Chapitre 20 : Approximation de l'optique géométrique

I Structure du champ électromagnétique dans l'approximation de l'optique géométrique

A) Hypothèses de travail

1) Propagation dans le milieu

On suppose le milieu :
- linéaire
- isotrope
- non forcément homogène
- transparent

Ainsi, ε_r, μ_r dépendent de $\vec{r}$, ω.

Donc n peut dépendre de $\vec{r}$ et ω.

2) Champ électromagnétique

- Amplitude et phase :

En régime sinusoïdal, $\vec{E} = \underline{\vec{E}}(\vec{r})e^{i(\varphi(\vec{r})-\omega.t)}$, $\vec{B} = \underline{\vec{B}}(\vec{r})e^{i(\varphi(\vec{r})-\omega.t)}$

- Phase : $\phi = \varphi(\vec{r}) - \omega.t = \phi(\vec{r},t)$

Déphasage : $\varphi(\vec{r})$.

(pour une onde se propageant selon la direction $\vec{k}$, on a $\varphi(\vec{r}) = \vec{k}\cdot\vec{r}$)

Surfaces d'onde : ce sont les surfaces telles que $\phi(\vec{r},t_0) = \text{cte}$, c'est-à-dire $\varphi(\vec{r}) = \text{cte}$.

La normale aux surfaces d'onde est alors $\vec{\nabla}\varphi$.

Vitesse de phase : $d\phi = 0$, donc $\vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{r} - \omega.dt = 0$ (ou $d\varphi - \omega.dt = 0$)

(Si $\phi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega.t$, on a $\vec{k}\cdot d\vec{r} - \omega.dt = 0$)

Distance caractéristique de variation de la phase : longueur d'onde λ.
- Amplitude :

$\underline{\vec{B}}(\vec{r})$, $\underline{\vec{E}}(\vec{r})$, variant avec une distance caractéristique D_E, D_B ($D_E \sim D_B$)

- Approximation de l'optique géométrique :

$D_E, D_B >> \lambda$

B) Structure locale d'onde plane

1) Equations de Maxwell–Faraday et Maxwell–Ampère

- Rigoureuse :

$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, donc $\vec{\nabla}\wedge\underline{\vec{E}} + i\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\wedge\underline{\vec{E}} = i\omega\underline{\vec{B}}$

Et $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

Donc dans un isolant ($\vec{j}_{\text{libre}} = \vec{0}$) : $\vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{B}} + i \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \wedge \underline{\vec{B}} = -\dfrac{i\omega}{c^2} \underbrace{\varepsilon_r \mu_r}_{n^2} \underline{\vec{E}}$

- Approchées :

On a $\left|\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right| \sim \dfrac{E}{D_E}$, $\left|\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right| \sim \dfrac{B}{D_B}$, $\left|\vec{\nabla} \varphi\right| \sim \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Donc $\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \wedge \underline{\vec{E}} = \omega . \underline{\vec{B}}$

Et $\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \wedge \underline{\vec{B}} = -\dfrac{\omega}{c^2} \varepsilon_r \underline{\vec{E}}$

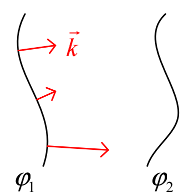
On a la même chose pour les deux autres équations de Maxwell, c'est-à-dire qu'on remplace $\vec{k}$ par $\vec{\nabla} \varphi$ dans les équations en onde plane

2) Vecteur d'onde

- Définition : on pose $\boxed{\vec{k} = \vec{\nabla} \varphi}$. Ainsi, $d\varphi = \vec{k} \cdot d\vec{r}$
- Propriétés :

$\vec{k}$ dépend de $\vec{r}$

$\vec{k}$ est normal aux surfaces d'ondes



Longueur d'onde : $\lambda = \dfrac{2\pi}{|k|}$

$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{k} \cdot d\vec{r}$

3) Structure locale de l'onde

- On a localement $\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}}$, $\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -n^2 \dfrac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}$ et pareil pour les autres.

Donc $\vec{k}$, $\underline{\vec{E}}$, $\underline{\vec{B}}$ forment un trièdre directe (localement)

- Pour $\vec{r}$ proche de $\vec{r}_0$,

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \varphi(\vec{r}_0) + \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= \varphi_0 + \vec{k}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \end{aligned}$$

Et $\underline{\vec{E}}(\vec{r}) \approx \underline{\vec{E}}(\vec{r}_0)$

Donc $\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underbrace{\underline{\vec{E}}(\vec{r}_0) e^{i(\varphi_0 - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}_0)}}_{\text{cte}} e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega . t)}$

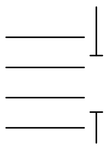
L'onde est donc localement plane.

4) Relation locale de dispersion

$$k^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2}, \text{ soit } k = n\frac{\omega}{c}$$

C) Limite de validité de l'optique géométrique

- Onde écrantée :



On a une forte variation de l'amplitude sur une distance de l'ordre de λ.

- Onde sphérique :

On a par conservation de l'énergie $\underline{\vec{E}}(\vec{r}) \xrightarrow[r\to 0]{} +\infty$

- Variation de n sur une distance de l'ordre de λ.
- Si on a un milieu fortement absorbant.

II Interprétation ondulatoire des notions de l'optique géométrique

A) Rayon lumineux

1) En optique géométrique

Postulat de l'optique géométrique : la lumière se propage selon des courbes géométriques indépendantes (c'est-à-dire que la variation de l'une n'influe pas une autre), appelées rayons lumineux.

2) En optique ondulatoire

- Propagation de l'énergie :

$$\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\wedge\vec{B}$$

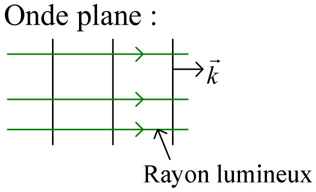
L'approximation de l'optique géométrique correspond à $\vec{\pi} // \vec{k} = \vec{\nabla}\varphi$

- Trajectoires de l'énergie :

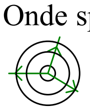
Le long des lignes de champ de $\vec{k}$, c'est-à-dire les courbes normales aux surfaces d'ondes.

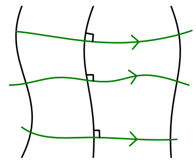
Exemple :

Onde plane :



Onde sphérique :





Ainsi, le trajet lumineux correspond à la trajectoire de l'énergie.

B) Chemin optique (trajet optique)

1) En optique géométrique

- Postulat :

Il existe $n(\vec{r})$ appelé indice (caractéristique phénoménologique)

- 

Chemin optique de A à B : $\boxed{L_{AB} = \int_A^B n ds}$

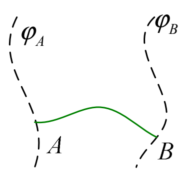
2) Interprétation ondulatoire

On a $n = \dfrac{c}{v_\varphi}$, et $v_\varphi = \dfrac{ds}{dt}$

Donc $L_{AB} = \int_A^B c dt = c(t_B - t_A)$

C'est donc la distance que la lumière aurait parcourue dans le vide dans le même temps.

3) Relation avec le déphasage

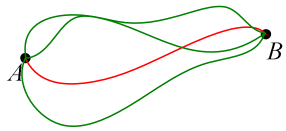


On a $\varphi_B - \varphi_A = \int_A^B d\varphi = \int_A^B \vec{k} \cdot d\vec{r} = \int_A^B k dr = \int_A^B \dfrac{n\omega}{c} dr = \dfrac{\omega}{c} L_{AB}$

Donc $\boxed{\dfrac{\varphi_B - \varphi_A}{2\pi} = \dfrac{L_{AB}}{\lambda_0}}$

4) Principe de Fermat

- Enoncé :



Le trajet effectif suivi par la lumière pour aller d'un point A à un point B est le trajet optique stationnaire de tous les trajets de A à B (pas forcément minimal).

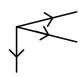
- Remarque :

En optique ondulatoire, cela signifie que l'onde interfère destructivement avec elle-même sur tous les chemins sauf le trajet optique.

C) Objet et image

1) Point objet

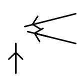
- En optique géométrique :



- En optique ondulatoire : on a une onde sphérique divergente.

(L'approximation de l'optique géométrique n'est plus valable au voisinage du point)

2) Point image



3) Stigmatisme

- En optique géométrique :

Un instrument optique donné est stigmatique pour (A, B) si tout rayon partant de A passe aussi par B.

Remarque :

Un miroir plan est rigoureusement stigmatique pour n'importe quel point.

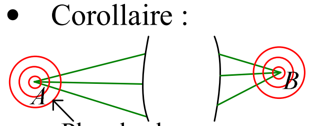
Un miroir parabolique ne l'est qu'au foyer (rigoureusement aussi)

Les lentilles sont approximativement stigmatiques

- En optique ondulatoire :

Cela signifie qu'une onde sphérique est transformée par l'instrument en une onde sphérique.

- Corollaire :



On a donc le même déphasage pour tous les rayons, et la lumière met le même temps pour aller d'un point à l'autre

4) Réalité, virtualité

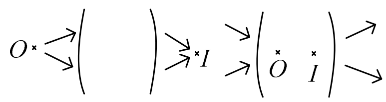
- Définition :

- Pour l'objet :

Il est dit réel si le faisceau incident est divergent
Il est dit virtuel s'il est convergent.

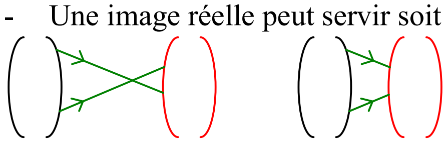
- Pour l'image :

Elle est dite réelle si le faisceau émergent est convergent
Elle est dite virtuelle s'il est divergent

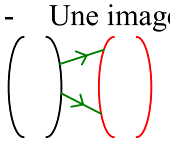


- Propriétés :

- On peut créer un objet réel avec une source lumineuse mais pas un objet virtuel ; pour un objet virtuel, il faut un instrument d'optique en amont.
- On peut former une image réelle sur un écran. Pour voir une image virtuelle, il faut un instrument d'optique en aval pour former l'image réelle.
- Une image réelle peut servir soit d'objet réel, soit d'objet virtuel :

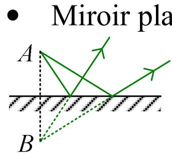


- Une image virtuelle ne peut servir que d'objet réel :



5) Exemple

- Miroir plan :



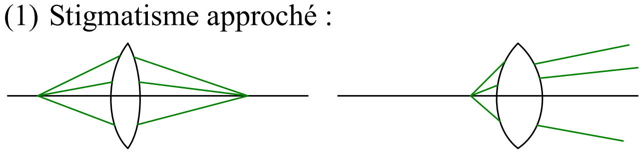
- Il est rigoureusement stigmatique
- Si l'objet est réel, l'image est virtuelle et vice-versa.
- Il transforme une onde sphérique en onde sphérique

(On a de plus un chemin optique $L_{AB} = 0$ …)

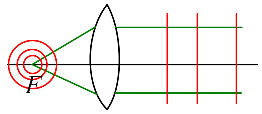
- Lentilles minces :

- Convergentes :

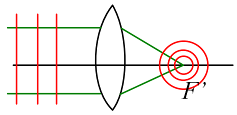
(1) Stigmatisme approché :



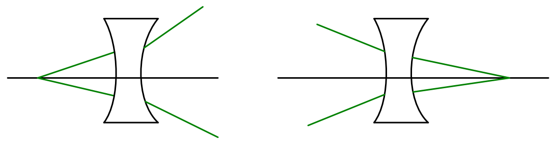
Physiquement, la lentille convergente rabat les rayons vers l'axe.
(2) Foyers :
Foyer objet :
C'est le point tel que quand les rayons sortent, ils sont parallèles à l'axe.



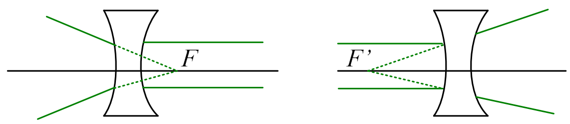
Foyer image :
C'est le point où convergent les rayons lorsqu'ils arrivent parallèles à l'axe.



- Divergentes :



La lentille a pour effet d'écarter les rayons de l'axe.
Foyers :



- Formules de conjugaison :

(1) Descartes :

$\frac{1}{\overline{SA_2}} - \frac{1}{\overline{SA_1}} = \text{cte}$, où S est le centre de la lentille, et A_1, A_2 sont les points objet et image (peu importe l'ordre)

On peut calculer la constante à l'aide des valeurs aux foyers.

(2) Newton :

$\overline{F_1A_1} \cdot \overline{F_2A_2} = \overline{F_1S} \cdot \overline{F_2S}$

- Une lentille divergente est une lentille à bords épais ; une lentille convergente est à bords minces.