Chapitre 11 : Application du principe fondamental de la dynamique

I Degrés de liberté

- Détermination du degré de liberté
- Définir autant de paramètres que nécessaire :

Relations cinématiques : relations sans faire intervenir le principe fondamental de la dynamique.

II Système

- Définir le système :

Permet de distinguer les forces intérieures des forces extérieures

Pour certains théorèmes, le système doit être fermé.

- Système composé à un degré de liberté :

Les différentes peuvent être liées les unes aux autres, il vaut mieux à ce moment là prendre le système tout entier.

Si au contraire les différentes parties sont indépendantes, il vaut mieux fractionner.

III Référentiel du mouvement

- Définir le référentiel du mouvement :

(Est-il galiléen ?)

- Si le référentiel n'est pas galiléen :

Il faut connaître le mouvement du référentiel.

IV Actions extérieures

- Actions de champs (dont forces d'interactions si le référentiel n'est pas galiléen)
- Actions de contact

V Principe fondamental

- Théorèmes :
- Théorème de la résultante dynamique :

$m\vec{a}(G) = \vec{F}_{\text{ext}}$ (3 équations scalaires)

- Théorème de la résultante cinétique :

$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$, pour un système fermé (3 équations scalaires)

- Théorème du moment cinétique par rapport à un point :

$$\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt}=\vec{M}(A)+m\vec{v}(G)\wedge\vec{v}(A)$$ (3 équations scalaires)

- Théorème du moment cinétique par rapport à un axe :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt}=M_\Delta\text{, }\Delta$$ fixe ou de direction fixe passant par G. (1 équation scalaire)

- Théorème de l'énergie cinétique :

$\Delta E_c=W_{\text{ext}}+W_{\text{int}}$ (1 équation scalaire)

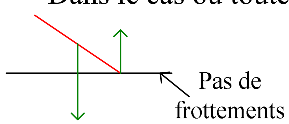
- Théorème de conservation de l'énergie mécanique :

$E_c+E_p=\text{cte}$ (1 équation scalaire)

- Si il y a des forces de contact – non données :
- Essayer d'appliquer les théorèmes ne faisant pas intervenir les actions de contact
- Choisir sinon un système d'axes où les lois de Coulomb s'expriment simplement.
- Ne pas confondre roulement sans glissement $\vec{R}=\vec{T}+\vec{N}$

  Et glissement sans frottement $\vec{R}=\vec{N}$
- Contacts non dissipatifs : les forces de contact peuvent quand même travailler.

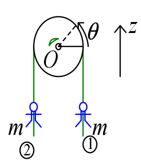
- Systèmes conservatifs à un seul degré de liberté : TCEM
- Système avec rotation autour d'un axe : TMC
- Dans le cas où toutes les actions sont verticales (ou ont la même direction) :



On sait qu'alors $\vec{a}(G)$ sera vertical.

VI Compléments

A) Singes



Le singe 1 veut monter à la corde pour attraper la banane (2 dort).
Lequel des deux l'attrapera ?

- Degrés de liberté :

Trois paramètres z_1, z_2, θ.

z_1 peut varier indépendamment, et $\dot{z}_2=-R\dot{\theta}$.

- On veut ici le mouvement de 1 par rapport à 2 : on prend le système {poulie + fil + singe 1 + singe 2}
- Le système n'est pas conservatif, puisque le singe est déformable.
- On suppose la poulie sans masse et sans frottements sur l'axe :

Le système est soumis aux actions $[\vec{P}_1],[\vec{P}_2],[\vec{R}]$.

Théorème du moment cinétique par rapport à Ox :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = M_\Delta = 0 .$$

Donc $\sigma_\Delta = \text{cte} = 0$ (les singes sont initialement à l'arrêt)

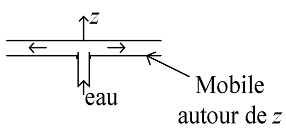
On a $\sigma_\Delta = m\dot{z}_1 R - m\dot{z}_2 R = 0$. Donc $\dot{z}_1 = \dot{z}_2$.

- On suppose la poulie avec une masse, toujours sans frottement.

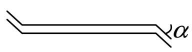
On a toujours $\sigma_\Delta = 0$, mais $\sigma_\Delta = m\dot{z}_1 R - m\dot{z}_2 R + J_\Delta \dot{\theta}$

Comme $\dot{\theta} = \dfrac{-\dot{z}_2}{R}$, on a $\dot{z}_2 = \dfrac{\dot{z}_1}{1 + \dfrac{J_\Delta}{mR^2}}$; donc le singe 2 monte moins vite, et c'est 1 qui attrapera la banane.

B) Tourniquet hydraulique



Aux extrémités du tube :



(On suppose les buses très courtes)

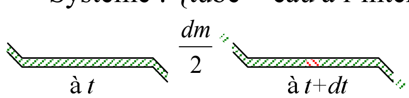
D_m : débit massique d'éjection.

Frottement solide :

M_{Δ_f} : Si $\omega \neq 0$, $\left|M_{\Delta_f}\right| = \Gamma = \text{cte}$ et $\text{sgn}(M_{\Delta_f}) = -\text{sgn}(\omega)$.

Si $\omega = 0$, $\left|M_{\Delta_f}\right| \leq \Gamma$

- Référentiel terrestre galiléen.
- Système : {tube + eau à l'intérieur à l'instant t }



Ainsi, $dm = D_m dt$

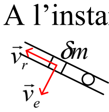
- Actions sur le système :

$[\vec{P}]$, $[\vec{R}]$, $[\vec{F}_p]$ (forces de pression exercées par l'extérieur sur le tube et par ce qui monte dans le tuyau)

- Théorème du moment cinétique par rapport à $\Delta = Oz$:

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = M_\Delta \text{ (le système est fermé).}$$

A l'instant t :



$\overrightarrow{OP} \wedge \delta m \vec{v}_r = \vec{0}$

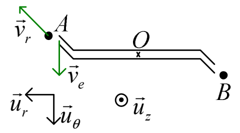
$\sigma_\Delta(t) = J_\Delta \omega(t) + J'_\Delta\, \omega(t) = I_\Delta \omega(t)$

(J'_Δ : moment d'inertie de l'eau « figée » dans le tube)

Et $\sigma_\Delta(t + dt) = J_\Delta \omega(t + dt) + J'_\Delta\, \omega(t + dt) + \delta\sigma_\Delta$

(La variation de moment d'inertie dû au départ de la masse du centre de l'axe est en dm^3, donc négligeable : $dJ'_\Delta = \delta m.\delta r^2 \propto \delta m^3$)

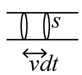
Pour $\delta\sigma_\Delta$:



$$\delta\sigma_\Delta = \left(\overrightarrow{OA} \wedge \frac{dm}{2}\vec{v}_a(A) + \overrightarrow{OB} \wedge \frac{dm}{2}\vec{v}_a(B)\right)\cdot\vec{u}_z = \overrightarrow{OA} \wedge dm.\vec{v}_a(A)\cdot\vec{u}_z$$

On a $\vec{v}_a(A) = \vec{v}_r(A) + \vec{v}_e(A) = \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ -v\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R\omega \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\delta\sigma_\Delta = dm\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ R\omega - v\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\vec{u}_z = dm.R(R\omega - v\sin\alpha)$



On a $D_m dt = 2\rho.s.v.dt$, donc $D_m = 2\rho.s.v$ (pour le facteur 2 : on a deux buses)

Ainsi, $\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = I_\Delta\frac{d\omega}{dt} + D_m R(R\omega - v\sin\alpha)$

Calcul de M_Δ :

$M_\Delta(\vec{P}) = 0$

Pour M_{Δ_f} : en supposant $\omega > 0$, $M_{\Delta_f} = -\Gamma$.

$M_\Delta(\vec{F}_p)$:

La pression est uniforme et égale à P_0 partout sauf sur la section du tube.

Pour cette section, la force de pression correspondante passe par *O*, donc son moment est nul. On peut donc considérer que la pression à cet endroit vaut aussi P_0.

Dans le cas général où un système est soumis à une pression P_0 uniforme :

$$M_{\Delta_p} = \oiint \overrightarrow{OM} \wedge (-P_0 d\vec{S})\cdot\vec{u}_z = P_0 \oiint (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}_z)\cdot d\vec{S}$$
$$= P_0 \iiint \vec{\nabla}\cdot(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}_z)d\tau$$

Or, $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$, et donc $\vec{\nabla}\cdot\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}_z = 0$

Ainsi, $M_{\Delta_p} = 0$.

Et $\oiint -P_0 d\vec{S} = P_0 \oiint -d\vec{S} = \vec{0}$

Dans ce cas, on a ainsi $M_\Delta(\vec{F}_p) = 0$

Ainsi, le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$I_\Delta\frac{d\omega}{dt} + D_m R^2\omega = D_m Rv\sin\alpha - \Gamma = \frac{D_m^2 R\sin\alpha}{2\rho.s} - \Gamma$$

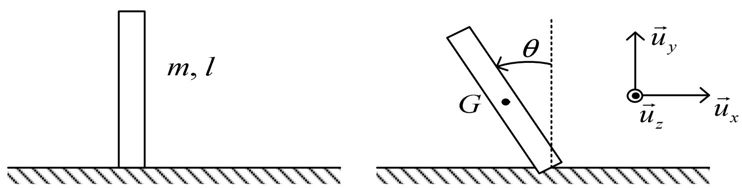
Donc $\omega = \omega_l (1 - e^{-t/\tau})$, avec $\omega_l = \dfrac{D_m \sin\alpha}{2\rho.s.R} - \dfrac{\Gamma}{D_m R^2}$ et $\tau = \dfrac{I_\Delta}{D_m R^2}$.

- Discussion :

Le résultat est satisfaisant physiquement : la vitesse limite est d'autant plus grande que D_m l'est, et τ est d'autant plus bref que le débit massique est important et que le tourniquet est moins inerte.

Validation de l'hypothèse que $\omega > 0$: il faut que $\omega_l > 0$, soit $D_m > f(\Gamma) \dots$

C) Règle lâchée sur un plan poli



(On abandonne la règle avec un angle très faible avec la verticale)

1) Degré de liberté

- Pour un solide en général, on a 6 degrés de liberté
- Ici, comme on a une règle, on n'en a que 5 (pas de rotation propre)
- Tant qu'il y a contact de la règle, on n'a que 4 degrés de liberté (2 de translation et 2 de rotation : x_G, z_G, θ, ψ (nutation, précession))

2) Actions sur la règle dans le référentiel d'étude, galiléen

La règle n'est soumise qu'à son poids et à la réaction du support, et ces deux forces sont verticales.

3) Théorème de la résultante dynamique

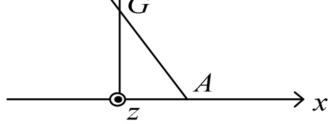
On a, sur les axes *Oz*, *Ox* :

$m\ddot{z} = 0$, $m\ddot{x} = 0$

Donc $\dot{z} = \text{cte} = 0$, $\dot{x} = \text{cte} = 0$.

Donc on peut faire en sorte que $z = x = \text{cte} = 0$

Ainsi, *G* a un mouvement uniquement vertical, selon *Oy*.



4) Théorème du moment cinétique par rapport à G.

On a $\dfrac{d\vec{\sigma}(G)}{dt}=\overrightarrow{GA}\wedge\vec{R}$, donc la tige tombe dans un plan, par exemple xOy.

Et $\psi=\text{cte}=0$ (A $t=0$, $\vec{\sigma}(G)=\vec{0}$)

Ainsi, seul θ varie.

5) Première phase : contact avec le plan

On projette le théorème de la résultante dynamique sur Oy :

$m\ddot{y}=-mg+N$, et $y=\dfrac{l}{2}\cos\theta$.

Donc $\dot{y}=-\dfrac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta$, $\ddot{y}=-\dfrac{l}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta-\dfrac{l}{2}\sin\theta.\ddot{\theta}$

Ainsi, l'équation précédente s'écrit :

$m\dfrac{l}{2}(\dot{\theta}^2\cos\theta+\sin\theta.\ddot{\theta})=mg-N$

D'autre part, d'après le théorème du moment cinétique par rapport à Gz :

$\dfrac{d\sigma_\Delta}{dt}=M_\Delta$, donc $\dfrac{ml^2}{12}\ddot{\theta}=N\dfrac{l}{2}\sin\theta$

En utilisant le théorème de conservation de l'énergie mécanique, on obtient aussi : $(1+3\sin^2\theta)\dot{\theta}^2=\dfrac{12g}{l}(1-\cos\theta)$

6) Fin de la phase 1

C'est lorsque $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ou $N=0$.

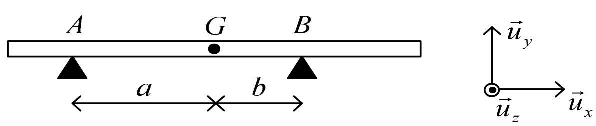
Si $N=0$, on a alors $\ddot{\theta}=0$, donc $\dfrac{l}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta=g$, soit $\dot{\theta}^2=\dfrac{2g}{\cos\theta}$

Donc $\dfrac{1+3\sin^2\theta}{\cos\theta}=6(1-\cos\theta)$, soit $1+3\sin^2\theta=6(\cos\theta-\cos^2\theta)$

Puis $3\cos^2\theta-6\cos\theta+4=0$, équation dont le discriminant est négatif.

La règle ne va donc pas décoller pendant le mouvement.

D) Expérience de Summerfeld



On considère que les coefficients de frottement statique et dynamique des couteaux sur la planche sont f_0, f avec $f_0>f$.

On rapproche les couteaux très lentement (de sorte que $a+b$ diminue)

On suppose initialement que $a_0 > b_0$

La règle est soumise à son poids, et aux actions de contact (les actions tangentielles sont dirigées vers le centre)

On applique le théorème du moment cinétique par rapport à Gz :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = N_B \times b - N_A \times a$$

Et d'autre part, $\sigma_\Delta = 0$ (la planche est immobile dans son référentiel barycentrique)

Donc $N_B \times b = N_A \times a$.

On applique le théorème de la résultante dynamique :

On a $m\ddot{x} = \overline{T}_A + \overline{T}_B = 0$ (on suppose le déplacement très lent)

Et $m\ddot{y} = 0 = N_A + N_B - mg$, soit $N_A + N_B = mg$

Donc $N_A = \dfrac{b}{a+b}mg$, $N_B = \dfrac{a}{a+b}mg$

Phase 1 :

On a $T_A = T_B$ (en module)

Donc comme $N_A \neq N_B$, on ne peut pas avoir glissement simultanément pour les deux couteaux (c'est-à-dire $T_A = fN_A$, $T_B = fN_B$ en même temps)

Celui qui va démarrer sera celui qui a la valeur de N la plus faible, c'est-à-dire le couteau A.

On a donc glissement en A, pendant que B reste fixe. Donc $T_A = fN_A$, $T_B < f_0 N_B$

Ainsi, a diminue, et b reste constant. Donc N_A augment alors que N_B diminue.

Donc T_B augmente, N_B diminue jusqu'à ce que le contact en B lâche, et alors A s'immobilisera.

(Ceci tant que $T_B < f_0 N_B$, c'est-à-dire $fN_A < f_0 N_B$, soit $a > \frac{f}{f_0} b_0 = a_1$)

Phase 2 :

Pendant cette phase, B glisse et A ne glisse pas, donc b diminue et $a = a_1 < b$.

On a donc un cas analogue.

On obtient donc une suite géométrique pour a et b, de raison $(\frac{f}{f_0})^2$.

Donc en aucun cas la règle ne se mettra à basculer (c'est-à-dire que G restera toujours entre A et B)

Ceci permet de mettre en évidence la différence entre les coefficients de frottement statiques et dynamiques.