément de E du type $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \ldots + \lambda_n \cdot u_n$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i$ où les λ_i sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Définition :

Soit $u \in E$.

Si $u = 0_E$, tout élément de E est dit colinéaire à u.

Si $u \neq 0_E$, les vecteurs de E colinéaires à u sont les $\lambda \cdot u, \lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition :

La relation « être colinéaire à » est une relation d'équivalence.

En effet :

- Déjà, elle est réflexive…
- Symétrique : Supposons v colinéaire à u :

Si $u = 0_E$, u est bien colinéaire à v car $u = 0 \cdot v$

Si $u \neq 0_E$, alors v s'écrit $\lambda \cdot u$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Donc soit $\lambda = 0$ et alors $v = 0_E$ et donc u est colinéaire à v,

Soit $\lambda \neq 0$, et alors $u = \lambda^{-1} v$ donc u est colinéaire à v.

- Transitivité : immédiate.

Définition équivalente :

Soient $u, v \in E$. On a l'équivalence :

u et v sont colinéaires $\Leftrightarrow u = 0_E$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{K}, v = \lambda \cdot u$ (1)

$\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \setminus \{(0,0)\}, \alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0_E$ (2)

Démonstration :

(1) est simplement une autre façon d'écrire la définition.

Montrons que $(1) \Rightarrow (2)$. Supposons (1).

Si $u = 0_E$, on peut prendre $(\alpha, \beta) = (1,0)$

Si $u \neq 0_E$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda \cdot u$.

Ainsi, avec $(\alpha, \beta) = (\lambda, -1)$, on a bien $\alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0_E$

Montrons maintenant que $(2) \Rightarrow (1)$. Supposons (2).

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0_E$.

Si $\beta \neq 0$, alors $v = \frac{-\alpha}{\beta} \cdot u$

Si $\beta = 0$, alors $\alpha \cdot u = 0_E$. Or, $\alpha \neq 0$ car $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Donc $u = 0_E$.

II Sous-espace vectoriel

$(E,+,\cdot)$ désigne toujours un $\mathbb{K}$-ev.

A) Définition

Soit F une partie de E.
On dit que F est un sous-espace vectoriel (sev) de E lorsque :

- F contient 0_E.
- F est stable par $+$: $\forall u, v \in F, u+v \in F$
- F est stable par $\cdot$: $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot u \in F$.

Proposition :
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $+$ constitue une loi de composition interne sur F, $\cdot$ constitue une loi externe à opérateurs dans $\mathbb{K}$, et $(F,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev :

- Déjà, $(F,+)$ est bien un groupe commutatif puisque F est un sous-groupe de $(E,+)$ car $0_E \in F$, F est stable par $+$ et $\forall u \in F, -u = (-1)\cdot u \in F$.
- De plus, on vérifie immédiatement que les quatre règles sont bien vérifiées…

Exemples :

- $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-ev. Quels en sont les sous-espaces vectoriels ?

- $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$
- Pour $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, $\{\lambda \cdot u, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{R}^2$.

Il n'y en a pas d'autres : si un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ contient deux vecteurs non colinéaires, c'est $\mathbb{R}^2$.

- Si E est un $\mathbb{K}$-ev quelconque :

$\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E.
Si $u \in E \setminus \{0_E\}$, $\{\lambda \cdot u, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé la droite vectorielle de E engendrée par u.

- Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont exactement :

- $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$
- Pour $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $\{\lambda \cdot u, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Pour $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ avec u et v non colinéaires, $\{\lambda \cdot u + \mu \cdot v, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ (plan vectoriel)
- $\mathbb{R}^3$

- Des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$H_a = \{f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), f(a) = 0\}$ où a est un élément de $\mathbb{R}$ fixé.
$A =$ l'ensemble des fonctions du type $x \mapsto a \cdot x + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
Ou même $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$ (où $n \in \mathbb{N}$)
$C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), D^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ldots$
L'ensemble des fonctions paires, impaires…

B) Intersection de sous-espaces vectoriels

Théorème :
Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E en est un sous-espace vectoriel.

Démonstration :

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.

Soit $F = \bigcap_{i\in I} F_i = \{u\in E, \forall i\in I, u\in F_i\}$

Alors $0_E \in F$ car $\forall i\in I, 0_E\in F_i$

F est stable par + :

Soient $u,v\in F$. Alors $\forall i\in I, u\in F_i, v\in F_i$, donc $\forall i\in I, u+v\in F_i$. Donc $u+v\in F$

F est stable par $\cdot$:

Soient $u\in F, \lambda\in \mathbb{K}$. Alors $\forall i\in I, u\in F_i$, donc $\forall i\in I, \lambda\cdot u\in F_i$, donc $\lambda\cdot u\in F$.

C) Définitions équivalentes

Soit $F\subset E$. Alors :

$$F \text{ est un sev de } E \Leftrightarrow \begin{cases} 0_E\in F & (0)\\ \forall u,v\in F, u+v\in F & (1)\\ \forall \lambda\in\mathbb{K}, \forall u\in F, \lambda\cdot u\in F & (2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0_E\in F & (0)\\ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}, \forall u,v\in F, \alpha\cdot u+\beta\cdot v\in F & (3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0_E\in F & (0)\\ \forall \lambda\in\mathbb{K}, \forall u,v\in F, u+\lambda\cdot v\in F & (3\text{b})\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0_E\in F & (0)\\ F \text{ est stable par combinaison linéaire} & (3\text{t})\end{cases}$$

Pour (3t) : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall (u_1,u_2,\dots u_n)\in F^n, \forall(\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_n)\in\mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot u_i\in F$

Démonstration :

$(1)\text{ et }(2)\Rightarrow(3)$: évident.

$(3)\Rightarrow(3\text{b})$: immédiat.

$(3)\Rightarrow(3\text{t})$: immédiat par récurrence.

$(3\text{t})\Rightarrow(3)$: cas particulier.

$(3\text{b})\text{ et }(0)\Rightarrow(1)\text{ et }(2)$:

Si on a $(3\text{b})\text{ et }(0)$, on applique (3b) avec $u=0_E$ et on obtient (2), puis (3b) avec $\lambda=1$ et on obtient (1).

D'où toutes les équivalences.

De plus, on peut partout remplacer (0) par (0b) : « $F\neq\varnothing$ ».

D) Sous-espace vectoriel engendré par

Définition :

Soit $A\subset E$. Le sous-espace vectoriel engendré par A, noté $\text{Vect}(A)$, est le plus petit des sous-espaces vectoriels de E contenant A.

Justification :

L'ensemble ε des sous-espaces vectoriels de E contenant A n'est pas vide, puisqu'il contient E, et l'intersection $\bigcap_{X\in\varepsilon} X$ est un sous-espace vectoriel de E contenant A, et est contenu dans chaque X de ε, c'est donc bien le plus petit éléments de ε.

Proposition :

- $\mathrm{Vect}(\varnothing)=\{0_E\}$
- Si $u\in E\setminus\{0_E\}$, $\mathrm{Vect}(\{u\})=\{\lambda\cdot u,\lambda\in \mathbb{K}\}$, noté aussi $\mathrm{Vect}(u)$.
- A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\mathrm{Vect}(A)=A$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E, et si $A\subset F$, alors $\mathrm{Vect}(A)\subset F$

(En effet, $F\in\varepsilon$ et $\mathrm{Vect}(A)=\min_{X\in\varepsilon}\{X\}$)

- Si $A\subset B$, alors $\mathrm{Vect}(A)\subset \mathrm{Vect}(B)$:

$A\subset B\subset \mathrm{Vect}(B)$.

Donc $A\subset \mathrm{Vect}(B)$. Donc $\mathrm{Vect}(A)\subset \mathrm{Vect}(B)$ (d'après le point précédent).

Cas particulier :

Sous-espace vectoriel engendré par une partie finie :

Soient $u_1,u_2,...u_n$ des vecteurs de E.

Alors $\mathrm{Vect}(\{u_1,u_2,...u_n\})$, plutôt noté $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,...u_n)$, est appelé le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(u_1,u_2,...u_n)$ ou « par les u_i »

Proposition :

$\mathrm{Vect}(u_1,u_2,...u_n)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des u_i, c'est-à-dire :

$\{\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+...+\lambda_nu_n,(\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\}$

Démonstration :

Notons $C(u_1,u_2,...u_n)=\{\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+...+\lambda_nu_n,(\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\}$.

Alors $C(u_1,u_2,...u_n)$ contient 0_E et est stable par + et $\cdot$

(car $\sum_{i=1}^n\lambda_iu_i+\sum_{i=1}^n\lambda'_iu_i=\sum_{i=1}^n(\lambda_i+\lambda'_i)u_i$ et $\lambda\cdot\sum_{i=1}^n\lambda_iu_i=\sum_{i=1}^n(\lambda\lambda_i)u_i$)

Donc $C(u_1,u_2,...u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant les u_i, et c'est le plus petit car si un sous-espace vectoriel de E contient les u_i, il en contient alors toutes les combinaisons linéaires. Donc $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,...u_n)=C(u_1,u_2,...u_n)$.

Vocabulaire :

- Si F est le sous-espace vectoriel engendré par une famille (finie) $\mathfrak{F}=(u_1,u_2,...u_n)$ de vecteurs de E, on dit que $\mathfrak{F}$ est une famille génératrice de F.
- Si un espace vectoriel E admet une famille génératrice finie, on dit que E est de type fini.

Exemple :

$\mathbb{K}^n$ est de type fini, une famille génératrice étant $[(1,0,...0),(0,1,0,...,0),...,(0,0,...,1)]$

$\mathbb{K}[X]$ n'est pas de type fini. En effet, supposons qu'il admette une famille génératrice finie $(P_1,P_2,...P_m)$; si on prend $N=\max_{i\in[\![1,m]\!]}(\deg(P_i))$, on aurait alors $\forall P\in\mathbb{K}[X],\deg P\leq N$ ce qui est faux.

Propriétés :

Pour tout $(u_1,u_2,...u_m)\in E^m$, on a :

- Pour tous $i,j\in[\![1,m]\!]$ avec $i\neq j$:

$\text{Vect}(u_1,u_2,...,u_i,...,u_j,...,u_m)=\text{Vect}(u_1,u_2,...,u_j,...,u_i,...,u_m)$

- Pour tout $i\in[\![1,m]\!]$ et tout $a\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$:

$\text{Vect}(u_1,u_2,...,au_i,...,u_m)=\text{Vect}(u_1,u_2,...,u_i,...,u_m)$

- Pour tout $i,j\in[\![1,m]\!]$ distincts et tout $\lambda\in\mathbb{K}$:

$\text{Vect}(u_1,u_2,...,u_i+\lambda u_j,...,u_m)=\text{Vect}(u_1,u_2,...,u_i,...,u_m)$

Démonstration (3ème point) :

Soit $w\in\text{Vect}(\underbrace{u_1}_{u'_1},\underbrace{u_2}_{u'_2},...,\underbrace{u_i+\lambda u_j}_{u'_i},...,\underbrace{u_m}_{u'_m})$

$$\text{Alors } w=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k u'_k=\sum_{k\neq i}\lambda_k u_k+\lambda_i(u_i+\lambda u_j)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\mu_k u_k$$

Avec $\mu_k=\begin{cases}\lambda_k \text{ si } k\neq j\\ \lambda_j+\lambda\lambda_i \text{ si } k=j\end{cases}$

L'autre inclusion est analogue.

On a donc un algorithme pour déterminer le Vect (sur un exemple) :

$$\begin{aligned}
\text{Vect}[(1,2,3,4),(4,6,0,2),(1,4,9,2)]&=\text{Vect}[(1,2,3,4),\underbrace{(0,-2,-12,-14)}_{u_2-4u_1},\underbrace{(0,2,6,-2)}_{u_3-u_1}]\\
&=\text{Vect}[(1,2,3,4),(0,1,3,-1),(0,0,-6,-16)]\\
&=\text{Vect}[(1,2,3,4),(0,1,3,-1),(0,0,3,8)]\\
&=\text{Vect}[(1,2,0,-4),(0,1,0,-9),(0,0,3,8)]\\
&=\text{Vect}[(1,0,0,14),(0,1,0,-9),(0,0,3,8)]\\
&=\text{Vect}[(1,0,0,14),(0,1,0,-9),(0,0,1,\tfrac{8}{3})]\\
&=\{x(1,0,0,14)+y(0,1,0,\text{-}9)+z(0,0,1,\tfrac{8}{3}),x,y,z\in\mathbb{R}\}\\
&=\{(x,y,z,14x-9y+\tfrac{8}{3}z),x,y,z\in\mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a l'équivalence :

Pour tout $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$,

$(x,y,z,t)\in\text{Vect}[(1,2,3,4),(4,6,0,2),(1,4,9,2)]\Leftrightarrow t=14x-9y+\frac{8}{3}z$

Autre résultat :

Si $1\leq p\leq m$, alors $\text{Vect}(u_1,u_2,...,u_p)\subset\text{Vect}(u_1,u_2,...,u_m)$.

Pour tout $v\in E$, $v\in\text{Vect}(u_1,u_2,...,u_m)\Leftrightarrow\text{Vect}(u_1,u_2,...,u_m,v)=\text{Vect}(u_1,u_2,...,u_m)$

III Sommes et sommes directes

$(E,+,\cdot)$ désigne ici encore un $\mathbb{K}$-ev.

Définition et proposition :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

La somme de F et G est :

$$F+G \underset{\text{déf}}{=} \{u+v, u\in F, v\in G\} = \{w\in E, \exists (u,v)\in F\times G, w=u+v\}$$

Alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, et c'est même $\mathrm{Vect}(F\cup G)$.

En effet :

Déjà, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, car il contient 0_E et est stable par $+,\cdot$ (évident en utilisant la deuxième égalité de la définition de $F+G$)

De plus, $F+G$ contient F (car tout u de F s'écrit $u+0_E$ où $0_E\in G$) et G.

Il contient donc $F\cup G$.

Enfin, si un sous-espace vectoriel de E contient $F\cup G$, alors il contient au moins $F+G$ car il contient tous les éléments de F, tous les éléments de G et est stable par +, donc contient tous les $u+v$ pour $u\in F$ et $v\in G$.

Exemple :

- Dans $E=\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

Soit F l'ensemble des fonctions polynomiales de degré ≤ 3, G l'ensemble des fonctions de classe C^2 et négligeables devant $x\mapsto x^2$ au voisinage de 0.

Alors $F+G=C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En effet :

Une première implication est déjà évidente. Pour l'autre :

Soit $f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Alors f admet un DL à l'ordre 2 en 0 :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\underbrace{a_0+a_1x+a_2x^2}_{P(x)}+\underbrace{x^2\varepsilon(x)}_{h(x)}$$

Alors h est de classe C^2 car $h=f-P$, et de plus $h=o(x^2)$ en 0.

D'où l'autre inclusion et l'égalité.

- Dans $\mathbb{R}^4$: $F=\mathrm{Vect}((1,2,0,0)), G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x-z=y-t=0\}$

Alors $G=\{(x,y,x,y), x,y\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1,0,1,0),(0,1,0,1))$

Et donc $F+G=\mathrm{Vect}((1,2,0,0),(1,0,1,0),(0,1,0,1))$.

Somme directe, définition :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que la somme $F+G$ est directe lorsque tout élément de $F+G$ s'écrit de manière unique sous la forme $u+v$ avec $u\in F$ et $v\in G$.

Autrement dit, étant donné qu'on connaît déjà l'existence (par définition) de l'écriture, la définition devient :

La somme de F et G est directe $\Leftrightarrow \forall (u,v)\in F\times G, \forall (u',v')\in F\times G,$
$(u+v=u'+v' \Rightarrow u=u' \text{ et } v=v')$

Exemple :

La somme de deux droites vectorielles distinctes dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition :

On a l'équivalence entre les propositions suivantes :

(1) La somme de F et G est directe (expression de la définition précédente)

(2) $\forall (u,v)\in F\times G, (u+v=0_E \Rightarrow u=0_E \text{ et } v=0_E)$

(3) $F\cap G=\{0_E\}$

((1) : $\forall (u,v)\in F\times G, \forall (u',v')\in F\times G, (u+v=u'+v' \Rightarrow u=u' \text{ et } v=v')$)

Démonstration :

- On voit déjà que $(1) \Rightarrow (2)$ (c'est un cas particulier avec $(u',v')=(0_E,0_E)$)
- Montrons que $(2) \Rightarrow (3)$. Supposons (2) :

Soit alors $w \in F \cap G$

On a : $w+(-w)=0_E$. Or, $w \in F$ et $-w \in G$ (car $w \in G$ et G est stable par $\cdot$)

Donc, d'après (2), $w=0_E$ (et $-w=0_E$), d'où une inclusion et l'égalité.

- Montrons que $(3) \Rightarrow (1)$. Supposons (3).

Soient $(u,v) \in F \times G, (u',v') \in F \times G$. Supposons que $u+v=u'+v'$.

Alors $u-u'=v'-v$, et $u-u' \in F, v'-v \in G$, donc $u-u' \in F \cap G, v'-v \in F \cap G$.

Donc $u-u'=0_E$ et $v'-v=0_E$, c'est-à-dire $u=u'$ et $v=v'$.

D'où les équivalences.

Notation :

Si la somme de F et G est directe, on peut la noter $F \oplus G$.

Définition :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que F et G sont supplémentaires dans E lorsque :

$$\begin{cases} F+G=E \\ F \cap G=\{0_E\} \end{cases}$$

Ainsi, lorsque F et G sont supplémentaires dans E, on peut noter $E=F \oplus G$.

Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément de E s'écrit de manière unique $u+v$, où $u \in F$ et $v \in G$.

IV Applications linéaires

Dans ce paragraphe, E, F et G sont trois $\mathbb{K}$-ev.

A) Définition

Soit $\varphi : E \to F$.

On dit que φ est linéaire/un morphisme du $\mathbb{K}$-ev E vers le $\mathbb{K}$-ev F lorsque :

$\forall u,u' \in E, \varphi(u+u')=\varphi(u)+\varphi(u')$

$\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(\lambda \cdot u)=\lambda \cdot \varphi(u)$

Proposition :

Si φ est une application linéaire de E dans F, alors φ est un morphisme du groupe $(E,+)$ vers $(F,+)$.

Vocabulaire :

- L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $L(E,F)$
- Une application linéaire de E vers E s'appelle aussi un endomorphisme de E, et $L(E,E)$ est plutôt noté $L(E)$.
- Une application linéaire de E vers $\mathbb{K}$ s'appelle forme linéaire de E. $L(E,\mathbb{K})$ est noté E^*. L'ensemble des formes linéaires de E s'appelle le dual de E.

Caractérisations équivalentes :
Soit $\varphi : E \to F$.
$$(1)\ \varphi \in L(E,F) \Leftrightarrow \forall(\alpha,\beta)\in \mathbb{K}^2, \forall(u,u')\in E^2, \varphi(\alpha.u+\beta.u') = \alpha.\varphi(u)+\beta.\varphi(u')\ (2)$$
$$\Leftrightarrow \forall \lambda\in\mathbb{K}, \forall(u,u')\in E^2, \varphi(u+\lambda.u') = \varphi(u)+\lambda.\varphi(u') \qquad (3)$$

En effet :
$(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)$: évident.
Montrons que $(3)\Rightarrow(1)$.
On applique (3) avec $\lambda=1$. Donc $\forall(u,u')\in E^2, \varphi(u+u')=\varphi(u)+\varphi(u')$
Donc avec $(u,u')=(0_E,0_E)$, $\varphi(0_E)=0_F$.
Donc $\forall\lambda\in\mathbb{K}, \forall u\in E, \varphi(0_E+\lambda\cdot u)=\varphi(0_E)+\lambda\cdot\varphi(u)=0_F+\lambda\cdot\varphi(u)=\lambda\cdot\varphi(u)$

Exemple :

- L'application nulle de E dans F est linéaire.
- L'application identité de E dans E est linéaire.
- Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont exactement les applications de la forme $x\mapsto a\cdot x$ où $a\in\mathbb{R}$:
  - Déjà, si f est de la forme $f : x\mapsto a\cdot x$, alors f est linéaire, car :
  $\forall\lambda\in\mathbb{R}, \forall x,x'\in\mathbb{R}, f(x+\lambda.x')=a(x+\lambda.x')=ax+\lambda.(ax')=f(x)+\lambda.f(x')$
  - Inversement, soit $f\in L(\mathbb{R})$.
  Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(x.1)=x.f(1)$
  Ainsi, avec $a=f(1)$, on a bien $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=a.x$.
- L'application $D : \begin{array}{c} D^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f\mapsto f' \end{array}$ est linéaire.
- L'application $\begin{array}{c} S_C(\mathbb{N},\mathbb{R})\to\mathbb{R} \\ u\mapsto\lim(u) \end{array}$ est une forme linéaire de $S_C(\mathbb{N},\mathbb{R})$

($S_C(\mathbb{N},\mathbb{R})$ est l'ensemble des suites convergentes)

- L'application $\psi : \begin{array}{c} \mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathbb{R} \\ f\mapsto f(\pi) \end{array}$ est linéaire :

Pour tous $f,g\in\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\psi(f+g)=(f+g)(\pi)=f(\pi)+g(\pi)=\psi(f)+\psi(g)$
Pour tout $f\in\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, $\psi(\lambda.f)=(\lambda.f)(\pi)=\lambda.f(\pi)=\lambda.\psi(f)$.

- L'application $\begin{array}{c} \mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto xy \end{array}$ n'est pas linéaire.

Mais, à x fixé, $\begin{array}{c} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ y\mapsto xy \end{array}$ est linéaire (idem si y est fixé)
On dit alors que $\begin{array}{c} \mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto xy \end{array}$ est bilinéaire.

B) Noyau et image

Soit $\varphi\in L(E,F)$.
Le noyau de φ, c'est le noyau du morphisme de groupe :
$\ker\varphi=\{x\in E, \varphi(x)=0_E\}$.
Alors $\forall u,u'\in E, (\varphi(u)=\varphi(u')\Leftrightarrow u-u'\in\ker\varphi$.
Donc φ est injective $\Leftrightarrow \ker\varphi=\{0_E\}$.

En effet :
- Si φ est injective :
Soit $u \in \ker\varphi$. Alors $\varphi(u) = 0_F = \varphi(0_E)$. Donc $u = 0_E$.
D'où une première inclusion, et l'égalité, l'autre inclusion étant évidente.
- Supposons maintenant que $\ker\varphi = \{0_E\}$.
Si $\varphi(u) = \varphi(u')$, alors $u - u' \in \ker\varphi$, donc $u - u' = 0_E$. Donc $u = u'$.
Donc φ est injective.

Proposition :
$\ker\varphi$ est un sous-espace vectoriel de *E*.
Démonstration :
Déjà, $\ker\varphi \subset E$, et $0_E \in \ker\varphi$.
Soient $u, u' \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. On a :
$\varphi(u + \lambda.u') = \varphi(u) + \lambda.\varphi(u') = 0_F + \lambda.0_F = 0_F$

L'image de φ est $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(E) = \{\varphi(u), u \in E\} = \{v \in F, \exists u \in E, \varphi(u) = v\}$.
Alors φ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}\varphi = F$.

Proposition :
$\operatorname{Im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de *F*.
Démonstration :
Déjà, $\operatorname{Im}\varphi \subset F$ et $0_F \in \operatorname{Im}\varphi$ car $\varphi(0_E) = 0_F$.
$\operatorname{Im}\varphi$ est stable par + et $\cdot$:
Soient $v, v' \in \operatorname{Im}\varphi, \lambda \in \mathbb{K}$.
Il existe alors $u, u' \in E$ tels que $v = \varphi(u), v' = \varphi(u')$.
Alors $v + \lambda.v' = \varphi(u) + \lambda.\varphi(u') = \varphi(u + \lambda.u')$. Donc $v + \lambda.v' \in \operatorname{Im}\varphi$.

C) Image directe, image réciproque d'un sous-espace vectoriel

Proposition :
Soit $\varphi \in L(E, F)$.
L'image directe par φ d'un sous-espace vectoriel de *E* est un sous-espace vectoriel de *F*.
L'image réciproque par φ d'un sous-espace vectoriel de *F* est un sous-espace vectoriel de *E*.
Cas particulier :
$\varphi(E)$ est un sous-espace vectoriel de *F* (c'est $\operatorname{Im}\varphi$)
$\varphi^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace vectoriel de *E* (c'est $\ker\varphi$)
(On adapte aisément la démonstration de ces cas particuliers pour le cas général de la proposition)

D) Structure sur des ensembles d'applications linéaires

1) Somme, produit par un réel

Soient $\varphi,\psi\in L(E,F)$, $\lambda\in\mathbb{K}$.

On définit :

$\varphi+\psi: \begin{array}{l}E\to F\\ u\mapsto\varphi(u)+\psi(u)\end{array}$ et $\lambda.\varphi: \begin{array}{l}E\to F\\ u\mapsto\lambda.\varphi(u)\end{array}$

Alors $\varphi+\psi,\lambda.\varphi\in L(E,F)$.

On peut donc considérer $(L(E,F),+,\cdot)$, et $(L(E,F),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev (et même un sous-espace vectoriel de $(\mathfrak{F}(E,F),+,\cdot)$).

Démonstration :

Déjà, on vérifie que $(\mathfrak{F}(E,F),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev…

$L(E,F)$ est une partie de $\mathfrak{F}(E,F)$, contient $x\mapsto 0_F$ et est stable par + et $\cdot$:

Soient $\varphi,\psi\in L(E,F)$, $\lambda\in\mathbb{K}$.

On a, pour tous $u,u'\in E$ et tout $\mu\in\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}(\varphi+\psi)(u+\mu.u') &= \varphi(u+\mu.u')+\psi(u+\mu.u')\\ &= \varphi(u)+\mu.\varphi(u')+\psi(u)+\mu.\psi(u')\\ &= (\varphi+\psi)(u)+\mu.(\varphi+\psi)(u')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda.\varphi)(u+\mu.u') &= \lambda.\varphi(u+\mu.u')\\ &= \lambda.(\varphi(u)+\mu.\varphi(u'))\\ &= \lambda.(\varphi(u))+\lambda.(\mu.\varphi(u'))\\ &= (\lambda.\varphi)(u)+\mu.((\lambda.\varphi)(u'))\end{aligned}$$

Donc $\varphi+\psi,\lambda.\varphi\in L(E,F)$, et $L(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathfrak{F}(E,F),+,\cdot)$, donc un $\mathbb{K}$-ev.

2) Composition

Proposition :

La composée, quand elle est définie, de deux applications linéaires est linéaire.

Démonstration :

Soient $\varphi\in L(E,F)$ et $\psi\in L(F,G)$. Alors $\psi\circ\varphi$ est bien définie et va de E dans G. Et de plus, elle est linéaire :

Pour tous $u,u'\in E$ et tout $\mu\in\mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}(\psi\circ\varphi)(u+\mu.u') &= \psi(\varphi(u+\mu.u'))\\ &= \psi(\varphi(u)+\mu.\varphi(u'))\\ &= \psi(\varphi(u))+\mu.\psi(\varphi(u'))\\ &= (\psi\circ\varphi)(u)+\mu.(\psi\circ\varphi)(u')\end{aligned}$$

Propriétés :

Pour tous $\varphi,\varphi'\in L(E,F)$, $\psi,\psi'\in L(F,G)$ et tout $\lambda\in\mathbb{K}$, on a :

$\psi\circ(\varphi+\varphi')=\psi\circ\varphi+\psi\circ\varphi'$ (1)

$(\psi+\psi')\circ\varphi=\psi\circ\varphi+\psi'\circ\varphi$ (2)

$\psi \circ (\lambda.\varphi) = \lambda.(\psi \circ \varphi)$ (3)

$(\lambda.\psi) \circ \varphi = \lambda.(\psi \circ \varphi)$ (4)

Démonstration :

Déjà, les applications sont bien définies et vont de E dans G.

De plus, pour tout $u \in E$:

- $[\psi \circ (\varphi + \varphi')](u) = \psi[(\varphi + \varphi')(u)] = \psi[\varphi(u) + \varphi'(u)]$
$= \psi(\varphi(u)) + \psi(\varphi'(u)) = (\psi \circ \varphi)(u) + (\psi \circ \varphi')(u)$
$= [\psi \circ \varphi + \psi \circ \varphi'](u)$

D'où (1).

- $[(\psi + \psi') \circ \varphi](u) = (\psi + \psi')(\varphi(u)) = \psi(\varphi(u)) + \psi'(\varphi(u))$
$= (\psi \circ \varphi)(u) + (\psi' \circ \varphi)(u) = [\psi \circ \varphi + \psi' \circ \varphi](u)$

D'où (2) (ici, on n'a pas utilisé la linéarité…)

- $[\psi \circ (\lambda.\varphi)](u) = \psi[(\lambda.\varphi)(u)] = \psi[\lambda.\varphi(u)] = \lambda.\psi(\varphi(u)) = \lambda.(\psi \circ \varphi)(u)$
$= [\lambda.(\psi \circ \varphi)](u)$

D'où (3)

- $[(\lambda.\psi) \circ \varphi](u) = (\lambda.\psi)(\varphi(u)) = \lambda.(\psi(\varphi(u)) = \lambda.(\psi \circ \varphi)(u)$
$= [\lambda.(\psi \circ \varphi)](u)$

D'où (4) (on n'a pas non plus utilisé la linéarité)

Conséquence :

$\circ$ définit une loi de composition interne sur $L(E)$, et $(L(E),+,\circ)$ est un anneau :

$(L(E),+)$ est un groupe commutatif (car $(L(E),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev).

De plus, il résulte de (1) et (2) que $\circ$ est distributive sur +, et on sait que $\circ$ est associative (vrai dans $\mathfrak{F}(E,E)$).

Enfin, il y a un neutre, à savoir Id_E.

Attention, l'anneau n'est ni commutatif ni intègre en général.

Exemple :

$f: \begin{array}{c}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\\ (x,y) \mapsto (x,x)\end{array}$, $g: \begin{array}{c}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\\ (x,y) \mapsto (x-y,0)\end{array}$.

Alors $f \in L(\mathbb{R}^2)$:

Soient $u,u' \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$, $u = (x,y), u' = (x',y')$. Alors :

$f(u + \lambda.u') = f((x,y) + \lambda.(x',y')) = f(x + \lambda.x', y + \lambda.y')$
$= (x + \lambda.x', x + \lambda.x') = (x,x) + \lambda.(x',x')$
$= f(u) + \lambda.f(u')$

Et $g \in L(\mathbb{R}^2)$:

Soient $u,u' \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$, $u = (x,y), u' = (x',y')$. Alors :

$g(u + \lambda.u') = g((x,y) + \lambda.(x',y')) = g(x + \lambda.x', y + \lambda.y')$
$= (x + \lambda.x' - (y + \lambda.y'),0) = (x - y,0) + \lambda.(x' - y',0)$
$= g(u) + \lambda.g(u')$

On a alors :

$f \circ g: \begin{array}{c}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\\ (x,y) \mapsto (x-y,x-y)\end{array}$ et $g \circ f: \begin{array}{c}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\\ (x,y) \mapsto (0,0)\end{array}$

Ce qui montre la non commutativité et la non intégrité.

3) Inversion (éventuelle)

Proposition :

Soit $\varphi \in L(E,F)$. Si φ est bijective, alors $\varphi^{-1} \in L(F,E)$. On dit alors que φ est un isomorphisme de *E* vers *F*.

Deux espaces vectoriels sont dis isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme de l'un vers l'autre.

Démonstration :

Soient $v, v' \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On doit montrer que $\varphi^{-1}(v+\lambda.v') = \varphi^{-1}(v) + \lambda.\varphi^{-1}(v')$, c'est-à-dire que $v+\lambda.v'$ a pour antécédent $\varphi^{-1}(v)+\lambda.\varphi^{-1}(v')$ par φ, ce qui est vrai car $\varphi(\varphi^{-1}(v)+\lambda.\varphi^{-1}(v')) = \varphi(\varphi^{-1}(v)) + \lambda.\varphi(\varphi^{-1}(v')) = v+\lambda.v'$

Vocabulaire :

Automorphisme de *E* = application linéaire bijective de *E* dans *E*.
= isomorphisme de *E* dans *E*.
= endomorphisme bijectif de *E*.

L'ensemble des automorphismes de *E* est noté $GL(E)$.

Alors $GL(E)$ est stable $\circ$, et $(GL(E),\circ)$ est un groupe (le groupe linéaire de *E*). C'est le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(L(E),+,\circ)$.

Attention, ce groupe n'est pas non plus commutatif en général.

Exemple :

Soient $f: \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y)\end{array}$ et $g: \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (y,x)\end{array}$

Alors *f* et *g* sont linéaires et bijectives.

(*g* est bijective car involutive, et $f \circ f = 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, donc $f^{-1} = \frac{1}{2} f$)

Et :

$$\left.\begin{array}{l} f\circ g : (x,y) \mapsto (y+x, y-x) \\ g\circ f : (x,y) \mapsto (x-y, x+y) \end{array}\right\} g\circ f \neq f\circ g \text{ car } \left\{\begin{array}{l} g\circ f(1,1) = (0,2) \\ f\circ g(1,1) = (2,0) \end{array}\right.$$

4) Autre opération

Soit *f* une application linéaire de *E* dans $\mathbb{K}$ (une forme linéaire de *E*).

Soit $w_0 \in F$.

Alors l'application $\phi : \begin{array}{l} E \to F \\ u \mapsto f(u).w_0 \end{array}$ est linéaire.

En effet :

Soient $u, v \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$\phi(u+\lambda.v) = f(u+\lambda.v).w_0 = f(u).w_0 + \lambda.f(v).w_0 = \phi(u) + \lambda.\phi(v)$

Exemple :

L'application $P_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto x \end{array}$ est linéaire :

Pour tous $u = (x,y,z), u' = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$P_1(u+\lambda.u') = P_1((x+\lambda.x', y+\lambda.y', z+\lambda.z')) = x+\lambda.x' = P_1(u) + \lambda.P_1(u')$

P_1 est la « première projection canonique de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$ »

De même, $P_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto y \end{array}$ et $P_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto z \end{array}$ sont linéaires.

- Il résulte du 1) que pour tous $a,b,c \in \mathbb{R}$, $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto a.x+b.y+c.z \end{array}$ est linéaire, car $f = aP_1 + bP_2 + cP_3$.

- Et du 4) que pour tout $a,b,c \in \mathbb{R}$, $f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (a.x+b.y+c.z,0) \end{array}$ est linéaire, car $f_1 = f.(1,0)$: $f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ u \mapsto f(u).(1,0) \end{array}$

De même, $f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (0,a'.x+b'.y+c'.z) \end{array}$

D'où $F : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (a.x+b.y+c.z,a'.x+b'.y+c'.z) \end{array}$ est linéaire.

On verra que toutes les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ sont de ce type.

(On peut généraliser le résultat à $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p$)

V Quelques endomorphismes intéressants

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-ev.

A) Homothétie (vectorielle)

Définition :

Une homothétie de *E* est une application du type : $\begin{array}{l} E \to E \\ u \mapsto \alpha.u \end{array}$, où $\alpha \in \mathbb{K}$.

Proposition :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, l'application $f_\alpha : \begin{array}{l} E \to E \\ u \mapsto \alpha.u \end{array}$, appelée homothétie de rapport α est linéaire. Elle est nulle si $\alpha = 0$, sinon elle est bijective, d'inverse $f_{1/\alpha}$

B) Projecteurs (vectoriels)

Définition :

Soient *F*, *G* deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de *E*. Le projecteur sur *F* selon *G* est l'application $p : \begin{array}{l} E \to E \\ u \mapsto v \end{array}$, où v est l'élément de *E* tel que $u = v + w$ avec $v \in F, w \in G$. (la définition a bien un sens, car tout élément de *E* s'écrit $v + w$ de manière unique avec $v \in F$ et $w \in G$)

On écrit parfois $p : \begin{array}{l} E = F \oplus G \to E \\ u = v + w \mapsto v \end{array}$.

Proposition :

L'application *p* est linéaire, de noyau *G* et d'image *F*.

Démonstration :

Soient $u, u' \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. Alors $u = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in G}, u' = \underbrace{v'}_{\in F} + \underbrace{w'}_{\in G}$.

Donc $u + \lambda.u' = \underbrace{v + \lambda.v'}_{\in F} + \underbrace{w + \lambda.w'}_{\in G}$, soit $p(u + \lambda.u') = v + \lambda.v' = p(u) + \lambda.p(u')$.

Noyau :

Soit $u \in E$, $u = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in G}$. On a les équivalences :

$u \in \ker p \Leftrightarrow p(u) = 0_E \Leftrightarrow v = 0_E \Leftrightarrow u \in G$

Image :

On voit déjà que $\operatorname{Im} p \subset F$. Inversement, $F \subset \operatorname{Im} p$ car tout élément v de F est l'image d'un élément de *E*, par exemple lui-même.

Définition :

Soit $f : E \to E$. On dit que *f* est un projecteur lorsqu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans *E* tels que *f* est le projecteur sur *F* selon *G*.

Vocabulaire :

p est le projecteur sur *F* selon *G*.

Pour $u \in E$, $p(u)$ est la projection de *u* sur *F* selon *G*.

Théorème :

Soit $f \in L(E)$.

Alors *f* est un projecteur $\Leftrightarrow f \circ f = f$.

Démonstration :

Soit *f* un projecteur, disons sur *F* selon *G* où $F \oplus G = E$

Alors $f^2 = f$:

Soit $u \in E$. $u = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in G}$, et $f(u) = v$.

De plus, $f \circ f(u) = f(f(u)) = f(v) = v = f(u)$.

C'est valable pour tout *u*, donc $f^2 = f$.

Soit $f \in L(E)$, supposons que $f \circ f = f$.

Posons $F = \operatorname{Im} f$ et $G = \ker f$.

Alors déjà *F* et *G* sont deux sous-espaces vectoriels de *E*. Montrons qu'ils sont supplémentaires.

Soit $u \in E$. Alors $f(u) \in F$, et on a :

$u = \underbrace{f(u)}_{\in F} + u - f(u)$

$f(u - f(u)) = f(u) - f(f(u)) = 0_E$, donc $u - f(u) \in G$

Donc déjà $F + G = E$.

Montrons maintenant que $F \cap G = \{0_E\}$:

Soit $u \in F \cap G$.

$u \in F$. Donc $u = f(u')$ où $u' \in E$.

Comme $u \in G$, $f(u) = 0_E$, soit $f(f(u')) = 0_E$. Comme $f^2 = f$, $f(u') = 0_E$.

Donc $u = f(u') = 0_E$, d'où une première inclusion, et l'égalité, l'autre inclusion étant évidente.

Donc $F \oplus G = E$

Montrons maintenant que *f* es le projecteur sur *F* selon *G*.

Soit $u \in E$.

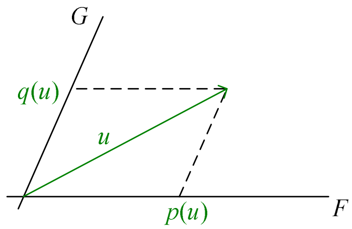
Alors $u = \underbrace{f(u)}_{\in F} + \underbrace{(u - f(u))}_{\in G}$. Donc $f(u)$ est la composante selon *F* dans la décomposition de *u* sous la forme $\underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in G}$

Remarque :
Si p est le projecteur sur F selon G, alors :

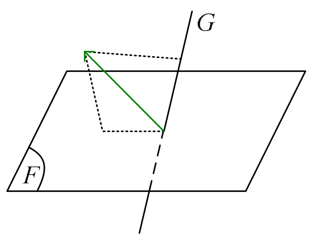
$$\begin{aligned} F &= \{u \in E, p(u) = u\} \\ &= \text{ensemble des invariants par } p \\ &= \ker(p - \mathrm{Id}_E) \end{aligned}$$

En effet, $\underbrace{p(u) = u}_{(p-\mathrm{Id}_E)(u)=0_E} \Leftrightarrow v = u \Leftrightarrow w = 0 \Leftrightarrow u \in F$

Définition :
Soit p la projection sur F selon G.
Le projecteur associé à p est le projecteur q sur G selon F.
Ainsi, $p + q = \mathrm{Id}_E$.



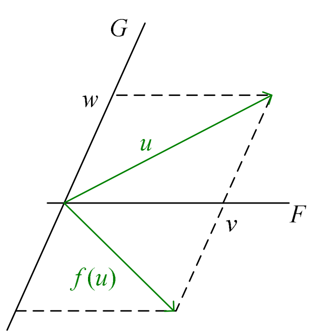
$u = p(u) + q(u)$



Cas particuliers :
Le projecteur sur E selon $\{0_E\}$ est l'identité sur E.
Le projecteur sur $\{0_E\}$ selon E est l'application nulle.

C) Symétries (vectorielles)

Définition :
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. La symétrie par rapport à F selon G est l'application $f : \begin{array}{l} E = F \oplus G \to E \\ u = v + w \mapsto v - w \end{array}$.



Proposition :

Si f est le symétrique par rapport à F selon G, alors :

- $f \in L(E)$.

En effet, on remarque que $f = p - q = 2p - \mathrm{Id}_E$, où p est le projecteur sur F selon G et q le projecteur associé à p)

- f est bijective, et même involutive.

Ainsi, $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, $\mathrm{Im}\, f = E$ (car f est surjective), et $\ker f = \{0_E\}$ (car f est injective)

- $F = \{u \in E, f(u) = u\} = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$

  $G = \{u \in E, f(u) = -u\} = \ker(f + \mathrm{Id}_E)$

Théorème :

Soit $f \in L(E)$.

Alors f est une symétrie $\Leftrightarrow f \circ f = \mathrm{Id}_E$

($\Leftrightarrow$ f est involutive)

($\Leftrightarrow$ f est élément d'ordre ≤ 2 du groupe $GL(E)$)

Démonstration :

$\Rightarrow$ a déjà été vu.

$\Leftarrow$: supposons que $f^2 = \mathrm{Id}_E$.

Posons $F = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

Alors F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, car ce sont des noyaux d'endomorphismes de E.

$F \cap G = \{0_E\}$ car si $u \in F \cap G$, alors $f(u) = u$ et $f(u) = -u$,

donc $2.u = 0_E$, soit $u = 0_E$ (car $2 \neq 0$)

De plus tout élément u de E s'écrit $u = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in G}$, car $u = \frac{1}{2}(u + f(u)) + \frac{1}{2}(u - f(u))$.

Or, $u + f(u) \in F$ car $f(\underbrace{u + f(u)}_{x}) = f(u) + f(f(u)) = f(u) + u = \underbrace{u + f(u)}_{x}$

Et $u - f(u) \in G$ car $f(u - f(u)) = f(u) - f(f(u)) = f(u) - u = -(u + f(u))$

Enfin, f est la symétrie par rapport à F selon G. En effet :

Si $u = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in G}$, on a $v = \frac{1}{2}(u + f(u))$ et $w = \frac{1}{2}(u - f(u))$.

Donc $v - w = f(u)$.

VI Familles libres (finies)

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-ev.

A) Définition

Soit $\mathfrak{F} = (u_1, u_2, \dots u_n)$ une famille de vecteurs de E.

F est libre $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ la seule combinaison linéaire des u_i qui donne 0_E est celle dont tous les coefficients sont nuls.

$$\Leftrightarrow \forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0 \right)$$

Vocabulaire :

- $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est liée $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ $(u_1, u_2, \dots u_n)$ n'est pas libre.
- Lorsque $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est liée, une relation du type $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E$ où les λ_k sont non tous nuls s'appelle une relation de dépendance linéaire.
- Pour dire que $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est libre, on dit parfois que les u_i sont linéairement indépendants.

Exemples :

- Par convention, une famille vide est libre.
- Cas d'une famille de 1 vecteur u_1.

La famille (u_1) est libre $\Leftrightarrow u_1 \neq 0_E$

- Cas d'une famille de 2 vecteurs u_1, u_2

(u_1, u_2) est libre si et seulement si u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.

B) Propriétés générales

- Si une famille contient 0_E, elle est liée :

Si $u_i = 0_E$, alors $\underbrace{1}_{\neq 0}.u_i = 0_E$

- Si une famille contient deux vecteurs égaux, elle est liée :

Si $u_i = u_j$ (avec $i \neq j$), alors $u_i - u_j = 0_E$

- Si une sous-famille d'une famille $\mathfrak{F}$ est liée, alors $\mathfrak{F}$ est liée.
- Si $\mathfrak{F} = (u_1, u_2, \dots u_n)$ est libre, alors $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n (u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots u_{\sigma(n)})$ est libre.
- Si $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est libre et $(u_1, u_2, \dots u_n, v)$ est liée, alors $v \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots u_n)$.

En effet :

Il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n, \mu$ scalaires non tous nuls tels que :

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots \lambda_n u_n + \mu.v = 0_E$.

Alors $\mu \neq 0$, car sinon l'un des λ_i au moins serait non nul et on aurait alors une relation de dépendance entre les $u_i, 1 \leq i \leq n$. Donc $v = \mu^{-1} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$

- $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est liée si et seulement si l'un au moins des u_i est combinaison linéaire des autres.

VII Bases (finies)

Définition, proposition :

Soit $(u_1, u_2, \dots u_n)$ une famille de vecteurs de E.

$(u_1, u_2, \dots u_n)$ est une base de E $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est une famille libre et génératrice de E.

$\Leftrightarrow$ tout vecteur v de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $u_i, 1 \leq i \leq n$, sous la forme $\sum_{k=1}^{n} x_k u_k$. Les x_k s'appellent alors les composantes de v dans la base $(u_1, u_2, \dots u_n)$.

Démonstration :

$\Rightarrow$: supposons que $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est une base de *E*.

Soit alors $v \in E$.

Comme $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est génératrice de *E*, il existe $(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k$.

Supposons qu'on ait aussi $v = \sum_{k=1}^{n} x'_k u_k$.

Alors $\sum_{k=1}^{n} (x_k - x'_k) u_k = 0_E$. Comme $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est libre, on a $\forall k \in [\![1, n]\!], x_k - x'_k = 0$, soit $\forall k \in [\![1, n]\!], x_k = x'_k$.

D'où l'existence et l'unicité de l'écriture.

$\Leftarrow$: Supposons que tout vecteur *v* de *E* s'écrit de manière unique…

Déjà, $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est génératrice de *E*.

Ensuite, si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$, alors nécessairement $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$, car sinon on aurait deux écritures différentes de 0_E, à savoir $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ et $\sum_{i=1}^{n} 0.u_i$.

Exemples :

$[(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)]$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on l'appelle la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$[(-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)]$ en est aussi une. Le triplet des composantes d'un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ dans cette base est $\left(\frac{z+y}{2}, \frac{z+x}{2}, \frac{x+y}{2} \right)$.

$[\underbrace{(1, \sqrt{\pi}, 12)}_{u}, \underbrace{(e, 4, 1)}_{v}, \underbrace{(1,0,0)}_{w}]$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$:

Soit $\vec{x} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

On doit montrer qu'il existe un unique triplet de $\mathbb{R}^3$ tel que $\vec{x} = x.u + y.v + z.w$

L'équation vectorielle équivaut au système :

$$(S) \begin{cases} x + e.y + z = a \\ \sqrt{\pi} x + 4y = b \\ 12x + y = c \end{cases}$$

$$\text{Or, } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + e.y + z = a \\ x = \dfrac{b - 4c}{\sqrt{\pi} - 48} \\ y = c - 12 \dfrac{b - 4c}{\sqrt{\pi} - 48} \end{cases}$$

Donc (*S*) a bien une unique solution.