Chapitre 9 : $\mathbb{K}$-algèbres

$\mathbb{K}$ désigne ici toujours un corps (commutatif)

I Définition

Soit E un ensemble, muni de deux lois internes $\oplus$ et $\otimes$, et d'une loi externe à opérateurs dans $\mathbb{K}$, $\cdot$.

Alors $(E,\oplus,\otimes,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre lorsque :
- $(E,\oplus,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev.
- La loi $\otimes$ est associative et admet un élément neutre (qu'on note 1_E)
- La loi $\otimes$ est distributive sur la loi $\oplus$.
- Pour tous $u,v\in E$, et tout $\lambda\in\mathbb{K}$, $(\lambda u)\otimes v = u\otimes(\lambda v)=\lambda(u\otimes v)$

Notation : les lois $\oplus$ et $\otimes$ sont généralement notées + et $\times$.
Exemples :
$\mathbb{R}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre (pour les lois usuelles), et $\mathbb{C}$ aussi. ($\mathbb{C}$ est aussi une $\mathbb{C}$-algèbre).
$(\mathfrak{F}(X,\mathbb{K}),+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, X étant un ensemble quelconque.

II Sous-algèbres

Définition :
Une sous-algèbre d'une $\mathbb{K}$-algèbre $(E,+,\times,\cdot)$, c'est une partie F de E qui contient 1_E et qui est stable pour chacune des trois lois, c'est-à-dire :
- $1_E\in F$ - $\forall(u,v)\in F^2, u+v\in F$ et $u\times v\in F$ - $\forall u\in K, \forall\lambda\in\mathbb{K}, \lambda u\in F$

Proposition :
Une sous-algèbre d'une $\mathbb{K}$-algèbre est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemple :
L'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ constitue une sous-algèbre de l'algèbre $(\mathfrak{F}(\mathbb{K},\mathbb{K}),+,\times,\cdot)$.

III Morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre

Définition :
Soient $(E,+,\times,\cdot)$, $(F,+,\times,\cdot)$ deux $\mathbb{K}$-algèbres. Soit $\varphi: E\to F$. Alors φ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres lorsque :
- $\forall(u,v)\in E^2, \varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v)$
- $\forall(u,v)\in E^2, \varphi(u\times v)=\varphi(u)\times\varphi(v)$
- $\forall u\in E, \forall\lambda\in\mathbb{K}, \varphi(\lambda u)=\lambda\varphi(u)$
- $\varphi(1_E)=1_F$

Exemple :
L'ensemble des suites convergentes est une sous algèbre de la $\mathbb{R}$-algèbre des suites réelles, et l'application qui à une suite convergente associe sa limite est un morphisme d'algèbres.