Chapitre 19 : Géométrie dans un espace affine euclidien

I Généralités en dimension finie

A) Divers

1) Définition

Un espace affine euclidien, c'est un espace affine $\mathcal{E}$ attaché à un espace vectoriel euclidien E.

2) Repère orthonormé

C'est un repère $\mathfrak{R}=(O,\mathfrak{B})$ où $\mathfrak{B}$ est une base orthonormée de E.

3) Distances

- Pour $d(A,B)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, noté AB.

L'application $\begin{matrix}\mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathbb{R}\\(A,B)\mapsto d(A,B)\end{matrix}$ est bien une distance :

- d est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$
- $d(A,B)=0 \Leftrightarrow A=B$
- $d(B,A)=d(A,B)$
- $d(A,B)\leq d(A,C)+d(C,B)$

- Si $\mathfrak{P}$ est une partie non vide de $\mathcal{E}$, et A un point de $\mathcal{E}$, on définit :

$d(A,\mathfrak{P})=\inf\{d(A,M),M\in\mathfrak{P}\}$

- Si $\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2$ sont deux parties non vides de $\mathcal{E}$, on définit :

$d(\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2)=\inf\{d(M_1,M_2),M_1\in\mathfrak{P}_1,M_2\in\mathfrak{P}_2\}$

4) Notions d'angle, d'orthogonalité,…

Ce sont les notions qui concernent les directions des sous-espaces affines concernés.

Exemple :

Si $\mathfrak{D}_1,\mathfrak{D}_2$ sont deux droites affines de directions D_1,D_2, l'angle non orienté $(\mathfrak{D}_1\hat{,}\mathfrak{D}_2)$ est l'angle non orienté $(D_1\hat{,}D_2)$.

Remarque :

½ droite : la demi-droite d'origine $A\in\mathcal{E}$ et de vecteur $\vec{u}\neq\vec{0}$, c'est $\{A+\lambda.\vec{u},\lambda\in\mathbb{R}^+\}$.

L'angle entre deux demi-droites est l'angle entre les vecteurs correspondants.

5) Projection orthogonale

Soit $\mathfrak{F}$ un sous-espace affine de ε.
Soit $A \in \varepsilon$.
La projection orthogonale de A sur $\mathfrak{F} \underset{\text{déf}}{=}$ l'image de A par le projecteur orthogonal sur $\mathfrak{F}$ = l'unique point H de $\mathfrak{F}$ tel que $\overrightarrow{AH} \perp \mathfrak{F}$ (c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{AH} \in F^{\perp}$ où F est la direction de $\mathfrak{F}$).

Théorème :
La projection orthogonale H de A sur $\mathfrak{F}$ est l'unique point de $\mathfrak{F}$ tel que $d(A,\mathfrak{F}) = d(A,H)$.

Démonstration :
On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathfrak{F}$.
Pour $M \in \mathfrak{F}$, $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AH}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{HM}\right\|^2$.
Donc $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| \geq \left\|\overrightarrow{AH}\right\|$, et il y a égalité si et seulement si $M = H$.
Et comme $H \in \mathfrak{F}$, on a bien $AH = \min\limits_{M\in\mathfrak{F}}(AM)$.

6) Les hyperplans

- L'hyperplan passant par $A \in \varepsilon$ orthogonal à $\vec{n} \in E \setminus \{0_E\}$, c'est $\mathfrak{H} = \{M \in \varepsilon, \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}\}$
- « Réciproque » :

Lignes de niveau de l'application $\begin{array}{c}\varepsilon \to \mathbb{R} \\ M \mapsto \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}\end{array}$, où $A \in \varepsilon$ et $\vec{u} \in E \setminus \{0_E\}$:

Pour $k \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau k de l'application $M \mapsto \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}$, c'est $\mathfrak{H}_k = \{M \in \varepsilon, \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = k\}$.

On peut introduire H sur $(A,\vec{u})$ tel que $H \in \mathfrak{H}_k$. En effet, il suffit de prendre H tel que $\overrightarrow{AH} = \dfrac{k.\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$. Alors, pour tout $M \in \varepsilon$:

$$\begin{aligned} M \in \mathfrak{H}_k &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = k \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = \overrightarrow{AH}\cdot\vec{u} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{HM}\cdot\vec{u} = 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathfrak{H}_k$ est l'hyperplan orthogonal à $\vec{u}$ passant par H.

- Cas particulier :

Hyperplan médiateur de deux points distincts :
Soient $A, B \in \varepsilon$, distincts.
Soit $\mathfrak{M} = \{M \in \varepsilon, d(A,M) = d(B,M)\} = \{M \in \varepsilon, AM = BM\}$
Soit I le milieu de $[A,B]$.
Alors $AM^2 - BM^2 = \overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{BM}^2 = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM})\cdot(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{AB}\cdot(2\overrightarrow{IM})$
Donc $AM = BM \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM} = 0$

Donc $\mathfrak{M}=\{M\in\varepsilon, \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM}=0\}$, on reconnaît l'hyperplan passant par I orthogonal à $\overrightarrow{AB}$. On l'appelle l'hyperplan médiateur de A et de B.

- Distance d'un point à un hyperplan.

Soit $\mathfrak{H}$ un hyperplan passant par A orthogonal à $\vec{n}$.

Soit $M\in\varepsilon$; $d(M,\mathfrak{H})=MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathfrak{H}$.

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AH}+\underbrace{\overrightarrow{HM}}_{\lambda.\vec{n}}$. Donc $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=\lambda.\|\vec{n}\|^2$.

Donc $MH=|\lambda|.\|\vec{n}\|^2=\dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

B) Les isométries

Définition :

Soit $f:\varepsilon\to\varepsilon$.

f est une isométrie de $\varepsilon \underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} f$ conserve les distances, c'est-à-dire :

$\forall A,B\in\varepsilon, d(f(A),f(B))=d(A,B)$

Proposition :

Les isométries de ε sont exactement les applications affines de ε dans ε dont la partie linéaire appartient à $O(E)$ (c'est-à-dire dont la partie linéaire est un automorphisme de E)

Démonstration :

- Si f est une application affine de partie linéaire $\varphi\in O(E)$, alors, pour tous points $A,B\in\varepsilon$, en notant A', B' leurs images par f :

$d(A',B')=\|\overrightarrow{A'B'}\|=\|\varphi(\overrightarrow{AB})\|=\|\overrightarrow{AB}\|=d(A,B)$

- Supposons que f conserve les distances.

On admet qu'alors f est affine. Soit alors $\varphi=\mathrm{Lin}\,f$.

Montrons que φ conserve les normes (c'est-à-dire que $\varphi\in O(E)$)

Soient $\vec{u}\in E$, $A\in\varepsilon$, notons $B=A+\vec{u}$. Alors $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

Donc $\|\varphi(\vec{u})\|=\|\varphi(\overrightarrow{AB})\|=\|\overrightarrow{A'B'}\|=A'B'=AB=\|\vec{u}\|$ (en notant avec des ' les images par f)

Définition :

Un déplacement de ε est une symétrie directe de ε, c'est-à-dire une isométrie dont la partie linéaire appartient à $SO(E)$.

Un antidéplacement de ε est une symétrie indirecte de ε, c'est-à-dire une isométrie dont la partie linéaire appartient à $O(E)\setminus SO(E)$.

Proposition :

$\mathrm{Is}(\varepsilon)$, ensemble des isométries de ε, constitue un groupe pour $\circ$ (un sous-groupe de $GA(\varepsilon)$), et l'ensemble $\mathrm{Dep}(\varepsilon)$ des déplacement de ε en constitue un sous-groupe.

Exemple :

Les symétries orthogonales sont dans $\mathrm{Is}(\varepsilon)$.

En effet, si f est la symétrie par rapport à un sous-espace affine $\mathfrak{F}$ selon G, alors f est affine, et la partie linéaire de f est la symétrie vectorielle par rapport à F selon G (où F la direction de $\mathfrak{F}$). En particulier, quand $G = F^{\perp}$, on dit que f est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathfrak{F}$; sa partie linéaire est alors la symétrie orthogonale vectorielle par rapport à F, dont on sait qu'elle est dans $O(E)$

Précision :

Si $\dim(E) = n$, $\dim(F) = p$, alors f, symétrie orthogonale par rapport à $\mathfrak{F}$, est un déplacement lorsque $n - p$ est pair, un antidéplacement sinon.

Cas particulier :

Les réflexions affines (symétries orthogonales affines par rapport à un hyperplan) sont des isométries indirectes.

Proposition :

Etant donnés deux points A et B de ε, il existe une et une seule réflexion qui les échange, et c'est la réflexion d'hyperplan l'hyperplan médiateur de A et B.

II Etude d'un espace affine euclidien orienté de dimension 2

(Un espace affine orienté est un espace affine dont on a orienté la direction)

A) Les isométries en dimension 2

1) Les isométries directes

Etude :

Soit f une isométrie directe, posons $\varphi = \mathrm{Lin}\, f$ (ainsi, $f \in \mathrm{Dep}(\varepsilon)$ et $\varphi \in SO(E)$). On sait que φ est alors une rotation, éventuellement d'angle nul.

- Premier cas : φ est d'angle nul, c'est donc l'identité.

Donc f est une translation, éventuellement de vecteur nul.

Réciproquement, les translations sont bien dans $\mathrm{Dep}(\varepsilon)$.

- Deuxième cas : φ est d'angle θ non nul (modulo 2π).

Recherche des points invariants par f.

Soit $O \in \varepsilon$, O' son image par f.

Soit $M \in \varepsilon$.

Alors $f(M) = f(O + \overrightarrow{OM}) = O' + \varphi(\overrightarrow{OM})$.

Donc M est fixe $\Leftrightarrow \varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M} \Leftrightarrow \varphi(\overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'O}$

$$\Leftrightarrow (\varphi - \mathrm{Id}_E)(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'O}$$

On a :

$\ker(\varphi - \mathrm{Id}_E) = \{u \in E, \varphi(u) = u\} = \{0_E\}$

Donc φ est injective, donc bijective (on est en dimension finie)

Donc M est fixe $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (\varphi - \mathrm{Id}_E)^{-1}(\overrightarrow{O'O})$.

On a donc un et un seul point fixe Ω. (à savoir $\Omega = O + (\varphi - \mathrm{Id}_E)^{-1}(\overrightarrow{O'O})$)

Mais alors : $\forall M \in \varepsilon, \underbrace{f(M)}_{M'} = f(\Omega + \overrightarrow{\Omega M}) = \Omega + \varphi(\overrightarrow{\Omega M})$

Ainsi, $\overrightarrow{\Omega M'} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M})$.

On dit que f est la rotation de centre Ω et d'angle θ. Inversement, une telle application est bien un déplacement, c'est celle qui envoie Ω sur Ω et de partie linéaire $\rho_\theta \in SO(E)$.

Remarque :

Dire que $M' = f(M)$ revient à dire $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \widehat{\ \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta\,[2\pi] \end{cases}$

Classification de $\mathrm{Dep}(\varepsilon)$:

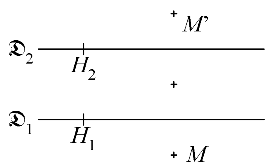
	Ensemble des invariants	Nature du déplacement	
	$\varnothing$	Translation de vecteur non nul	Translation
	ε	Identité	Translation
Rotation	ε	Identité	
Rotation	$\{\Omega\}$	Rotation d'angle non nul et de centre Ω	

2) Composée de réflexions

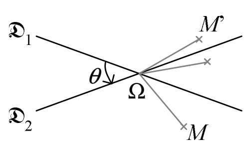
Soit s_1 une réflexion de droite $\mathfrak{D}_1$, s_2 une réflexion de droite $\mathfrak{D}_2$.

Si $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$, alors $s_1 \circ s_2 = \mathrm{Id}_\varepsilon$.

Si $\mathfrak{D}_1 \neq \mathfrak{D}_2$ et $\mathfrak{D}_1 // \mathfrak{D}_2$, alors $s_1 \circ s_2 = t_{\vec{u}}$, où $\vec{u} = 2\overrightarrow{H_1H_2}$:



Sinon :



$s_1 \circ s_2$ est la rotation de centre Ω l'intersection des deux droites et d'angle 2θ où θ est l'angle orienté $(\mathfrak{D}_1, \widehat{\ \mathfrak{D}_2})$

(Il suffit pour justifier l'angle de raisonner avec les parties linéaires)

Inversement, étant donnée une translation/rotation, on peut fixer une droite $\mathfrak{D}_1$ orthogonale au vecteur de translation/passant par Ω et construire une autre droite de sorte que la composée des deux réflexions soit la translation/la rotation.

Ainsi, tout déplacement est composé de deux réflexions.

Toute isométrie est ainsi composée de réflexions, et même de 0, 1, 2, ou 3 réflexions.

En effet :

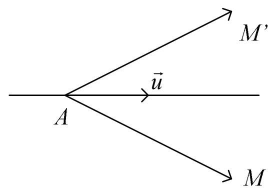
Soit $f \in \mathrm{Is}(\varepsilon)$.

Si f est un déplacement, on a vu qu'il fallait 0 ou 2 réflexions.

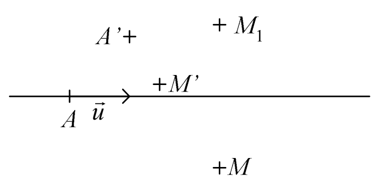
Sinon : pour un réflexion s quelconque, $s \circ f \in \mathrm{Dep}(\varepsilon)$, donc $s \circ f$ est composée de 0 ou 2 réflexions, donc $f = s^{-1} \circ s \circ f$ est composé de 1 ou 3 réflexions.

3) Les isométries indirectes

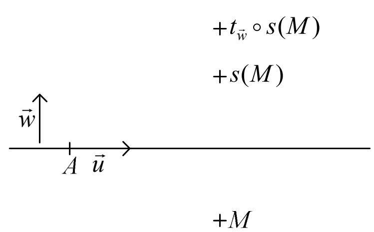
Soit $f \in \text{Is}(\varepsilon) \setminus \text{Dep}(\varepsilon)$.
Posons $\varphi = \text{Lin}\, f$. Alors $\varphi \in O(E) \setminus SO(E)$.
Donc φ est une réflexion vectorielle, disons de droite $D = \text{Vect}(\vec{u})$.
1er cas : *f* a un point fixe *A*.
Alors, pour tout $M \in \varepsilon$, en notant *M'* son image par *f*, on a :
$M' = f(M) = f(A + \overrightarrow{AM}) = A + \varphi(\overrightarrow{AM})$
Donc $\overrightarrow{AM'} = \varphi(\overrightarrow{AM})$



Donc *f* est la réflexion de droite $\mathfrak{D}$ passant par *A* et de direction *D*.
Inversement, les réflexions sont bien dans $\text{Is}(\varepsilon) \setminus \text{Dep}(\varepsilon)$
2ème cas : *f* n'a pas de point fixe.
Soit $A \in \varepsilon$, posons $A' = f(A)$.
On considère la translation *t* qui envoie *A'* sur *A*.
Alors $t \circ f$ laisse *A* invariant, et a pour partie linéaire $\text{Id}_E \circ \varphi = \varphi$.
Donc $s = t \circ f$ est la réflexion de droite $\mathfrak{D}$ passant par *A* de direction *D*
et $f = t_{\overrightarrow{AA'}} \circ s$.

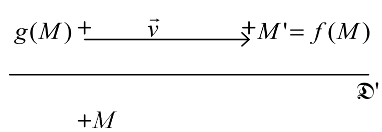


Mais par ailleurs, $\overrightarrow{AA'}$ s'écrit $\overrightarrow{AA'} = \underbrace{\vec{v}}_{\in D} + \underbrace{\vec{w}}_{\in D^\perp}$. Donc $f = t_{\overrightarrow{AA'}} \circ s = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} \circ s$.



On note $g = t_{\vec{w}} \circ s$. Alors $\text{Lin}\, g = \text{Id}_E \circ \varphi = \varphi$. Mais *g* a un point fixe (au moins), par exemple $B = A + \frac{1}{2}\vec{w}$. Donc *g* est une réflexion de droite la droite $\mathfrak{D}' // \mathfrak{D}$ passant par $A + \frac{1}{2}\vec{w}$ (et donc de direction *D*)

Ainsi, $f = t_{\vec{v}} \circ g$, où *g* est une réflexion et $t_{\vec{v}}$ est une translation de vecteur « parallèle » à la droite de la réflexion.



Une telle transformation est évidemment sans point fixe et est bien une isométrie indirecte. On appelle ce type de transformation une réflexion glissée.

Classification :

	Ensemble des points fixes	Nature de la transformation
Direct	$\varnothing$	Translation de vecteur non nul
	$\mathcal{E}$	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$
	$\{\Omega\}$	Rotation d'angle non nul et de centre Ω
Indirect	$\mathfrak{D}$	Réflexion de droite $\mathfrak{D}$.
	$\varnothing$	Réflexion glissée (c'est-à-dire $t_{\vec{v}} \circ s_{\mathfrak{D}}$ où $s_{\mathfrak{D}}$ est la réflexion de droite $\mathfrak{D}$ et $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v} \in \mathrm{Dir}(\mathfrak{D}) \setminus \{0_E\}$)

B) Géométrie analytique en dimension 2

Soit $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé, direct si besoin.

Une droite a pour équation $\mathfrak{D} : ax + by = h$ dans $\mathfrak{R}$, où $(a,b) \neq (0,0)$. Un vecteur normal à $\mathfrak{D}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, un vecteur directeur de $\mathfrak{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Distance d'un point à une droite :

Soit $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{D} : ax + by = h$. On note $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

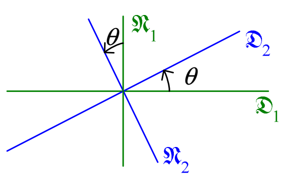
Soit $A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}$.

Alors $d(M_0, \mathfrak{D}) = \dfrac{|\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|(x_0 - x_1)a + (y_0 - y_1)b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|ax_0 + by_0 - h|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Angle de droites :

$\mathfrak{D}_1 : a_1 x + b_1 y = h_1$

$\mathfrak{D}_2 : a_2 x + b_2 y = h_2$



L'angle non orienté θ, c'est l'angle non orienté $(\mathfrak{N}_1 \hat{,} \mathfrak{N}_2)$.

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Equation de la médiatrice :

Soient $A_1\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$, $A_2\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

L'équation de la médiatrice est donc :

$$(a_2 - a_1)(x - \underbrace{\frac{a_1 + a_2}{2}}_{x_0}) + (b_2 - b_1)(y - \underbrace{\frac{b_1 + b_2}{2}}_{y_0}) = 0.$$

C) Les similitudes du plan

1) Définition

Soit $f:\varepsilon \to \varepsilon$.

f est une similitude $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall A, B \in \varepsilon, d(f(A), f(B)) = k.d(A,B)$.

Proposition, définition :

Si *f* est une similitude, alors $\exists k! \in \mathbb{R}_+^*, \forall A, B \in \varepsilon, d(f(A), f(B)) = k.d(A,B)$.
k est alors appelé le rapport de la similitude.

Proposition :
Soit $f:\varepsilon \to \varepsilon$, soit $k > 0$.
On a les équivalences :
f est une similitude de rapport *k* $\Leftrightarrow$ f est la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport *k*.
$\Leftrightarrow$ f est affine et sa partie linéaire s'écrit $k.\varphi$ où $\varphi \in O(E)$
$\Leftrightarrow$ f conserve les angles non orientés de vecteurs.

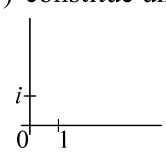
Définition, proposition :
Soit *f* une similitude de rapport *k*. Soit ψ sa partie linéaire.
Alors $\varphi = \frac{1}{k}\psi \in O(E)$.

- Si φ est dans $SO(E)$, on dit que *f* est directes, sinon on dit que *f* est indirecte.
- *f* multiplie les distances par *k*, et les aires par k^2 (admis)
- Si *f* est directe, *f* conserve les angles orientés, sinon elle les retourne.

L'ensemble des similitudes de ε est un sous-groupe de $(GA(\varepsilon), \circ)$.

2) Etude des similitudes du plan complexe

On se place dans $\mathbb{C}$ muni de sa structure euclidienne orientée naturelle où $(0,1,i)$ constitue un repère orthonormé.



a) Quelques similitudes

- Translation de vecteur *b* où $b \in \mathbb{C}$.
  $z \mapsto z + b$
- Symétrie orthogonale (réflexion) par rapport à l'axe réel :
  $z \mapsto \bar{z}$

- Homothétie de centre O et de rapport $\alpha \in \mathbb{R}$:
$z \mapsto \alpha.z$.
Homothétie de centre z_0 et de rapport $\alpha \in \mathbb{R}$:
$z \mapsto z_0 + \alpha.(z - z_0)$ ($f(M_0 + \overrightarrow{M_0M}) = M_0 + \alpha.\overrightarrow{M_0M}$)
- Rotation de centre O et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$:
$z \mapsto e^{i.\theta} z$
Rotation de centre z_0 et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$:
$z \mapsto z_0 + e^{i.\theta}(z - z_0)$

b) Les similitudes directes

Proposition :
Les similitudes directes de $\mathbb{C}$ sont exactement les applications du type $z \mapsto a.z + b$, où $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
Démonstration :
- Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

a s'écrit $\alpha.e^{i.\theta}$, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Alors $z \mapsto a.z + b$ est composée de :
$z \mapsto e^{i.\theta} z$ (isométrie directe)
$v \mapsto v + \frac{b}{\alpha}$ (translation)
Et $u \mapsto \alpha.u$ (homothétie)
C'est donc la composée d'une homothétie et d'une isométrie directe, donc une similitude directe.
- Inversement, soit f une similitude directe.

Elle est composée d'une homothétie et d'une isométrie directe (c'est-à-dire d'une translation ou rotation), et ces trois applications sont du type $z \mapsto a.z + b$ et il est immédiat que l'ensemble des applications du type $z \mapsto a.z + b$ est stable par $\circ$.

Etude :
Soit $f : z \mapsto a.z + b$.
z_0 est fixe $\Leftrightarrow a.z_0 + b = z_0 \Leftrightarrow (1 - a)z_0 = b$
Si $a = 1$ et $b \neq 0$, il n'y a pas de point fixe, et $z \mapsto z + b$ est une translation.
Si $a = 1$ et $b = 0$, f est l'identité sur $\mathbb{C}$.
Si $a \neq 1$, on a un seul point fixe z_0 .
Alors $f(z) = a.z + b$, $z_0 = a.z_0 + b$.
Donc $f(z) - z_0 = a(z - z_0)$.
a s'écrivant $\alpha.e^{i.\theta}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on voit que f est la composée, commutative, de l'homothétie de centre z_0 et de rapport α et de la rotation de centre z_0 et d'angle θ .

Il en résulte que les similitudes indirectes sont les $z \mapsto a.\bar{z} + b$, où $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

En effet, si une application *f* s'écrit sous la forme $z \mapsto a.\bar{z}+b$, alors c'est la composée de $z \mapsto \bar{z}$ et $u \mapsto a.u+b$, et est donc une similitude indirecte.

Inversement, si *f* est une similitude indirecte, alors en notant $s : z \mapsto \bar{z}$, $f \circ s$ est une similitude directe, disons *g*, et donc *g* s'écrit sous la forme $g : u \mapsto a.u+b$, et $f = g \circ s$, soit $f : z \mapsto a.\bar{z}+b$.

c) Conclusion sur les similitudes directes du plan complexe

Ensemble des invariants	Nature de la similitude
$\varnothing$	Translation de vecteur non nul
$\mathbb{C}$	Identité
$\{z_0\}$	Similitude directe à centre, c'est-à-dire composée (commutative) d'une rotation de centre z_0 et d'angle θ et d'une homothétie de centre z_0 et de rapport α (et $\alpha.e^{i.\theta} \neq 1$)

(Résultat valable dans tout plan affine euclidien)

Proposition :

Soient $[A, B]$ et $[A', B']$ deux segments de longueur non nulle du plan (complexe).

Alors il existe une et une seule similitude directe qui envoie $[A, B]$ su $[A', B']$ (et plus précisément *A* sur *A'* et *B* sur *B'*)

Démonstration :

Dans $\mathbb{C}$, on introduit les affixes de *A*, *B*, *A'*, *B'*. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Soit $f : z \mapsto \alpha.z+\beta$.

Alors *f* convient si et seulement si $\begin{cases} \alpha.z_A+\beta = z_{A'} \\ \alpha.z_B+\beta = z_{B'} \end{cases}$, c'est-à-dire si et seulement si $\begin{cases} \alpha.(z_B - z_A) = z_{B'} - z_{A'} \\ \beta = z_{A'} - \alpha.z_A \end{cases}$.

On a donc bien une unique solution $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$.

f est une translation si et seulement si $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

Sinon, *f* est une similitude à centre de rapport $\dfrac{A'B'}{AB}$ et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$:

$$\alpha = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}, \text{ donc } |\alpha| = \frac{|z_{B'} - z_{A'}|}{|z_B - z_A|} = \frac{A'B'}{AB}$$

et :

$$\begin{aligned} \text{Arg}(\alpha) &= \text{Arg}(z_{B'} - z_{A'}) - \text{Arg}(z_B - z_A) \\ &= (Ox, \overrightarrow{A'B'}) - (Ox, \overrightarrow{AB}) \\ &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})\ [2\pi] \end{aligned}$$

D) Coordonnées polaires

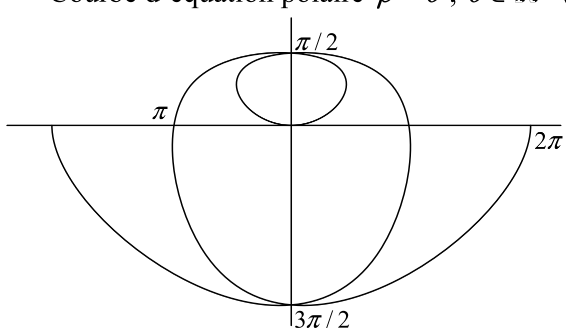
Soit ε un plan affine euclidien orienté.
Soit $\Re=(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct de ε.
Soit $M\in\varepsilon$ et $(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2$.
On dit que (ρ,θ) est un système de coordonnées polaires de M dans le repère $\Re$ lorsque $\overrightarrow{OM}=\rho.\vec{u}(\theta)$, où $\vec{u}(\theta)$ désigne le vecteur $\cos\theta.\vec{i}+\sin\theta.\vec{j}$, c'est-à-dire le vecteur unitaire tel que $(\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{u}(\theta))=\theta\,[2\pi]$.

Commentaire :
Il résulte de la définition qu'un point M a toujours une infinité de systèmes de coordonnées polaires, plus précisément :

- Le point $M=O$ admet exactement les couples $(\rho=0,\theta)$ comme systèmes de coordonnées polaires.
- Un point $M\neq O$ admet exactement comme systèmes de coordonnées polaires les couples $(\rho=OM,\alpha+2k\pi),k\in\mathbb{Z},(\rho=-OM,\alpha+\pi+2k\pi),k\in\mathbb{Z}$, où α est une mesure de l'angle orienté $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$.

Equations de courbes en polaire, exemples :

- La courbe C d'équation polaire $\rho=3$ (relativement à $\Re$) est l'ensemble des $M\in\varepsilon$ tels qu'au moins un des systèmes de coordonnées polaires (ρ,θ) de M vérifie $\rho=3$. Autrement dit, c'est l'ensemble des $M\in\varepsilon$ tels qu'il existe $\theta\in\mathbb{R}$ de sorte que $\overrightarrow{OM}=3.\vec{u}(\theta)$, c'est donc le cercle de centre O de rayon 3.
- Courbe d'équation polaire $\rho=\theta$, $\theta\in\mathbb{R}^+$ (puis $\theta\in\mathbb{R}$) :



III En dimension 3

Ici, ε désigne un espace affine euclidien orienté de dimension 3, muni d'un repère $\Re=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé direct.
(Les antidéplacements sont hors programme en dimension 3)

A) Les déplacements

1) Etude

Soit $f\in\text{Dep}(\varepsilon)$, φ sa partie linéaire.

Alors $\varphi \in SO(E)$.

C'est donc une rotation, disons d'axe $(D, \vec{\omega})$ et d'angle θ.

- Si $\theta = 0\,[2\pi]$, alors $\varphi = \mathrm{Id}_E$, donc *f* est une translation.
- Si $\theta \neq 0\,[2\pi]$:

\- Soit l'ensemble des points fixes de *f* n'est pas vide, disons que *A* en est un.

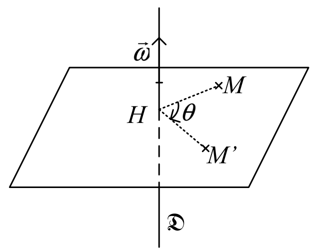
Alors pour tout $M \in \varepsilon$, $f(M)$ est le point *M'* tel que $\overrightarrow{AM'} = \varphi(\overrightarrow{AM})$.

Soit $\mathfrak{D}$ la droite passant par *A* de direction *D*, *H* le projeté orthogonal de *M* sur $\mathfrak{D}$.

$H \in \mathfrak{D}$, donc $\overrightarrow{AH} \in D$, donc $\overrightarrow{AH}$ est invariant par φ, donc *H* est invariant par *f* (car $\overrightarrow{AH'} = \overrightarrow{AH}$).

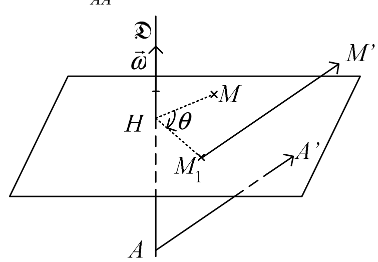
Donc $\overrightarrow{HM'} = \varphi(\overrightarrow{HM})$.

On dit que *f* est la rotation d'axe $(\mathfrak{D}, \vec{\omega})$ et d'angle θ :



$\mathfrak{D}$ est l'ensemble des points fixes par *f*.
Inversement, une application de ce type est bien une isométrie directe.
\- Soit l'ensemble des points fixes est vide :
Soit $A \in \varepsilon$, *A'* son image.

Considérons alors $g = t_{\overrightarrow{A'A}} \circ f$. Alors *g* a pour partie linéaire $\mathrm{Id}_E \circ \varphi = \varphi$ et laisse *A* invariant. C'est donc une rotation d'axe $(\mathfrak{D}, \vec{\omega})$ et d'angle θ où $\mathfrak{D}$ est la droite passant par *A* de direction *D*, et θ l'angle de la rotation vectorielle φ, et on a alors $f = t_{\overrightarrow{AA'}} \circ g$:



Mais $\overrightarrow{AA'}$ s'écrit $\overrightarrow{AA'} = \underbrace{\vec{u}}_{\in D} + \underbrace{\vec{v}}_{\in D^\perp}$.

Et donc $f = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} \circ g$.

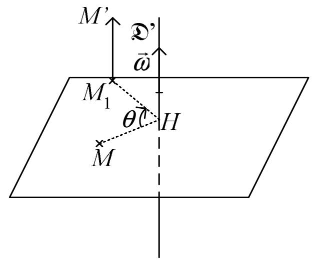
Soit $\mathfrak{P}$ un plan orthogonal à $\mathfrak{D}$ passant par *A*.

Alors *g* laisse stable $\mathfrak{P}$ (car *A* est fixe par *g* et φ laisse stable $D^\perp$ c'est-à-dire $\mathrm{dir}(\mathfrak{P})$)

De même, $\mathfrak{P}$ est stable par $t_{\vec{v}}$ et $t_{\vec{v}} \circ g$ restreinte à $\mathfrak{P}$ est une isométrie directe de $\mathfrak{P}$, à savoir une rotation puisque φ n'est pas l'identité. On note alors *B* le point fixe de $t_{\vec{v}} \circ g_{/\mathfrak{P}}$. Donc *B* est aussi un point fixe de $t_{\vec{v}} \circ g$. C'est donc une rotation d'axe $(\mathfrak{D}', \vec{\omega})$ et d'angle θ où $\mathfrak{D}'$ passe par *B* et a pour direction *D*.

Conclusion :

$f = t_{\vec{u}} \circ f_1$, où f_1 est une rotation d'axe $(\mathfrak{D}', \vec{\omega})$ et d'angle θ, et $\vec{u}$ un vecteur de *D*.



M et *M'* n'appartiennent pas au même plan orthogonal à $\mathfrak{D}'$ (car $\vec{u} \neq \vec{0}$), donc il n'y a aucun point fixe.

On dit que *f* est un vissage (vrai) d'axe $(\mathfrak{D}', \vec{\omega})$, d'angle θ et de vecteur $\vec{u}$.

Classification (tous sont appelés des vissages) :

Ensemble des points invariants	Partie linéaire	Nature du vissage
$\varnothing$	Id_E	Translation
ε	Id_E	Id_ε
$\mathfrak{D}$	ρ_θ, $\theta \neq 0$ d'axe $(D, \vec{\omega})$ où $D = \mathrm{dir}(\mathfrak{D})$	Rotation d'axe $(\mathfrak{D}, \vec{\omega})$ d'angle θ
$\varnothing$	ρ_θ, $\theta \neq 0$ d'axe $(D, \vec{\omega})$	Vissage vrai d'axe $(\mathfrak{D}, \vec{\omega})$ d'angle θ, où $\mathfrak{D}$ est de direction *D*, et de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0} \in D$

Détermination pratique, exemple :

Reconnaître la transformation $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = 2 - y \\ z' = z + 2 \end{cases}$

(1) C'est une application affine :

C'est en effet l'application affine qui envoie *O* sur $O'\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de partie linéaire l'application $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \vec{u}'\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$, c'est-à-dire l'application linéaire φ de matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

En effet, cette application affine *f* est telle que :

$\forall M \in \varepsilon, f(M) = f(O + \overrightarrow{OM}) = O' + \varphi(\overrightarrow{OM})$

Soit $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(2) Identification de la partie linéaire :

C'est une rotation d'angle π autour de Oz (ou aussi une symétrie orthogonale par rapport à Oz, appelé aussi retournement d'axe Oz)

C'est une isométrie directe (car $\det\varphi = 1$ donc $\varphi \in SO(E)$)

Donc f est un déplacement. Comme $\varphi \neq \mathrm{Id}_E$, f est soit un vissage vrai, soit une rotation d'axe dirigé par $\vec{k}$.

(3) Recherche des points invariants :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ est invariant } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - x \\ y = 2 - y \\ z = z + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ 2 = 0 \end{cases}$$

On n'a donc aucun point invariant, c'est donc un vissage vrai.

(4) Caractérisation de l'axe, du vecteur d'un vissage vrai :

Soit f un vissage d'axe $(\mathfrak{D}, \vec{\omega})$ d'angle $\theta \neq 0$ et de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$.

$\mathfrak{D} = \left\{ M \in \varepsilon, \overrightarrow{MM'} \text{ est colinéaire à } \vec{w} \right\}$, et $\vec{u}$ n'est autre que $\overrightarrow{MM'}$ lorsque M est un point de $\mathfrak{D}$.

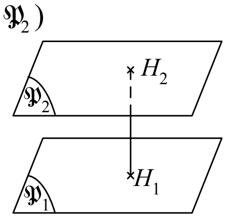
Dans ce cas là, $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} 6-2x \\ 2-2y \\ 2 \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{MM'} \in \mathrm{Vect}(\vec{k}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

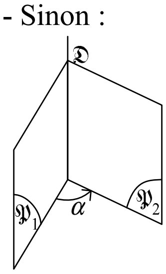
Donc l'axe est la droite de direction Oz passant par $A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Composée de deux réflexions :

- Si $\mathfrak{P}_1 // \mathfrak{P}_2$, alors $s_2 \circ s_1 = t_{\vec{u}}$, où $\vec{u} = 2\overrightarrow{H_1H_2}$ (éventuellement l'identité si $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$)



- Sinon :



$\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{D}$, $s_2 \circ s_1$ est la rotation de droite $\mathfrak{D}$ et d'angle 2α.

Remarque :

Un vissage vrai est composé de quatre réflexions, et pas mieux car sinon ce serait 2 (c'est un déplacement, donc sa partie linéaire est une isométrie directe), et se serait donc soit une translation, soit une rotation.

B) Géométrie analytique en dimension 3

Equation de plan :
$\mathfrak{P} : ax+by+cz=h$, où $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

Un vecteur normal à $\mathfrak{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

On a les équivalences, pour tout point $M\in\varepsilon$:
$M\in\mathfrak{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}=h \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{OH}\cdot\vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}=0$

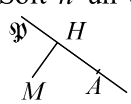
Où H est tel que $\overrightarrow{OH}=\lambda.\vec{n}$ avec $\lambda=\dfrac{h}{\|\vec{n}\|^2}$.

Intersection de deux plans :
$\mathfrak{P}_1 : a_1x+b_1y+c_1z=h_1$
$\mathfrak{P}_2 : a_2x+b_2y+c_2z=h_2$

On note $\vec{n}_1\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}$, $\vec{n}_2\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}$.

Si $\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2=\vec{0}$, alors $\mathfrak{P}_1 // \mathfrak{P}_2$.
Si $\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2=\vec{d}\neq\vec{0}$, alors $\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2$ est une droite, et $\vec{d}$ dirige cette droite.
En effet :
$\vec{d}\perp\vec{n}_1$, donc $\vec{d}\in\mathrm{dir}(\mathfrak{P}_1)$, et $\vec{d}\perp\vec{n}_2$ donc $\vec{d}\in\mathrm{dir}(\mathfrak{P}_2)$.
Donc $\vec{d}\in\mathrm{dir}(\mathfrak{D})=\mathrm{dir}(\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2)$ et $\mathfrak{D}$ est une droite (car $\vec{d}\neq\vec{0}$).

Distance d'un point à un plan :
Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à un plan $\mathfrak{P}$.

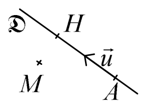


.

$d(M,\mathfrak{P})=MH$, et $\overrightarrow{MH}=\lambda.\vec{n}$.
$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}$. Donc $\overrightarrow{MA}\cdot\vec{n}=\lambda.\|\vec{n}\|^2+0=\lambda.\|\vec{n}\|^2$

Ainsi, $\overrightarrow{MH}=\dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$, soit $MH=\dfrac{|\overrightarrow{MA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}=\dfrac{|ax+by+cz-h|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Distance d'un point à une droite :



$d(M,\mathfrak{D})=MH$. On a $\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}=\overrightarrow{MH}\wedge\vec{u}+\overrightarrow{HA}\wedge\vec{u}=\overrightarrow{MH}\wedge\vec{u}$.
Donc $\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\|=\|\overrightarrow{MH}\|\|\vec{u}\|$ (car $\overrightarrow{MH}\perp\vec{u}$).

Donc $d(M,\mathfrak{D})=MH=\dfrac{\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

C) Coordonnées cylindriques et sphériques

1) Coordonnées cylindriques

Définition :

Soit $M \in \varepsilon$, de coordonnées (cartésiennes) (x, y, z) dans $\mathfrak{R}$.

On appelle système de coordonnées cylindriques de M relativement au repère $\mathfrak{R}$ tout triplet (r, θ, z) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.

Ainsi, en notant, pour chaque $\theta \in \mathbb{R}$, $\vec{u}(\theta) = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$, et en notant, pour chaque $M \in \varepsilon$, m sa projection orthogonale sur le plan xOy, on a les équivalences :

(r, θ, z) est un système de coordonnées cylindriques de M relativement à $\mathfrak{R}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = r.\vec{u}(\theta) + z.\vec{k} \Leftrightarrow (r, \theta)$ est un système de coordonnées polaires de m relativement au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de xOy et z est la côte de M dans le repère $\mathfrak{R}$.

Et donc tout point M de ε admet une infinité de systèmes de coordonnées cylindriques :

- Si $M \in Oz$, ils sont du type $(0, \theta, z)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ quelconque.
- Si $M \notin Oz$, on obtient l'un d'entre eux en posant :

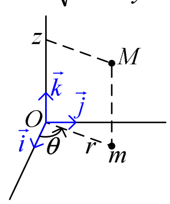
$r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$, $\theta = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{Om}})$ (dans xOy orienté par $(\vec{i}, \vec{j})$), z la côte de M.

Et les autres sont les $(r, \theta + 2k\pi, z)$ et $(-r, \theta + \pi + 2k\pi, z)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ quelconque.

Remarque :

Avec le choix précédent de r et θ (si $M \notin Oz$), on a :

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$.



2) Coordonnées sphériques

Définition :

Soit $M \in \varepsilon$, de coordonnées (cartésiennes) (x, y, z) dans $\mathfrak{R}$.

On appelle système de coordonnées sphériques de M relativement au repère $\mathfrak{R}$ tout triplet (r, θ, φ) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\varphi$.

Etude :

Soit $M \in \varepsilon$, de coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans $\mathfrak{R}$. On note toujours m la projection orthogonale de M sur le plan xOy.

Dire que (r, θ, φ) est un système de coordonnées sphériques de M revient à dire que :

(1) $(r\sin\theta, \varphi)$ est un système de coordonnées polaires de m relativement à $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans xOy et $z = r\cos\theta$.

- Si $M=O$, (1) impose que $r\cos\theta = r\sin\theta = 0$, donc que $r=0$. Réciproquement, tout triplet (r,θ,φ) tel que $r=0$ est alors bien un système de coordonnées sphériques de *M*.

- Si $M\neq O$, mais $M\in Oz$, (1) impose que $z=r\cos\theta$ et $\sin\theta=0$. Réciproquement, tout triplet (r,θ,φ) vérifiant cela, c'est-à-dire du type :

$(z,2k\pi,\varphi)$ ou $(-z,\pi+2k\pi,\varphi)$ ($\varphi\in\mathbb{R}$ quelconque)

est bien un système de coordonnées sphériques de *M*.

- Enfin, si $M\notin Oz$ et si (ρ,α) désigne un système de coordonnées polaires de *m* relativement au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan xOy, (1) impose que :

$$\begin{cases} r\cos\theta = z \text{ et } r\sin\theta = \rho \text{ et } \varphi = \alpha\,[2\pi] \\ \text{ou } r\cos\theta = z \text{ et } r\sin\theta = -\rho \text{ et } \varphi = \alpha+\pi\,[2\pi] \end{cases}$$

Réciproquement, tout triplet (r,θ,φ) vérifiant cela est bien un système de coordonnées sphériques de *M*.

Il en résulte que tout point *M* de ε admet une infinité de systèmes de coordonnées sphériques.

Remarque :

Si (r,θ,φ) est un système de coordonnées sphériques de *M*, on a toujours :

$r^2 = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2$

En effet : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 = r^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+r^2\cos^2\theta = r^2$

Recherche d'un système particulier de coordonnées sphériques pour $M\notin Oz$.

Soit $M\in\varepsilon$, on suppose ici que $M\notin Oz$ et on note toujours *m* sa projection orthogonale sur xOy, et (x,y,z) les coordonnées cartésiennes de *M* dans $\mathfrak{R}$.

Posons $r=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$.

Soit $\theta\in[0,\pi]$ l'angle non orienté $(\vec{k},\overrightarrow{OM})$:

Alors on a bien $z=\overrightarrow{OM}\cdot\vec{k} = r\cos\theta$.

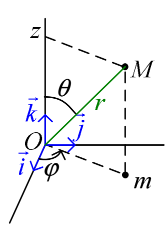
De plus, on a $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{Om}\right\|^2 + z^2$, donc $\left\|\overrightarrow{Om}\right\|^2 = r^2(1-\cos^2\theta) = r^2\sin^2\theta$

Donc, comme $r\geq 0$ et $\sin\theta\geq 0$ (car $\theta\in[0,\pi]$), on a $\left\|\overrightarrow{Om}\right\| = r\sin\theta$

Soit maintenant φ l'angle orienté $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ dans xOy orienté par $(\vec{i},\vec{j})$.

Alors on a bien $\overrightarrow{Om} = r\sin\theta(\cos\varphi.\vec{i}+\sin\varphi.\vec{j})$

Et finalement (r,θ,φ) est un système de coordonnées sphériques de *M*.



Remarque :

Comme on a supposé que $M \notin Oz$, on a en fait $r > 0$ et $\theta \in \left]0, \pi\right[$.

r, θ, φ vérifient les relations :

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\theta = \text{Arccos}\left(\dfrac{z}{r}\right)$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{r\sin\theta}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{r\sin\theta}$.

Ainsi, on a trouvé un système de coordonnées sphériques de *M* tel que :

$r > 0, \theta \in \left]0, \pi\right[, \varphi \in \left[-\pi, \pi\right]$

D'après l'étude, les autres systèmes de coordonnées sphériques de *M* sont les triplets :

$(r, \theta + 2k\pi, \varphi + 2k'\pi)$

$(r, -\theta + 2k\pi, \varphi + \pi + 2k'\pi)$

$(-r, \theta + \pi + 2k\pi, \varphi + 2k'\pi)$

$(-r, -\theta + \pi + 2k\pi, \varphi + \pi + 2k'\pi)$

Et remarquons que tout point de ε, qu'il soit sur l'axe Oz ou non, admet un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) avec $r \geq 0$, $\theta \in \left[0, \pi\right]$ et $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

Mais on ne doit pas pour autant se limiter à de tels systèmes, car cela soulèverait des problèmes dans les équations en coordonnées sphériques (continuité par exemple).