

# Chapitre 15 : Propagation des ondes électromagnétiques

## I Propagation des ondes électromagnétiques (OEM) dans le vide

### A) Equation de propagation

Dans le vide, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Les équations de Maxwell–Faraday et Maxwell–Ampère donnent :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}, \quad \vec{\nabla}^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Ainsi, l'onde se propage avec une célérité  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

Remarque :

En coordonnées cartésiennes,  $\vec{\nabla}^2 \vec{E} = (\vec{\nabla}^2 E_x, \vec{\nabla}^2 E_y, \vec{\nabla}^2 E_z)$

### B) Ondes planes progressives (OPP)

Ondes :  $\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)$

Ondes planes :  $\vec{E}(x, t), \vec{B}(x, t)$  (OP)

Ondes planes progressives :  $\vec{E}(t - \frac{x}{c}) / \vec{E}(t + \frac{x}{c})$  (régressive)

Remarque :

Une onde plane solution de l'équation d'onde classique se met sous la forme d'une onde plane progressive et d'une onde plane régressive :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_+(t - \frac{x}{c}) + \vec{E}_-(t + \frac{x}{c})$$

#### 1) Formalisme vectoriel

Pour une onde plane progressive  $s(x, t) = \tilde{s}(u)$  :

$$\text{On a } \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{d\tilde{s}}{du} \times \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1}{c} \frac{d\tilde{s}}{du}$$

$$\text{Et } \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{d\tilde{s}}{du} \times \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{d\tilde{s}}{du}$$

Donc pour une onde plane progressive :

$$\vec{\nabla}_s = \frac{\partial s}{\partial x} \vec{u}_x = \frac{-1}{c} \frac{\partial s}{\partial t} \vec{u}_x$$

$$\text{Soit, pour l'opérateur } \vec{\nabla} : \vec{\nabla} = \frac{-1}{c} \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial t}$$

## 2) Structure de l'onde

- Les équations de Maxwell–Faraday et Maxwell–Ampère deviennent :

$$- \frac{-1}{c} \vec{u}_x \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Donc } \vec{u}_x \wedge \vec{E} = c\vec{B} + f(x)$$

Soit, pour une onde plane progressive  $\vec{u}_x \wedge \vec{E} = c\vec{B}$

( $f(x) = 0$  puisque pour une onde plane progressive,  $x$  et  $t$  sont couplés)

$$- \text{Et } \frac{-1}{c} \vec{u}_x \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Soit  $\vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{u}_x$ .

Les trois vecteurs  $\vec{E}, c\vec{B}, \vec{u}_x$  forment donc un trièdre direct.

- C'est une onde transverse électromagnétique (TEM) : elle est orthogonale à la propagation.

(Lorsque une onde est dans le sens de la propagation, on dit qu'elle est longitudinale)

- $\vec{E}, \vec{B}$  sont orthogonaux.
- On a  $\|\vec{E}\| = \|c\vec{B}\|$
- $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  n'ont pas forcément des directions fixes dans le plan transverse.

## 3) Aspect énergétique

- Densité d'énergie électromagnétique :

$$\text{On a } u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0 c^2} \vec{E}^2 = \epsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{\vec{B}^2}{\mu_0}$$

- Vecteur de Poynting :

$$\text{On a } \vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}^2 \vec{u}_x$$

- Vitesse de propagation de l'énergie :

$$\text{On a } \vec{\pi} = u_{em} \vec{v}_e$$

$$\text{Donc } \vec{v}_e = c\vec{u}_x.$$

## 4) Quantité de mouvement du champ

$$\text{On a } \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{\vec{\pi}}{c^2} = \epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$$

## C) Ondes planes progressives sinusoïdales (OPPS)

### 1) Transformation de Fourier

- Décomposition en ondes planes progressives sinusoïdales :

$$\text{On a } \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint d^3k \cdot d\omega e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tilde{\vec{E}}(k, \omega)$$

- Amplitude complexe :

$$\text{On note } \tilde{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}.$$

Pour une onde plane progressive sinusoïdale, on a :

$$\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)})$$

Remarque :

$\underline{\vec{E}}(k, \omega)$  est indépendant de  $t$  (par nature !)

Mais le vecteur lui correspondant  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  *dépend* du temps.

- Opérateurs :

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega, \quad \vec{\nabla} \leftrightarrow i\vec{k}$$

### 2) Structure de l'onde plane progressive sinusoïdale

- Equations de Maxwell en complexe :

$$\text{Maxwell-Gauss : } i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$$

$$\text{Maxwell-Flux : } i\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$$

$$\text{Maxwell-Faraday : } i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = +i\omega \underline{\vec{B}}$$

$$\text{Maxwell-Ampère : } i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -\frac{i\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}$$

- Transversalité des champs :

L'équation de Maxwell-Gauss montre que  $\underline{\vec{E}}$  est transverse.

L'équation de Maxwell-Flux montre que  $\underline{\vec{B}}$  est aussi transverse.

Donc on a une onde transverse électromagnétique.

Remarque :

Une onde plane progressive sinusoïdale est *toujours* transverse magnétique (même hors du vide)

Mais pas toujours transverse électrique (sauf si  $\underline{\rho} = 0$ )

- Relation de dispersion :

L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}}$$

Et en injectant dans l'équation de Maxwell-Ampère :

$$i\vec{k} \wedge \left( \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}} \right) = -\frac{i\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}$$

$$\text{Et, comme } \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0, \quad -\frac{\vec{k}^2}{\omega} \underline{\vec{E}} = -\frac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}$$

D'où la relation de dispersion  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

- Amplitude complexe :

- $(\vec{E}, c\vec{B}, \vec{k})$  forme un trièdre direct.

- $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$

- Dans une base  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ , où  $\vec{u}_x$  est la direction de propagation, on a :

$$\vec{k} = k\vec{u}_x$$

$$\text{On a } \vec{E} \begin{cases} 0 \\ E_{0y} e^{-i\varphi_y} \\ E_{0z} e^{-i\varphi_z} \end{cases}, \vec{B} \begin{cases} 0 \\ -\frac{E_{0z}}{c} e^{-i\varphi_z} \\ \frac{E_{0y}}{c} e^{-i\varphi_y} \end{cases}$$

- Champs réels :

$$\text{On a } \vec{E} = \text{Re}(\vec{E} e^{i(kx - \omega t)})$$

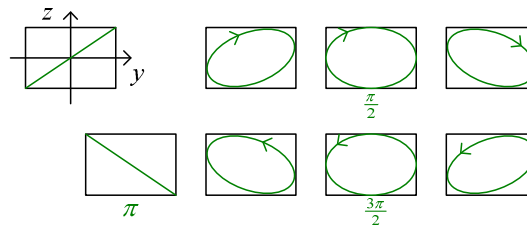
$$\text{Donc } \vec{E} \begin{cases} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi_z) \end{cases} \text{ et } \vec{B} \begin{cases} 0 \\ -\frac{E_{0z}}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi_z) \\ \frac{E_{0y}}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \end{cases}$$

### 3) Etats de polarisation

On pose  $\varphi = \varphi_z - \varphi_y$ , et on déclenche le chronomètre de façon à ce qu'on ait  $\vec{E}$  de la forme

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi) \end{cases}$$

Ainsi, en un point de l'espace,  $\vec{E}$  peut être considéré comme un oscillateur harmonique :



- Polarisation rectiligne (OPPSR) :

C'est lorsque  $\varphi = 0$  ou  $\pi$ .

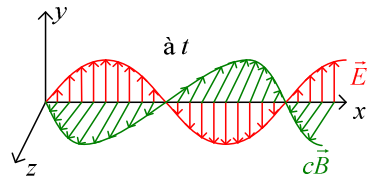
- $\vec{E}$  a une direction fixe en un point de l'espace.

En un autre point, il sera déphasé mais toujours dans la même direction.

- On choisit comme direction de  $\vec{u}_y$ , celle de  $\vec{E}$  :

$$\text{On a alors } \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \cdot \vec{u}_y$$

$$\text{Et } c\vec{B} = E_0 \cos(\omega t - kx) \cdot \vec{u}_z$$

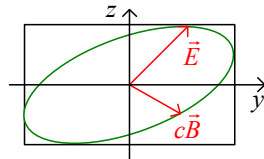


- Polarisation elliptique :

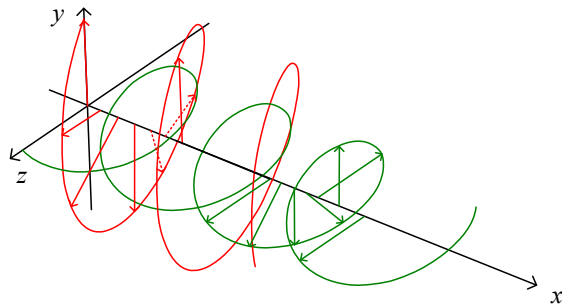
C'est le cas général :

$\vec{E}$  tourne dans le plan transverse, et pas à vitesse constante, mais selon la loi des aires.

$c\vec{B}$  suit  $\vec{E}$  avec un déphasage :



Représentation à l'instant  $t$  : guirlande torsadée :



Toute polarisation elliptique se décompose en deux ondes rectilignes (dont les axes, orthogonaux, peuvent être pris au choix)

- Polarisation circulaire :

C'est lorsque  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{3\pi}{2}$ , et  $E_{0y} = E_{0z} = E_0$



Circulaire droite



Circulaire gauche

$\vec{E}$  tourne dans ce cas à vitesse angulaire constante

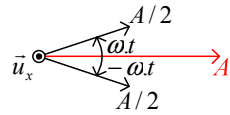
$$\text{On a } \underline{\vec{E}} = \begin{cases} 0 \\ E_0 \\ E_0 e^{-i\varphi} \end{cases}$$

$$\text{Et donc en circulaire droite } \underline{\vec{E}} = \begin{cases} 0 \\ E_0 \\ -i.E_0 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } \underline{E}_z = -i.\underline{E}_y$$

$$\text{Et en circulaire gauche } \underline{\vec{E}} = \begin{cases} 0 \\ E_0 \\ i.E_0 \end{cases}, \text{ soit } \underline{E}_z = i.\underline{E}_y$$

Toute vibration circulaire peut se décomposer en deux vibrations rectilignes orthogonales.

Toute vibration rectiligne peut aussi se décomposer en une vibration circulaire droite et une vibration circulaire gauche :



#### 4) Aspect énergétique

Attention :

Les grandeurs énergétiques sont *quadratiques*, et il faut donc faire attention pour le calcul avec les complexes (on ne peut pas faire de calcul instantané de cette manière, mais on a déjà vu des résultats pour des valeurs moyennes)

- Densité d'énergie électromagnétique :

$$\text{On a } u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = \epsilon_0 \vec{E}^2$$

$$\text{Donc } \langle u_{em} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \text{Re}(\vec{E} \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_{0,y}^2 + E_{0,z}^2)$$

Remarque : on avait déjà vu que l'énergie d'un oscillateur harmonique bidimensionnel est la somme des énergies unidimensionnelles.

Cette énergie est indépendante de l'état de polarisation.

- Vecteur de Poynting :

$$\text{On a } \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \times \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{1}{2\mu_0 c} \underline{E} \underline{E}^* \vec{u}_x$$

- Vitesse de propagation de l'énergie :

$$\text{On a } \vec{v}_e = \frac{\langle \vec{\pi} \rangle}{\langle u_{em} \rangle} = c \vec{u}_x$$

## II Propagation dans un milieu diélectrique LHI

### A) Rappel : équations de Maxwell dans un milieu LHI

$$\begin{aligned} i\vec{k} \cdot \vec{E} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} & i\vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \\ i\vec{k} \wedge \vec{E} &= +i\omega \vec{B} & i\vec{k} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \mu_r (\vec{j} - i\omega \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}) \end{aligned}$$

Où  $\rho$  et  $\vec{j}$  désignent les charges et courants libres, et  $\mu_r$ ,  $\epsilon_r$  sont complexes.

### B) Propagation dans un isolant non chargé

Dans un tel milieu (verre, plastique), il n'y a donc pas de courant libre (isolant électriquement) et le milieu n'est pas chargé ( $\rho_l = 0$ )

- Equations de Maxwell :

$$\begin{aligned} i\vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 & i\vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \\ i\vec{k} \wedge \vec{E} &= +i\omega \vec{B} & i\vec{k} \wedge \vec{B} &= -i\omega \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \end{aligned}$$

- On a donc une onde transverse électromagnétique.
- Relation de dispersion :

Dans le vide, on avait  $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$

Ici,  $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r = \epsilon_r \mu_r \frac{\omega^2}{c^2}$

- Equation d'onde :

On a des relations pour passer de la relation de dispersion à l'équation d'onde, mais il faut déjà connaître  $\epsilon_r$  et  $\mu_r$  qui sont complexes, ou au moins leur produit.

Par exemple, si  $\epsilon_r \mu_r = 1 + \frac{c^2}{(i\omega)^2} a$

On aura comme relation de dispersion  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - a$ ,

et donc avec les opérateurs  $-\bar{\nabla}^2 = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a$ , soit  $\square \vec{E} = a \vec{E}$

- Indice complexe :

On pose  $n^2 = \epsilon_r \mu_r$  (au signe près)

Ainsi, on peut écrire  $n = n' + i.n''$ , où  $n'$ ,  $n''$  sont réels ( $n'' \geq 0$ )  
 $n$  s'appelle l'indice complexe du milieu.

La relation de dispersion s'écrit ainsi  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2$

Et donc  $k = \pm \frac{\omega}{c} (n' + i.n'')$

Dans le cas où  $k = + \frac{\omega}{c} (n' + i.n'')$  (l'autre cas est analogue dans l'autre sens) :

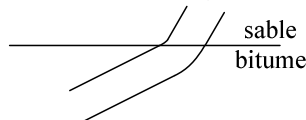
On a alors une onde de la forme  $\exp(i(kx - \omega t)) = e^{-\frac{n''\omega}{c}x} e^{i(n'\frac{\omega}{c}x - \omega t)}$

- Propagation :

On a  $v_\phi = \frac{\omega}{n' \frac{\omega}{c}} = \frac{c}{n'}$

Si  $n'$  dépend de  $\omega$ ,  $v_\phi$  en dépend aussi, et on a un milieu dispersif. Le milieu sera aussi dispersif spatialement, comme par exemple avec un prisme :

Pour le montrer sous forme d'image, on imagine l'onde changeant de milieu comme une voiture passant du bitume au sable. Lorsque cette voiture est sur le sable, elle avance moins vite, et sera déviée lorsqu'elle passe du bitume au sable :



La roue gauche arrivera sur le sable avant la roue droite, et avancera donc moins vite pendant le temps que la roue droite arrive sur le sable aussi, et la voiture sera donc déviée.

- Atténuation :

C'est le terme en  $e^{-x/\delta}$ , avec  $\delta = \frac{c}{n''\omega}$

En général, l'atténuation est aussi sélective.

- On a trois cas :  
 Soit  $n' \neq 0$  et  $n'' = 0$ , c'est-à-dire  $n \in \mathbb{R}$  : propagation sans atténuation  
 Soit  $n' = 0$  et  $n'' \neq 0$ , c'est-à-dire  $n \in i\mathbb{R}$  : on a une onde stationnaire exponentielle, c'est-à-dire une atténuation sans propagation (onde évanescente)  
 Soit  $n' \neq 0$  et  $n'' \neq 0$ , c'est-à-dire  $n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  : propagation et atténuation.

Dans les deux premiers cas, il n'y a pas de dissipation d'énergie.

### III Propagation dans un conducteur ohmique

#### A) Equations de Maxwell

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

$$i\vec{k} \wedge \vec{E} = +i\omega \vec{B} \quad i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \mu_r (\vec{j} - i\omega \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E})$$

#### B) Charges libres $\underline{\rho}$ .

- Conservation de la charge (libre) :

$$-i\omega \underline{\rho} + i\vec{k} \cdot \vec{j} = 0, \text{ soit } \underline{\rho} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \cdot \vec{j}$$

- Loi d'Ohm :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \text{ avec } \sigma = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} = \frac{nq^2\tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau}$$

- Equation de Maxwell-Gauss :

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

On a donc un système de trois inconnues en  $\underline{\rho}$ ,  $\vec{k} \cdot \vec{j}$ ,  $\vec{k} \cdot \vec{E}$ .

Qui n'a qu'une seule solution  $\underline{\rho} = 0$ ,  $\vec{k} \cdot \vec{j} = 0$ ,  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$  sauf si le déterminant est nul :

$$\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} = i \frac{\vec{k} \cdot \vec{j}}{\sigma} = \frac{i\omega}{\sigma} \rho$$

$$\text{C'est-à-dire } \rho \left( 1 - i \frac{\omega}{\sigma} \epsilon_0 \epsilon_r \right) = 0$$

Donc soit  $\underline{\rho} = 0$ , et  $\omega$  peut être quelconque

Soit  $\underline{\rho} \neq 0$ , et  $i \frac{\omega}{\sigma} \epsilon_0 \epsilon_r = 1$ , c'est-à-dire  $\omega = \omega_p = \frac{\sigma}{i\epsilon_0 \epsilon_r}$  (pulsation plasma)

En régime sinusoïdal, il n'y a donc pas de charge libre dans le conducteur, sauf éventuellement à la pulsation plasma  $\omega_p$  (si elle est réelle)



### C) Courants libres $\vec{j}$ .

$$\text{On a } \vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$\text{Donc } i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \mu_r (\sigma - i\omega \epsilon_0 \epsilon_r) \vec{E} = -i\omega \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon'_r \vec{E}$$

$$\text{Avec } \epsilon'_r = \epsilon_r + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}$$

On obtient la même équation que pour un isolant non chargé (si en plus  $\rho = 0$ )

## IV Propagation dans un plasma

### A) Modèle

- Plasma :

- Description :

C'est un gaz ionisé en ions et électrons.

Electrons : masse  $m$ , charge  $q_e = -e$ , particules par unité de volume  $n_e$ .

Ions :  $M$ ,  $q_i = e$ ,  $n_i$  (on suppose que les particules ne sont ionisées qu'une fois)

A l'équilibre thermodynamique,  $n_i = n_e = n$

- Exemples :

(1) Gaz à haute température :

$$\text{On a } k_B T \sim I \text{ donc } T \sim \frac{I}{k_B} \sim \frac{1\text{eV}}{1,28 \cdot 10^{-23} \text{J.K}^{-1}} \sim 10^4 \text{K}$$

(2) Ionosphère :

C'est la couche de l'atmosphère comprise entre 50 et 500km :

Les rayons venant du soleil ionisent les particules, pour une fréquence

$$\nu \sim \frac{I}{h} \sim 2 \cdot 10^{15} \text{Hz} \text{ c'est-à-dire une longueur d'onde } \lambda = \frac{v}{c} = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{m, visible.}$$

- Propagation d'une OPPS :

$$\text{On a } \vec{E} = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Il faut calculer  $\vec{j}, \rho, \epsilon_r, \mu_r$

On considère que  $\epsilon_r = \mu_r = 1$ , c'est-à-dire qu'on néglige la polarisation des ions, et les spins des électrons devant les charges et courants libres.

### B) Mouvements des ions et des électrons

- Forces s'exerçant sur les particules chargées :

- Poids

- Interactions électromagnétiques avec les autres particules

- Interaction avec l'OPPS  $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

- Amortissement (chocs, perte d'énergie due au rayonnement créé par une charge accélérée)

On néglige toutes les interactions devant l'OPPS :

Pour le poids,...

Pour les interactions électromagnétiques, on suppose que le champ créé par les charges est suffisamment faible.

Pour les chocs, il y a plus de place dans un plasma.

Enfin, pour l'amortissement, on réduit le temps d'étude au temps caractéristique du rayonnement ( $10^{-14}$  s), qui est très faible devant celui de l'amortissement.

Enfin, on néglige  $\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|$  devant  $\|\vec{E}\|$ .

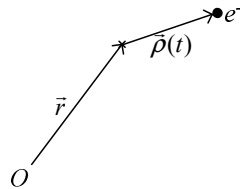
En effet, on a vu que dans le vide  $\|c\vec{B}\| = \|\vec{E}\|$ , donc ici  $\|c\vec{B}\|$  et  $\|\vec{E}\|$  sont du même ordre.

Mais on suppose que  $v \ll c$ , et donc on aura  $\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \ll \|\vec{E}\|$

Ainsi, le bilan des forces se réduit à  $\vec{F} = q\vec{E}$

- Mouvement des électrons

On a  $m\vec{a} = q\vec{E}$



$\vec{r}$  : paramètre indiciel (position moyenne de l'électron)

$\vec{\rho}(t)$  : paramètre dynamique.

On a  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}(\vec{r} + \vec{\rho}, t)$

- hypothèse simplificatrice :

On suppose que  $\vec{E}(\vec{r} + \vec{\rho}, t) \sim \vec{E}(\vec{r}, t)$

(C'est-à-dire que  $\|\vec{\rho}\| \ll \lambda$ )

- Oscillations forcées :

On a  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}(\vec{r}, t)$ , avec  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$

Donc en complexe  $-i\omega m \vec{v} = -e\vec{E}$

Et donc  $\vec{v} = \frac{-i.e}{m\omega} \vec{E}$

On a  $\rho \ll \lambda$ , et  $\rho \sim \frac{v.2\pi}{\omega}$ ,  $\lambda \sim \frac{c.2\pi}{\omega}$  donc  $v \ll c$ , l'hypothèse précédente est donc justifiée.

- Mouvement des ions :

On a de même  $\vec{v} = \frac{i.e}{M\omega} \vec{E}$

Et  $\frac{v_i}{v_e} = \frac{m}{M} \ll 1$

On peut donc négliger le mouvement des ions devant celui des électrons.

Remarque : ce qui reste fixe, c'est le barycentre ions-électrons, et on peut donc introduire la masse réduite pour résoudre le problème plus rigoureusement...

### C) Conductivité du milieu

$$\text{On a } \vec{j} = n_e \times (-e) \cdot \vec{v}_e + n_i \times e \cdot \vec{v}_i \approx -n_e e \cdot \vec{v}_e$$

On suppose que le nombre de particules par unité de volume est quasiment celui de l'équilibre  $n$  (remarque : la supposition que les ions n'étaient ionisés qu'une seule fois n'avait pas beaucoup d'importance ici)

$$\text{Ainsi, } \vec{j} \approx -ne \cdot \vec{v}_e$$

$$\text{Donc } \vec{j} \approx \frac{ine^2}{m\omega} \vec{E}$$

La loi d'Ohm s'écrit donc en complexe dans un plasma, en prenant  $\sigma = i \frac{ne^2}{m\omega}$ .

$$\text{Ainsi, } \sigma \in i\mathbb{R}$$

$$\text{On a donc } \langle p \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^*) = 0$$

Ce qui est normal puisqu'on a supprimé dans le modèle toute dissipation d'énergie.

$$\text{Pour un conducteur ohmique, on avait } \sigma = \frac{nq^2\tau}{m(1-i\omega\tau)}$$

$$\text{Et } \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{nq^2\tau}{m(1-i\omega\tau)} = \frac{inq^2}{m\omega}$$

### D) Densité de charges

- Equation de Maxwell-Gauss :  $i\vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- Conservation de la charge :  $-i\omega\rho + i\vec{k} \cdot \vec{j} = 0$
- Loi d'Ohm :  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

$$\text{Donc en combinant les trois équations, } i\omega\rho = \sigma i\vec{k} \cdot \vec{E} = \sigma \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{Ainsi, } \rho \left( i\omega - \frac{ine^2}{m\omega\epsilon_0} \right) = 0$$

$$\text{Ou } \rho(\omega^2 - \omega_p^2) = 0 \text{ avec } \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$$

- Différents cas :
  - Si  $\omega \neq \omega_p$ , alors  $\rho = 0$ .
  - Si  $\omega = \omega_p$ , on peut avoir  $\rho \neq 0$
- Pulsation plasma :

$$\text{On a } \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}} = 56,8\sqrt{n} \text{ SI}$$

## E) Propagation de l'OPPS

On suppose que  $\omega \neq \omega_p$  (ou plutôt que  $\rho = 0$ )

- Relation de dispersion :

$$\text{Equation de Maxwell-Faraday : } i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega\vec{B}$$

Equation de Maxwell-Ampère :

$$i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0(\sigma - i\omega\epsilon_0)\vec{E} = -i\omega\epsilon_0\mu_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\vec{E}$$

$$\text{Donc } i\vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}\right) = -i\omega\epsilon_0\mu_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\vec{E}$$

$$\text{Soit } \underbrace{i\vec{k} \cdot \vec{E}}_{=0} \cdot \vec{k} - i\frac{k^2}{\omega}\vec{E} = i\omega\mu_0\epsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\vec{E}$$

$$\text{On a donc la relation de dispersion } k^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

$$\text{Ou } k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

- Equation d'onde :

$$\text{On a ainsi l'équation } \nabla^2 \vec{E} = \frac{-1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E} \quad (\text{équation de Klein-Gordon})$$

- Domaine dispersif :  $\omega > \omega_p$  :

On a alors  $k \in \mathbb{R}$

Donc on a une propagation sans atténuation.

$$\text{Vitesse de phase : } v_\phi = \frac{\omega}{\text{Re}(k)} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

La vitesse de phase dépend de  $\omega$ , et est supérieure à  $c$ .

Vitesse de groupe :

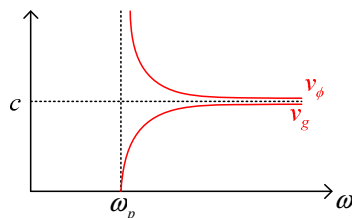
$$\text{On a } v_g = \frac{d\omega}{d \text{Re}(k)}$$

En différenciant la relation de dispersion, on obtient ici :

$$kdk = \frac{1}{c^2} \omega d\omega \text{ donc } v_g v_\phi = c^2 \text{ c'est-à-dire } v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

On admet qu'elle représente la vitesse de propagation de l'énergie.

On a ainsi  $v_g < c$ .



Lorsque  $\omega \gg \omega_p$ , l'onde passe à travers le plasma « sans le voir ».

- Domaine réactif :  $\omega < \omega_p$ .

On a alors  $k = i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} = \frac{i}{\delta}$

Donc  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-x/\delta} e^{-i\omega t}$

On a une onde évanescente, avec  $v_\phi = +\infty$ ,  $v_g = 0$ .

- Vibration plasma :  $\omega = \omega_p$ .

On peut avoir dans ce cas  $\rho \neq 0$

Si  $\rho = 0$ , alors  $\vec{k} = \vec{0}$ , et le plasma vibre en bloc ;

il n'y a pas de propagation dans ce cas.

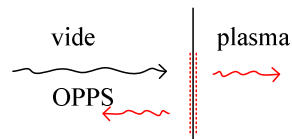
Si  $\rho \neq 0$ , on a alors  $\vec{k} \neq \vec{0}$ , et on a vu que d'après l'équation de Maxwell–Ampère,

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} \vec{k} - i \frac{k^2}{\omega} \vec{E} = i\omega\mu_0\epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \vec{E} \text{ c'est-à-dire ici } \frac{\rho}{\epsilon_0} \vec{k} - i \frac{k^2}{\omega} \vec{E} = 0$$

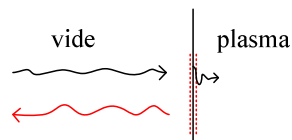
Donc  $\vec{E} = i \frac{-\omega\rho}{k^2\epsilon_0} \vec{k}$

Donc  $\vec{E}$  a une composante longitudinale dans le plasma (dans les autres cas, on avait une onde transversale électrique)

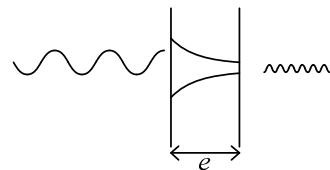
## F) Réflexion sur un plasma



- Si  $\omega > \omega_p$  :
  - Une partie de l'onde sera réfléchi
  - L'autre sera propagée sans atténuation.
  - En  $x = 0$  : par conservation de l'énergie,  $\vec{\pi}_i + \vec{\pi}_r = \vec{\pi}_t$
- Si  $\omega < \omega_p$  :



- Il n'y a pas d'onde transmise
- En moyenne,  $\vec{\pi}_i = \vec{0}$ . Donc  $\vec{\pi}_r = -\vec{\pi}_i$ , donc on a une réflexion totale.
- Réflexion totale frustrée :



Si  $e \gg \delta$ , on est dans le même cas que précédemment.

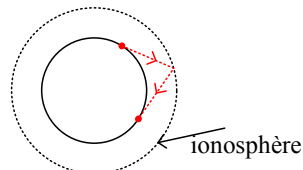
Si  $e \sim \delta$ , il peut y avoir une partie de l'onde qui traverse.

## G) Applications

- Confinement des plasmas :

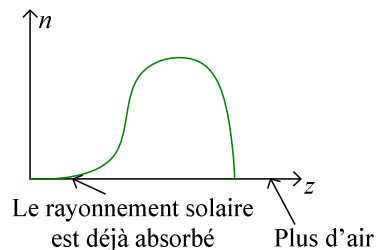
Si on envoie sur un plasma une onde électromagnétique de pulsation inférieure à  $\omega_p$ , cette onde exercera sur le plasma une pression de radiation. Avec un rayonnement suffisamment intense, on peut ainsi maintenir le plasma en équilibre sans qu'il n'y ait de contact matériel (Et ainsi pouvoir atteindre des températures très élevées, sans que le matériel ne fonde)

- Transmission radio :



- Couche de Kennely–Heaviside :

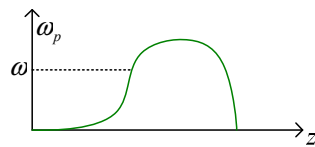
A basse altitude, le rayonnement solaire est trop faible pour ioniser beaucoup de particules, et à haute altitude, il n'y a quasiment plus d'air :



( $n$  : nombre d'électrons libres par unité de volume)

- Propagation d'une onde électromagnétique :

On aura pour  $\omega_p$  une courbe de la forme ( $\omega_p \propto \sqrt{n}$ ) :



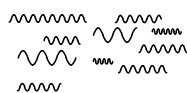
Donc les ondes de pulsation inférieure à une valeur critique seront réfléchies vers la surface de la Terre (à une altitude différente selon la pulsation)

## V Polarisation des ondes lumineuses

### A) Polarisation de la lumière naturelle

#### 1) Emission de train d'onde

Une source de lumière naturelle n'émet pas une onde continue (elle correspond à l'excitation puis la désexcitation des atomes, qui peut être complètement désordonné), ni même d'amplitude constante.



## 2) Modèle classique

Modèle :

- Chaque train d'onde correspond à une onde transverse,
- Polarisée rectilignement.
- D'un train d'onde à l'autre, la direction de polarisation varie aléatoirement.

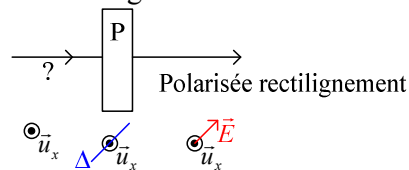
Remarque :

Il existe un autre modèle où chaque train d'onde est polarisé elliptiquement.  
Aucun de ces deux modèles n'est vrai pour la mécanique quantique.

## B) Polariseur rectiligne

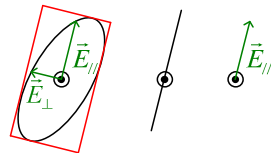
### 1) Définition

Un polariseur rectiligne est un objet tel que toute onde entrante ressort polarisée rectilignement dans une direction liée au polariseur :



### 2) Effet d'un polariseur sur une vibration quelconque

Pour une polarisation elliptique :

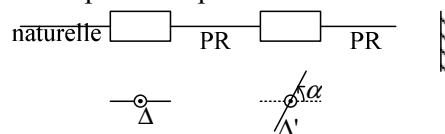


### 3) Utilisation en polariseur et en analyseur

- Polariseur :  
Permet d'obtenir une onde polarisée rectilignement à partir d'une onde quelconque.
- Analyseur :  
Permet de voir si une onde est polarisée rectilignement (l'onde ne passe alors pas dans la direction orthogonale à l'axe du polariseur).

### 4) Loi de Malus

- Dispositif expérimental :



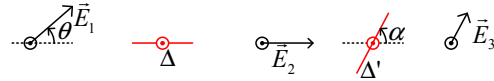
- Données expérimentales :  
On note  $I$  l'intensité émergente, c'est-à-dire la puissance surfacique :

$$I = \langle \|\vec{\pi}\| \rangle$$

On trouve expérimentalement que  $I = I_0 \cos^2 \alpha$  (loi de Malus).

- Interprétation :

- Champ  $\vec{E}$  :



$$\text{On a } \vec{E}_1 = E_{1_0} \cos(\omega t + \varphi_1) \vec{u}_1,$$

$$\vec{E}_2 = \eta E_{1_0} \cos(\omega t + \varphi_2) \cos \theta \vec{u}_\Delta$$

$$\text{Et } \vec{E}_3 = \eta^2 E_{1_0} \cos(\omega t + \varphi_3) \cos \theta \cos \alpha \vec{u}_\Delta,$$

- Intensité :

$$\text{On a } I = \varepsilon_0 c \cdot \langle \vec{E}^2 \rangle \quad (\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B})$$

Donc

$$I = \varepsilon_0 c \cdot \langle \eta^4 E_{1_0}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_3) \cos^2 \theta \cos^2 \alpha \rangle$$

$$= \varepsilon_0 c \eta^4 \cos^2 \alpha \langle E_{1_0}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_3) \cos^2 \theta \rangle$$

Sur un train d'onde (en moyennant sur un temps caractéristique très inférieur à celui de l'ensemble des trains d'ondes) :

$$\langle E_{1_0}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_3) \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2} E_{1_0}^2 \cos^2 \theta$$

Puis sur plusieurs trains d'onde :

(On suppose que les trains d'onde ont la même amplitude) :

$$\langle \frac{1}{2} E_{1_0}^2 \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{4} E_{1_0}^2$$

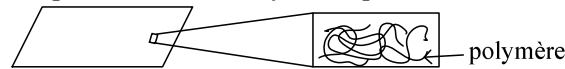
$$\text{Donc } I = \underbrace{\frac{1}{4} \varepsilon_0 c \eta^4 E_{1_0}^2}_{I_0} \cos^2 \alpha$$

(On n'avait pas besoin de faire le calcul : on pouvait poser directement  $I_0 = \varepsilon_0 c \eta^4 \langle E_{1_0}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_3) \cos^2 \theta \rangle$ )

## 5) Les polaroïds

- Fabrication :

On prend une résine synthétique coulée en fine plaque



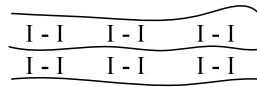
Et on étire la feuille dans une certaine direction :



La résine est ainsi devenue anisotrope.

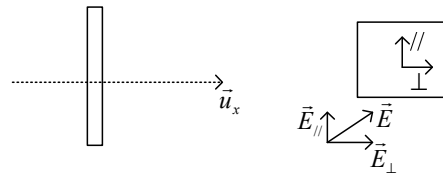


On plonge ensuite cette feuille dans une solution contenant du colorant (comme le diiode)



Les molécules de diiode peuvent alors assez facilement donner des électrons à leur voisin, et on peut ainsi faire circuler un courant électrique dans la direction de l'étirement. Ainsi, le matériau est aussi électriquement anisotrope :  $\sigma_{//} \gg \sigma_{\perp}$

- Dichroïsme :



Le champ  $\vec{E}$  va provoquer un déplacement des charges, et donc une puissance joule  $P = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma \cdot \vec{E}^2$ .

Ainsi,  $P_{//} \gg P_{\perp}$

Donc le champ longitudinal sera quasiment absorbé par les charges, alors que  $\vec{E}_{\perp}$  ne sera quasiment pas atténué.