

Chapitre 21 : La diffraction

I Le modèle scalaire

A) Vibration lumineuse

1) Lumière

On considère une onde électromagnétique dont la longueur d'onde dans le vide est comprise entre $0,4\mu\text{m} < \lambda_0 < 0,8\mu\text{m}$

(Mais les résultats sont valables dans tout le domaine des ondes électromagnétiques)

2) Ondes scalaires

- Monochromatiques :

Avec l'équation de Maxwell-Faraday, si on connaît \vec{E} , on peut trouver \vec{B}
($\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = i\omega\vec{B}$)

On peut donc ne travailler qu'avec \vec{E} .

- Il peut arriver que seules des grandeurs scalaires interviennent :

$$\vec{E} = \underline{E}(\vec{r})e^{-i\omega t} = \underline{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}\vec{u}(r, t)$$

Le caractère vectoriel n'est pas alors fondamental.

C'est le cas par exemple pour la diffraction, les interférences, mais pas pour la polarisation.

Dans la suite du chapitre, on étudiera $E(\vec{r}, t) = \text{Re}(\underline{E}(\vec{r})e^{-i\omega t})$

On appelle vibration lumineuse la grandeur $\underline{A}(\vec{r}) = \alpha \underline{E}(\vec{r})$ où α est un coefficient déterminé plus tard. Ainsi, $A(\vec{r}, t) = \text{Re}(\underline{A}(\vec{r})e^{-i\omega t})$

B) Intensité lumineuse

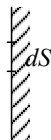
1) Définition

On pose $I = \langle \vec{\pi} \rangle \cdot \vec{u}$ où \vec{u} est un vecteur unité dirigé selon $\vec{\pi}$.

$$\text{(On a } \vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \text{)}$$

2) Eclairement d'une surface

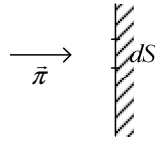
- Définition :



On note $d\phi_i$ la puissance incidente élémentaire sur dS

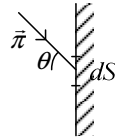
On pose alors $E = \frac{d\phi_i}{dS}$, éclairement de la surface.

- Incidence normale :



On a alors $d\phi_i = IdS$, et donc $E = I$

- Incidence oblique :



On a $d\phi_i = I \cos \theta . dS$, et donc $E = I \cos \theta$

3) Cas des ondes (localement) planes progressives sinusoïdales dans un milieu linéaire isotrope

- On a d'après l'équation de Maxwell–Faraday, $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$

$$\text{Donc } \vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \right) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}^2 \frac{\vec{k}}{\omega}$$

$$\text{Et } \vec{k} = \frac{n\omega}{c} \vec{u}, \text{ soit } \vec{\pi} = \frac{n}{\mu_0 c} \vec{E}^2 \vec{u}$$

(Comme le milieu n'est pas homogène, n peut dépendre de \vec{r})

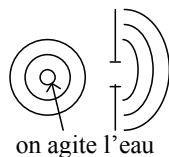
$$\text{Ainsi, } \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{n}{\mu_0 c} \vec{E} \cdot \vec{E}^* \vec{u}$$

$$\text{Donc } I = \frac{n}{2\mu_0 c} \vec{E} \cdot \vec{E}^* = \frac{n}{2\mu_0 c} \underline{E} \underline{E}^*$$

- On choisit alors le coefficient α tel que $I = \underline{A} \underline{A}^*$ (α dépend aussi de \vec{r})

II Le phénomène de diffraction

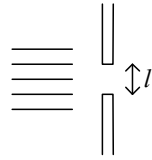
A) Diffraction d'une onde à la surface d'un liquide



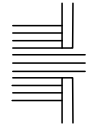
On observe un phénomène qui n'est pas en accord avec l'optique géométrique.

B) Diffraction d'une onde lumineuse par un diaphragme

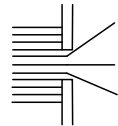
1) Exemple 1



- Si $l \gg \lambda$:

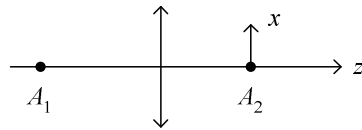


- Si $l \sim \lambda$:

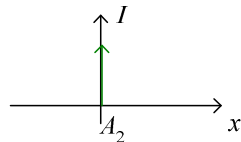


Plus l est proche de λ , plus il y a de diffraction.

2) Exemple 2



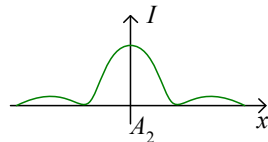
- En optique géométrique :



On a un pic de Dirac.

- En optique physique :

La lentille est limitée par un diaphragme, donc il y a une diffraction :



La tâche a une épaisseur ρ inversement proportionnelle au rayon de la lentille.

C) Cas général

1) Historique

Lorsqu'on observe une diffraction, cela signifie qu'il y a un phénomène ondulatoire qui intervient ; la réciproque est aussi vraie

Fresnel, Arago, Biot et Young ont mis en évidence le caractère ondulatoire de la lumière.

Avec l'effet photoélectrique, Einstein a mis en évidence son caractère corpusculaire.

Les deux caractères sont reliés par les relations $E = h\nu$, $p = \frac{h\nu}{c}$.

En 1923, De Broglie (prononcer « Broeill ») postule qu'une particule de quantité de mouvement p est associée à une onde de longueur d'onde λ telle que

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (p = \gamma mv)$$

1927 : Davisson et Germer observent (par hasard) une diffraction d'un faisceau d'électrons. Le postulat de de Broglie est donc validé.

2) Structure d'un faisceau lumineux

- Rappels sur la transformée de Fourier :
- Toute onde est superposition d'OPPS.

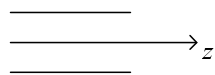
$$A(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint d^3k d\omega e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \tilde{A}(\vec{k}, \omega)$$

- Une OPPS a une extension spatiale et temporelle infinies.

Si $A(\vec{r}, t)$ varie sur une longueur caractéristique $\Delta\vec{r} \begin{cases} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{cases}$, $A(\vec{k}, \omega)$ ne prend

des valeurs importantes que sur $\Delta\vec{k} \begin{cases} \Delta k_x \\ \Delta k_y \\ \Delta k_z \end{cases}$ avec $\Delta x \Delta k_x \sim 2\pi$

- On peut montrer que si A est à support borné (nulle hors d'un intervalle), alors sa transformée de Fourier s'étend de $-\infty$ à $+\infty$.
- Faisceau cylindrique :



Est-ce qu'il existe une onde lumineuse se propageant exactement selon Oz et ayant un support borné ? Il n'en existe pas :

Si $A(\vec{r}, t) = f(x, y) e^{i(k_0 z - \omega t)}$ où $f(x, y)$ est à support borné par Δx , Δy , alors avec le spectre de Fourier de l'onde,

$$A(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \tilde{f}(k_x, k_y) e^{i(k_0 z + k_y y + k_x x - \omega t)}$$

Et k_x , k_y prennent des valeurs sur \mathbb{R} tout entier.

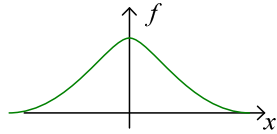
Mais avec l'équation d'onde, si on suppose par exemple que l'onde se propage dans le vide, $-k_x^2 - k_y^2 - k_0^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$

$$\text{Soit } k_x^2 + k_y^2 = -k_0^2 + \frac{\omega^2}{c^2}$$

Donc k_x et k_y sont bornées, ce qui est impossible.

Conclusion :

Quand on parle d'un faisceau parallèle d'extension finie, on fait en fait une approximation.



On a $\Delta k_x \sim \frac{2\pi}{\Delta x}$, $\Delta k_y \sim \frac{2\pi}{\Delta y}$, donc le faisceau ne peut pas non plus être rigoureusement parallèle. Plus il est large, plus il est « bien » parallèle.

- Faisceau gaussien (faisceau laser) :

$A(\vec{r}, t) = A_0 e^{-(x^2+y^2)/w^2} e^{ik \frac{x^2+y^2}{2R}} e^{i(kz-\omega t)}$ est une solution approchée de l'équation d'onde classique, avec $A_0(z), w(z), R(z)$ et ω, k des constantes, A_0, w, R variant sur une distance $D \gg \lambda = \frac{2\pi}{k}$

- On a une onde quasi-sphérique :

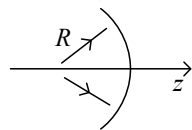
$$\text{Surface d'onde : } \frac{x^2 + y^2}{2R} + z = \text{cte}$$

(Surface de phase constante)

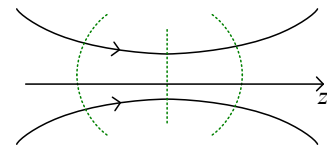
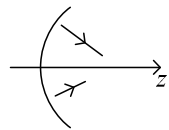
On a une sphère de rayon $R(z)$, avec $R(z) = z + \frac{z^2}{z_R}$, où z_R est une constante.

Si $z = 0$, $R = +\infty$ (on a donc un plan, de rayon de courbure infini)

Si $z > 0$, $R > 0$:

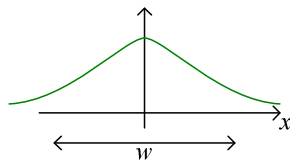


Si $z < 0$, $R < 0$:

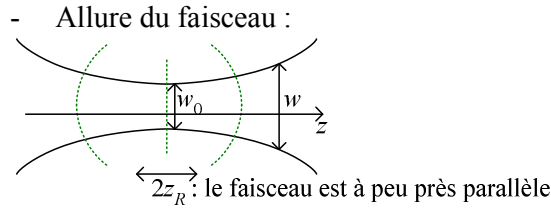


- Extension transverse :

On note $x^2 + y^2 = r^2$; ainsi, on a une amplitude en e^{-r^2/w^2}



$$\text{On a } w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}, \text{ où } w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}}$$



III Principe de Huygens–Fresnel

A) Interprétation de Huygens de la diffraction (1678)

1) Sources secondaires

Si on a un bouchon sur de l'eau, et qu'il y a une onde, celle-ci va se diffracter en arrivant sur le bouchon ; il y aura donc des ondelettes qui seront créées.

L'interprétation de Huygens est que tous les points atteints par l'onde émettent des ondelettes, même s'il n'y a pas de bouchon. On les appelle alors sources secondaires.

2) Interférence des ondelettes

Les points atteints par l'onde sont des petites sources, qui vont créer des ondelettes etc.



La somme des ondes est nulle partout sauf sur l'arc.

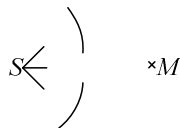


3) Diffraction

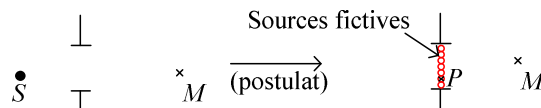


Les ondelettes n'interfèrent plus de la même façon.

B) Enoncé du principe (Fresnel, 1818)



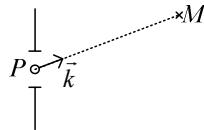
1) Problème équivalent



2) Caractéristiques des sources fictives

On suppose que les sources fictives :

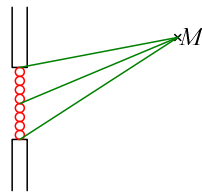
- Forment un continuum
- Emettent chacune une onde sphérique
- Sont synchrones de l'onde incidente (même plusation)
- D'amplitude proportionnelle à dS et à l'amplitude de l'onde incidente
- Déphasée de φ_0 par rapport à l'onde incidente (φ_0 indépendant de P)



Le point P reçoit $A_i(\vec{r}, t)$, ou en complexe \underline{A}_i ;

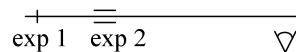
$$\text{La surface } dS \text{ va donc diffracter } dA_d(P, \vec{k}, t) = \text{Re} \left(\beta \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{r} e^{-i\omega t} \underline{A}_i(P) dS e^{i\varphi_0} \right)$$

$$\text{Ou en posant } d\underline{A} = \underbrace{\beta e^{i\varphi_0}}_{\beta'} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{r} \underline{A}_i(P) dS, \quad dA = \text{Re}(d\underline{A} e^{-i\omega t})$$



C) Discussion

1) Exemple préliminaire



L'expérimentateur 1 fait vibrer la corde. 2 ne la touche pas, mais bouge en même temps.

Ainsi, l'observateur voit l'expérimentateur 2 émettre l'onde alors que ce n'est pas lui qui le fait.

2) Utilité du principe

Si on écrit les équations de Maxwell pour essayer de retrouver ce calcul, on arrive rapidement à des calculs très compliqués. (Il a été réalisé une fois pour un problème simplifié, et les calculs étaient déjà fastidieux...)

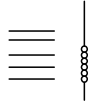
On pourrait quand même retrouver ce principe à partir des équations de Maxwell (le principe est un résultat approché, donc on n'obtiendrait sûrement pas exactement la même chose, mais au moins de façon approchée)

3) Validité du principe

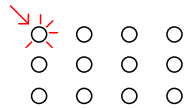
- Ondes scalaires
- Il faut que la source et le plan soient assez éloignés de l'ouverture.
- Les rayons doivent être peu inclinés par rapport à la surface du trou.
- L'ouverture doit être de grande dimension par rapport à λ

4) Diffraction par une ouverture – diffraction par la matière

- Diffraction par une ouverture : (sources fictives)



- Diffraction par la matière :
Diffraction cristalline (sources pas fictives !!)

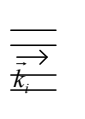


IV Diffraction de Fraunhofer

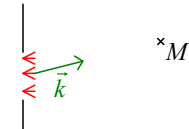
A) Définition

C'est lorsque la source et l'écran sont à une distance infinie du diaphragme

- Faisceau incident parallèle :



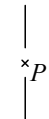
- Observation :



On peut donc ne prendre que ce qui est émis dans la direction \vec{k}

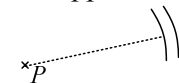
\vec{k}_i est fixée, mais \vec{k} est variable (on veut l'amplitude diffractée dans toutes les directions de l'espace)

- Approximation de Fraunhofer :



On a $d\underline{A}(P, M) = \beta' \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{r} \underline{A}_i(P) dS$ où $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$.

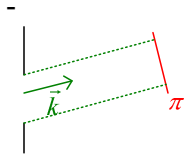
- Approximation :



$1/r$ varie lentement à grande distance, mais $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ varie toujours aussi vite.

Donc $dA(P, M) \approx \alpha \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \underline{A}_i(P) dS$

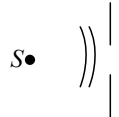
On peut donc assimiler l'onde à une onde plane localement.



B) Réalisation expérimentale

1) Source

- Eloignée :



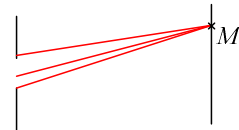
- Laser :



- Source à distance finie au foyer d'une lentille

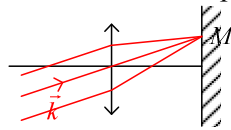
2) Ecran

- Ecran éloigné

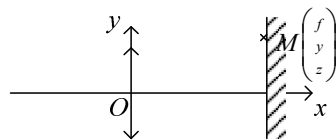


On peut considérer que les rayons émergents sont quasiment parallèles.

- Ecran dans le plan focal d'une lentille convergente



A un point M de l'écran, on peut faire correspondre un vecteur \vec{k} , et vice-versa :

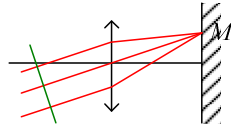


On a $\overrightarrow{OM} \parallel \vec{k}$, donc $\frac{k_x}{f} = \frac{k_y}{y} = \frac{k_z}{z}$

De plus, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, et $k_y, k_z \ll k_x$

Donc $k_x \approx \frac{2\pi}{\lambda}$

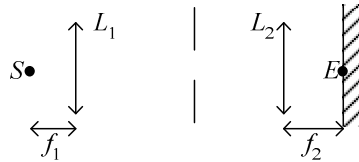
Et $k_y = \frac{2\pi}{\lambda f} y, k_z = \frac{2\pi}{\lambda f} z$.



Si les ondelettes interfèrent destructivement, on aura un point sombre. Si elles interfèrent constructivement, on aura un point lumineux.

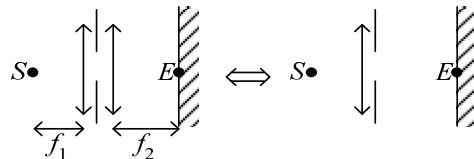
3) Montage global (de Fraunhofer)

- A deux lentilles :



- A une lentille :

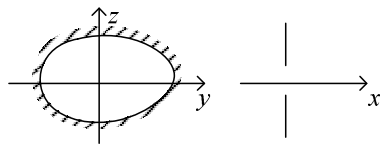
On peut rapprocher L_1 et L_2 autant qu'on veut de la fente



(Deux lentilles accolées forment une lentille)

Où S et E sont conjugués : $\frac{1}{OE} - \frac{1}{OS} = \frac{1}{f}$, c'est-à-dire $\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f}$

C) Cas d'une ouverture plane : formule de Fraunhofer



1) Transmittance de l'ouverture

- Définition :

Si on met un négatif sur l'ouverture :

L'amplitude initiale $\underline{A}_i(P)$ sera affaiblie, $\underline{A}_i(P)$ puis diffractée $d\underline{A}_d(P, \vec{k})$.

$$\text{Transmittance } t = \frac{\underline{A}_i(P)}{\underline{A}_i(P)}$$

t est donc un complexe, dépendant de P .

On a alors dans la direction \vec{k} :

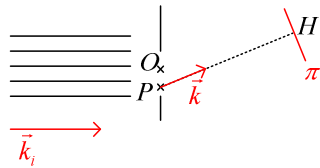
$$d\underline{A}_d(P, \vec{k}) = \alpha \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} t(P) \underline{A}_i(P) dS$$

- Cas particuliers :
 - $t = 0$ (opaque)
 - $t = 1$ (transparent)
 - $t = t_0 e^{i\varphi}$
- Le diaphragme est caractérisé par la donnée de $t(P)$:



On a $t(y, z) = 1$ pour $y^2 + z^2 < R^2$, $t(y, z) = 0$ pour $y^2 + z^2 > R^2$.

2) Eclairage sous incidence normale



Comme on a une onde plane, \underline{A}_i est indépendant de P .

- Amplitude élémentaire émise par P dans la direction \vec{k} au niveau de π :

$$d\underline{A}(P, \vec{k}, \pi) = \alpha t(P) \underline{A}_i(P) e^{i\vec{k} \cdot \overline{PH}} dS$$

Ou avec $\overline{PH} = \overline{OH} - \overline{OP}$:

$$d\underline{A}(P, \vec{k}, \pi) = \alpha \underbrace{e^{i\vec{k} \cdot \overline{OH}}}_{K} \underline{A}_i t(P) e^{-i\vec{k} \cdot \overline{OP}} dS$$

- Amplitude totale :

$$\underline{A}(\vec{k}, \pi) = K \iint_{\mathbb{R}^2} t(y, z) e^{-i(k_y y + k_z z)} dy dz$$

ou $\underline{A}(\vec{k}, \pi) = K \iint t(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^2 r$: formule de Fraunhofer.

Remarque :

On reconnaît une transformée de Fourier : $\underline{A}(\vec{k}) \propto \tilde{t}(\vec{k})$

On a $I = \underline{A} \underline{A}^*$. Donc le produit KK^* intervient :

On a $KK^* = \underline{A}_i \underline{A}_i^* \alpha \alpha^*$, indépendant de π .

3) Eclairage sous incidence quelconque



- On aura ici $\underline{A}_i(P) = \underline{A}_i(O) e^{i\vec{k}_i \cdot \overline{OP}}$

- Et $d\underline{A} = \alpha e^{i\vec{k} \cdot \overline{OH}} \underline{A}_i(O) t(P) e^{i\vec{k}_i \cdot \overline{OP}} e^{-i\vec{k} \cdot \overline{OP}} dS = \alpha e^{i\vec{k} \cdot \overline{OH}} \underline{A}_i(O) t(P) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_i) \cdot \overline{OP}} dS$

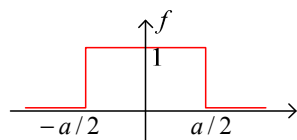
Donc $\underline{A} = K \iint t(\vec{r}) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}} d^2 r$.

On retrouve la même forme en remplaçant \vec{k} par $\vec{k} - \vec{k}_i$.

V Diffraction par une fente

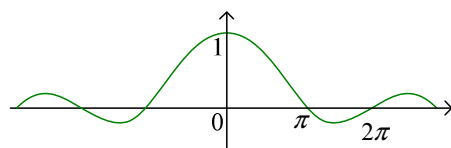
A) Rappel : fonction sinus cardinal

1) Transformée de Fourier d'une porte

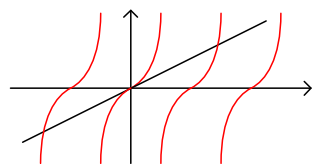


On a $\int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikx} dx = a \cdot \text{sinc} \frac{ka}{2}$ où $\text{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$

2) Fonction sinus cardinal

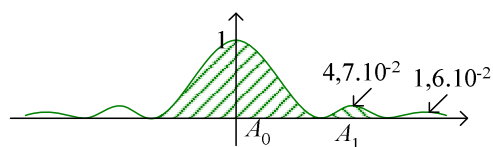


Les extrema sont les points en lesquels $\tan x = x$



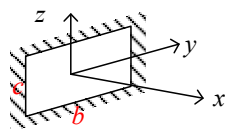
On a donc un maximum en 0, un autre au voisinage de $\frac{3\pi}{2}$

3) Fonction sinc^2



On a $\frac{A_1}{A_0} = 2,6 \cdot 10^{-2}$

B) Préliminaire : intensité diffractée par une fente rectangulaire éclairée sous incidence normale



1) Amplitude

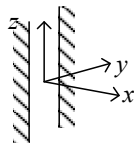
$$\text{On a } \underline{A}(k) = K \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} e^{ik_y y} e^{ik_z z} dz dy = Kbc \cdot \text{sinc} \frac{k_y b}{2} \text{sinc} \frac{k_z c}{2}$$

2) Intensité correspondante

$$\text{On a } I = \underline{A} \underline{A}^* = KK^* b^2 c^2 \text{sinc}^2 \frac{k_y b}{2} \text{sinc}^2 \frac{k_z c}{2} = I_0 \text{sinc}^2 \frac{k_y b}{2} \text{sinc}^2 \frac{k_z c}{2}$$

Où $I_0 = I(z = y = 0)$: intensité dans la direction d'incidence.

C) Fente infiniment longue éclairée normalement



1) Amplitude par unité de longueur

$$\text{On a } \underline{a} = \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{\underline{A}}{c} = Kbs \text{sinc} \frac{k_y b}{2} \lim_{c \rightarrow +\infty} \text{sinc} \frac{k_z c}{2}$$

Si $k_z = 0$, alors $\text{sinc} \frac{k_z c}{2} = 1$, donc $\underline{a} \neq 0$

Sinon, $\underline{a} = 0$

Conclusion :

La lumière est diffractée dans la direction de la petite dimension.

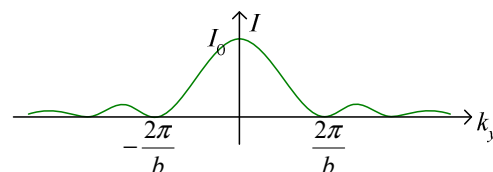
2) Intensité

$$I = \underline{a} \underline{a}^*$$

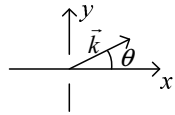
• En fonction de k_y, k_z :

$$I(k_y, k_z \neq 0) = 0$$

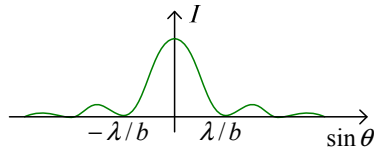
$$I(k_y, k_z = 0) = I_0 \text{sinc}^2 \frac{k_y b}{2}$$



- Angle de diffraction :



$$\text{On a } \sin \theta = \frac{k_y}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} k_y$$



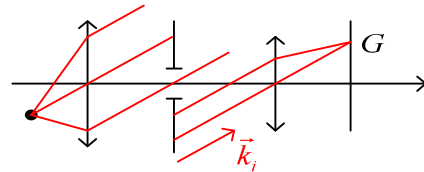
$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{b}; \theta_1 \text{ est le } \frac{1}{2} \text{ angle de diffraction.}$$

- (1) Si $\lambda \ll b$, il n'y a pas de diffraction
 - (2) Si $\lambda \sim b$, $c \gg \lambda$, il y a une diffraction.
- C'est valable pour tout type d'onde, pas seulement électromagnétique.

D) Cas d'une incidence non normale

1) Trou rectangulaire

- En optique géométrique :



- En optique physique :

On remplace simplement \vec{k} par $\vec{k} - \vec{k}_i$, dans les expressions obtenues précédemment.

2) Fente infiniment large

Si $k_z - k_{i,z} \neq 0$, on a $I = 0$

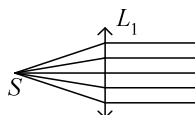
Si $k_z - k_{i,z} = 0$, $I = I_0 \text{sinc}^2 \frac{(k_y - k_{i,y})b}{2}$ (où $I_0 = I(k_y = k_{i,y}, k_z = k_{i,z})$)

Conclusion :

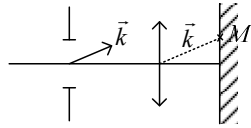
La figure de diffraction est centrée sur l'image géométrique de la source.

E) Figure de diffraction sur un écran

1) Utilisation d'un point source



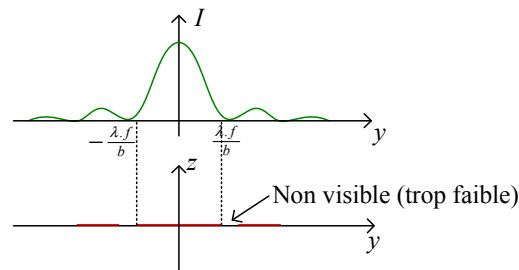
On a dans ce cas $\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



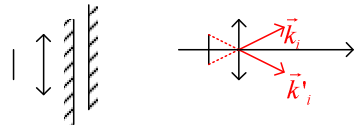
On a $k_y = \frac{2\pi}{\lambda f} y$, $k_z = \frac{2\pi}{\lambda f} z$. Ainsi :

- $k_z \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0$, donc $I = 0$
- $k_z = 0 \Leftrightarrow z = 0$, donc $I = I_0 \text{sinc}^2 \frac{k_y b}{2} = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi}{\lambda f} y b \right)$

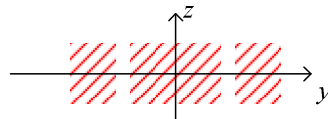
Il n'y a donc d'intensité que sur Oz



2) Utilisation d'une fente source parallèle à la fente diffractante

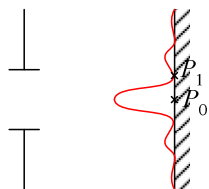


On a donc une superposition d'ondes $\vec{k}_i \begin{cases} k_{i,x} \\ k_{i,y} = 0 \\ k_{i,z} \text{ variable} \end{cases}$



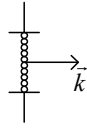
Les franges de diffraction sont caractérisées par le fait que la frange centrale est beaucoup plus lumineuse et deux fois plus large.

3) Analyse de la figure de diffraction



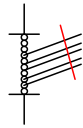
Qualitativement :

- En P_0 :



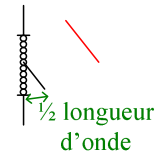
Toutes les ondelettes émettent en phase sur le diaphragme et parcourent la même distance, donc on a une interférence constructive.

- En P_1 :



Les ondelettes sont maintenant déphasées dans le plan.

Pour avoir une interférence totalement destructive :



La source en bas et celle du milieu vont ainsi émettre des ondes qui seront en opposition de phase dans le plan, et les ondelettes vont ainsi se détruire mutuellement.

$$\text{On aura dans ce cas } \sin \theta = \frac{\lambda/2}{b/2} = \frac{\lambda}{b}.$$

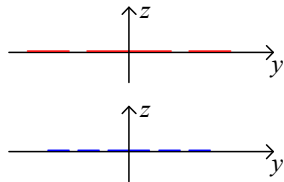
La seule possibilité pour que toutes les ondes interfèrent constructivement est que l'angle soit nul ; sinon, il y en aura toujours une qui interférera avec l'autre.

F) Frange en lumière blanche

Franges sombres :

$$\text{Elles sont en } y_1 = f \frac{\lambda}{b}, y_2 = 2f \frac{\lambda}{b} \dots$$

Elles dépendent donc de la longueur d'onde :



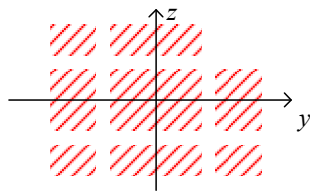
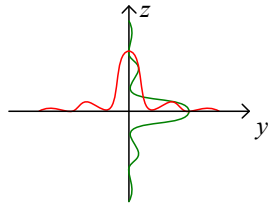
On aura donc une frange centrale blanche irisée de rouge, et les autres franges seront blanches irisées de bleu vers l'intérieur et de rouge vers l'extérieur.

VI Diffraction par une ouverture rectangulaire

A) Intensité diffractée

$$\text{On a } I = I_0 \text{sinc}^2 \frac{k_y b}{2} \text{sinc}^2 \frac{k_z c}{2}$$

B) Figure de diffraction



La tache centrale a une intensité maximale

Sur la ligne/colonne du milieu, les taches sont « simplement » secondaires (c'est la tache principale selon Oz et diffractée selon Oy ou le contraire), et sont moins lumineuse

Les autres taches sont doublement secondaire (diffraction selon les deux axes) et sont beaucoup moins lumineuses.

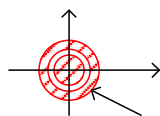
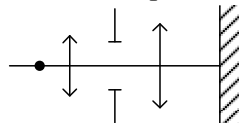
C) Cas d'une incidence oblique

La figure de diffraction sera simplement décalée...

VII Diffraction par une ouverture circulaire

A) Allure de la figure de diffraction

- On a une symétrie de rotation autour de x .
- Dans le plan focal d'une lentille :



Environ deux fois moins large

La tache centrale s'appelle aussi la tache d'Airy.

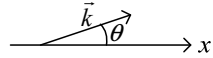
B) Etude de la figure de diffraction

1) Intensité diffractée

- Formule de Fraunhofer :

$$\underline{A}(k_y, k_z) = K \iint t(y, z) e^{-i(k_y y + k_z z)} dx dy$$

Avec $t(y, z) = 1$ si $x^2 + y^2 < R$, 0 sinon.

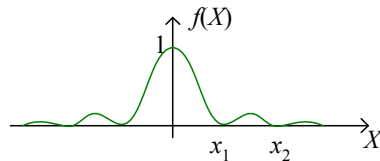


On obtient, en intégrant, une fonction de Bessel :

$$\underline{A}(\vec{k}) = 2K \frac{J_1(X)}{X} \text{ où } X = \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \theta$$

(La courbe de $x \mapsto \frac{J_1(x)}{x}$ a une allure semblable à celle d'un sinus cardinal)

- On a ainsi $I = KK * \left(\frac{2J_1(X)}{X} \right)^2 = I_0 f(X)$



(On arrête la courbe à $\frac{2\pi}{\lambda} R$)

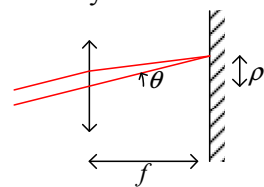
2) Rayon de la tache d'Airy

- Rayon angulaire :

On a $x_1 = 1,22\pi$, donc $\sin \theta_1 = \frac{1,22\lambda}{2R} = 0,61 \frac{\lambda}{R}$

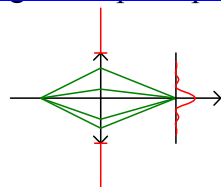
$x_2 = 2,33\pi$, $x_3 = 3,33\pi$

- Rayon sur l'écran :



A la première extinction, $\rho = f \tan \theta_1 \approx f \sin \theta_1 = f \times 0,61 \frac{\lambda}{R}$

3) Image d'un point par une lentille mince



Récapitulatif :

Pour une source ponctuelle, avec la diffraction de Fraunhofer :

- (1) Une tache centrale, de loin la plus brillante, et des taches latérales moins larges et moins brillantes.
- (2) La tache centrale est plus large dans le sens où le diaphragme est étroit.
- (3) On a une largeur proportionnelle à $\frac{\lambda}{R} / \frac{\lambda}{b}$
- (4) La tache centrale est centrée sur l'image géométrique
- (5) On admet que lorsque la transmittance est réelle, la figure de diffraction possède un centre de symétrie.

VIII Théorème de Babinet

A) Démonstration

1) Ecran diffractant

On note $t'(\vec{r})$ la transmittance

Pour une onde plane \vec{k}_i , on a une amplitude complexe $\underline{A}'(\vec{k})$

2) Ecran complémentaire

On aura pour l'écran complémentaire $t''(\vec{r}) = 1 - t'(\vec{r})$.

Pour la même onde plane \vec{k}_i , on aura une amplitude complexe $\underline{A}''(\vec{k})$

3) Superposition des transmittances

On a $t(\vec{r}) = t'(\vec{r}) + t''(\vec{r}) = 1$

- Il n'y a donc pas de diffraction :

$\underline{A}(\vec{k}) = 0$ si $\vec{k} \neq \vec{k}_i$, et $\underline{A}(\vec{k}) \neq 0$ si $\vec{k} = \vec{k}_i$

On a $\underline{A}(\vec{k}) = K \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i(k_y y + k_z z)} dy dz = K \delta(\vec{k} - \vec{k}_i)$

- Par linéarité de l'intégration, on a $\underline{A}(\vec{k}) = \underline{A}'(\vec{k}) + \underline{A}''(\vec{k})$

Donc si $\vec{k} \neq \vec{k}_i$, $\underline{A}'(\vec{k}) = -\underline{A}''(\vec{k})$

Donc $I'(\vec{k}) = I''(\vec{k})$

L'intensité est donc la même partout sauf éventuellement en un point.

B) Vérification expérimentale

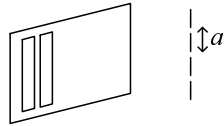
Si on remplace une fente par un cheveu, on observe effectivement la même figure de diffraction.

IX Diffraction par un réseau plan

A) Présentation

1) Réseau simple

- Définition : plan opaque percé d'une succession de fentes parallèles, équidistantes de même largeur b et de hauteur $c \gg \lambda$.

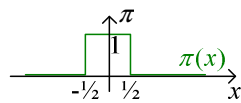


- Caractéristique :
 - Pas du réseau : a ($n = 1/a$: nombre de fentes par unité de longueur ; $n \sim 500\text{mm}^{-1}$)
 - N traits (environ 10000)
 - b : largeur de chaque fente ; $b \sim \lambda$
 - c : hauteur des fentes, $c \gg \lambda$

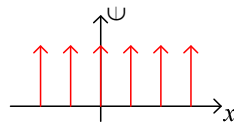
- Transmittance :

- Rappel :

(1) Porte :



(2) Peigne de Dirac :

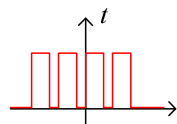


$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n)$$

(3) Convolution :

$$f(x) \otimes g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')g(x'')\delta(x-x'-x'')dx'dx''$$

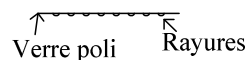
- Application : expression de t :



$$t = t(y) = \left(\pi\left(\frac{y}{b}\right) \otimes \psi\left(\frac{y}{a}\right)\right) \times \pi\left(\frac{y}{Na}\right)$$

- Fabrication :

On raye une plaque de verre poli avec une pointe de diamant, ce qui aura pour effet de dépolir le verre, et on obtient le complémentaire du réseau voulu :



2) Généralisation : réseaux plans

- Définition :

C'est une surface plane diffractante à transmittance périodique

- Réseaux unidimensionnels : $t(y) = (t_1(y) \otimes \cup(\frac{y}{a})) \times \pi(\frac{y}{L})$

- Réseaux bidimensionnels :

$$t(x, y) = (((t_1(x, y) \otimes \cup(\frac{y}{a})) \times \pi(\frac{y}{L_1})) \otimes \cup(\frac{x}{b})) \times \pi(\frac{x}{L_2})$$

- Caractéristiques :

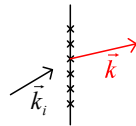
- Période(s) spatiale(s) a

- Nombre de période N .

- Motif : $t_1(\vec{r})$

B) Utilisation

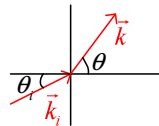
1) Eclairement par une onde plane



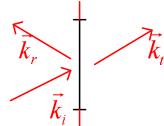
2) A l'infini

On suppose que les fentes sont très longues et qu'il n'y a pas de diffraction dans le sens vertical.

- Observation par transmission :



- Observation par réflexion :



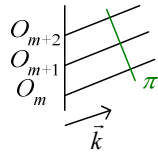
On aura une diffraction pour l'onde transmise, donc une aussi pour l'onde réfléchie.

Si on prend un réseau constitué d'une plaque de verre, on pourra observer une figure de diffraction par réflexion, qui sera symétrique de celle par transmission.

C) Maxima principaux

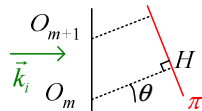
On suppose que chaque trait diffracte de façon isotrope (c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule source sur la largeur)

1) Condition d'interférence constructive



- Si toutes les ondelettes sont en phase, au niveau du plan, on aura bien une interférence constructive
- Sinon, on aura une interférence destructive : pour un décalage de phase de $\delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$ entre une ondelette et la suivante, on aura un décalage de π entre la première et celle du milieu, et toutes les ondes vont s'annuler. On n'aura donc pas du tout de lumière.

2) Expression de φ .



- Sous incidence normale :
On a $\varphi_m(H) = \varphi_m(O_m) + \vec{k} \cdot \overrightarrow{O_m H}$, $\varphi_{m+1}(H) = \varphi_{m+1}(O_{m+1}) + \vec{k} \cdot \overrightarrow{O_{m+1} H}$
Et $\varphi_{m+1}(O_{m+1}) = \varphi_m(O_m)$
On a donc un décalage de phase
$$\varphi = \varphi_m(H) - \varphi_{m+1}(H) = \vec{k} \cdot \overrightarrow{O_m O_{m+1}} = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$$
- Sous incidence oblique :
On a $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin \theta - \sin \theta_i)$ (on remplace \vec{k} par $\vec{k} - \vec{k}_i$)

3) Formule du réseau

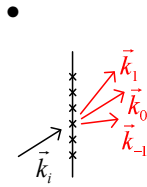
On a une interférence constructive pour $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin \theta - \sin \theta_i) = 2K\pi$,

$K \in \mathbb{Z}$, donc pour des angles $\sin \theta_K - \sin \theta_i = Kn\lambda$ ($n = 1/a$)

Remarques :

- Pour le réseau par réflexion, on aura $\sin \theta_K + \sin \theta_i = Kn\lambda$
- La tache pour $K = 0$ correspond à celle obtenue en optique géométrique.
- $\lambda = \frac{\lambda_0}{n_0}$ (n_0 : indice du milieu)

4) Discussion



- On a un nombre limité de maxima principaux : sous incidence normale,

$$K \in \left[-\frac{1}{n\lambda}, \frac{1}{n\lambda} \right]$$

Pour $n = 500\text{mm}^{-1}$, $\lambda = 0,6\mu\text{m}$, on a $-3,3 \leq K \leq 3,3$ (7 valeurs possibles)

Pour $n = 5000\text{mm}^{-1}$, $-0,33 \leq K \leq 0,33$: c'est comme s'il n'y avait pas de réseau.

Pour $n = 50\text{mm}^{-1}$, on obtient 67 directions possibles

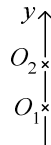
Problème : on a plus de directions possibles, mais l'intensité de chaque point en est divisée d'autant. C'est pour cela qu'on utilise principalement des réseaux avec 500 traits par millimètre, qui représente un compromis entre les deux extrêmes.

D) Amplitude et intensité diffractées

On se place sous incidence normale : $k_{i,y} = k_{i,z} = 0$

Avec des fentes infiniment longues selon Oz .

1) Amplitude



$$\text{On a } \underline{A}(k_y) = K \left(\int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_y y} dy + \int_{a-b/2}^{a+b/2} e^{-ik_y y} dy + \dots + \int_{(N-1)a-b/2}^{(N-1)a+b/2} e^{-ik_y y} dy \right)$$

$$\text{Et } \int_{a-b/2}^{a+b/2} e^{-ik_y y} dy = \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_y y'} e^{-ik_y a} dy'$$

$$\text{Donc } \underline{A}(k_y) = K \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_y y} dy \left(1 + e^{-ik_y a} + \dots + e^{-i(N-1)k_y a} \right)$$

- Facteur de forme :

$$F = K \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_y y} dy$$

Il correspond à l'amplitude diffractée par une seule fente.

F dépend du motif.

- Facteur de structure :

$$S = 1 + e^{-ik_y a} + \dots + e^{-i(N-1)k_y a} = \frac{1 - e^{-ik_y Na}}{1 - e^{-ik_y a}}$$

S est indépendant du motif.

2) Intensité

- Expression :

$$I = \underline{AA}^* = FF^* SS^* = KK^* b^2 \text{sinc}^2\left(\frac{k_y b}{2}\right) \times \frac{\sin^2 \frac{k_y Na}{2}}{\sin^2 \frac{k_y a}{2}}$$

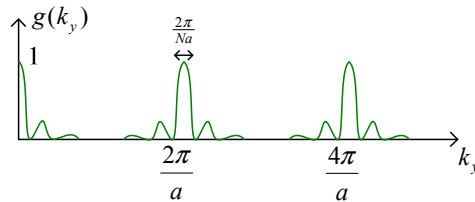
Ou en notant $I_0 = I(k_y = 0) = KK^* N^2 b^2$:

$$I = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{k_y b}{2}\right) \times \frac{\sin^2 \frac{k_y Na}{2}}{N^2 \sin^2 \frac{k_y a}{2}}$$

- Etude de la fonction :

$$\text{On note } g(k_y) = \frac{\sin^2 \frac{k_y Na}{2}}{N^2 \sin^2 \frac{k_y a}{2}}$$

g est périodique de période $\frac{2\pi}{a}$

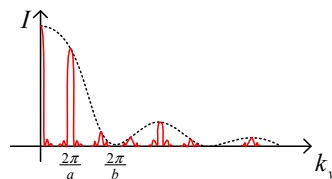


(On a $N \gg 1$)

On a donc des pics pour $k_y = \frac{2\pi}{a} K$, de largeur $\delta k_y = \frac{2\pi}{Na}$

- Figure de diffraction :

On a $I = I_0 f(k_y) g(k_y)$ où $f(k_y) = \text{sinc}^2\left(\frac{k_y b}{2}\right)$



(la figure est symétrique de l'autre côté)

On a ainsi $k_y = \frac{2\pi}{a} K$ et $k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$

Donc on retrouve $\sin \theta_K = \frac{K\lambda}{a}$

On a aussi $\delta k_y = \frac{2\pi}{Na}$ (on n'a donc de la lumière que sur un petit intervalle)

Et en différentiant $k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$, on a $\delta k_y \approx \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta \delta \theta$

$$\text{Donc } \delta\theta_k = \frac{1}{\cos\theta_k} \frac{\lambda}{Na} = \frac{1}{\cos\theta_k} \frac{\lambda}{L}$$

Ainsi, plus le réseau est long, plus la direction dans laquelle la lumière sort est précise.

Ordre de grandeur :

Pour $\lambda = 0,6\mu\text{m}$, $L = 2\text{cm}$, $\cos\theta_k = 0,5$, on obtient $\delta\theta_k \approx 5.10^{-5}$ rad (une seconde d'angle)

3) Utilisation de la transformée de Fourier

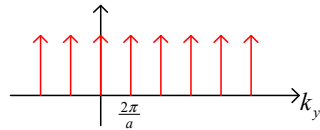
Rappel : on a $\mathfrak{F}(f \times g) = \alpha \cdot \mathfrak{F}(f) \otimes \mathfrak{F}(g)$, $\mathfrak{F}(f \otimes g) = \alpha^{-1} \cdot \mathfrak{F}(f) \times \mathfrak{F}(g)$.

- Infinité de fentes infiniment fines :

On a une transmittance $t(y) = \cup\left(\frac{y}{a}\right)$

Amplitude :

$$\underline{A}(k_y) = K \mathfrak{F}(t)(k_y) = K \cup\left(\frac{a}{2\pi} k_y\right)$$



- Nombre fini de fentes infiniment fines :

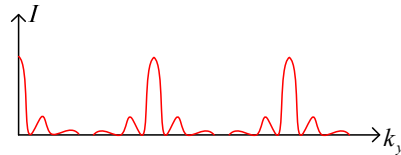
- Transmittance :

On a $t(y) = \pi\left(\frac{y}{L}\right) \times \cup\left(\frac{y}{a}\right)$ ($L = Na$)

- Amplitude :

$$\underline{A}(k_y) = K \cup\left(\frac{a}{2\pi} k_y\right) \otimes \text{sinc} \frac{k_y L}{2}$$

- Intensité :



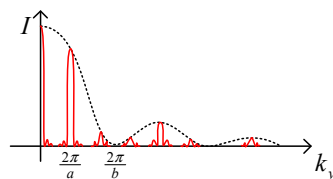
- Nombre fini de fentes de largeur finie :

- Transmittance :

$t(y) = \left[\pi\left(\frac{y}{L}\right) \times \cup\left(\frac{y}{a}\right) \right] \otimes \pi\left(\frac{y}{b}\right)$

- Amplitude :

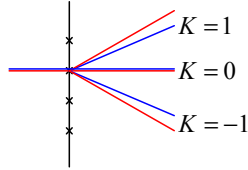
$$\underline{A}(k_y) = K \text{sinc} \frac{k_y b}{2} \times \left(\cup\left(\frac{a}{2\pi} k_y\right) \otimes \text{sinc} \frac{k_y L}{2} \right)$$



E) Spectroscopie à réseaux

1) Principe

On a $\sin \theta_K - \sin \theta_i = Kn\lambda$, donc θ_K dépend de la longueur d'onde pour $K \neq 0$.



Si $\theta_i = 0$, $\sin \theta_K = Kn\lambda$

- On peut avoir des spectres non disjoints (peu pratique... ☹)
- Il n'y a pas de dispersion pour $K = 0$
- Le rouge est le plus dévié (contrairement au prisme)

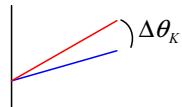
2) Séparation de deux raies

On envoie sur un spectroscopie une onde contenant deux longueurs d'onde différentes λ_1 , $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ avec $\Delta\lambda \ll \lambda_1$

- Ecart angulaire entre les maxima principaux :

A K fixé :

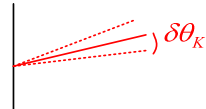
$$\sin \theta_K - \sin \theta_i = Kn\lambda$$



En différenciant l'égalité, $\cos \theta_K \Delta\theta_K = Kn\Delta\lambda$.

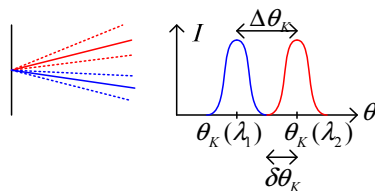
$$\text{Donc } \Delta\theta_K = \frac{Kn\Delta\lambda}{\cos \theta_K}$$

- $\frac{1}{2}$ largeur angulaire d'un maximum principal :

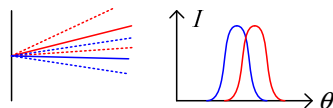


$$\text{On a } \delta\theta_K = \frac{\lambda}{Na \cos \theta_K}$$

On a deux cas :

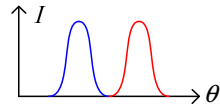


Il n'y a pas de recouvrement

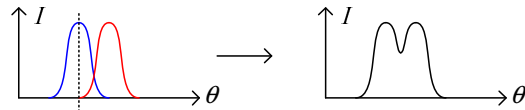


Les raies se recouvrent.

- Critère de séparation (Rayleigh) :
Un critère peut être d'avoir une courbe d'intensité de la forme :



En fait, le critère est trop sévère :



Les raies sont donc encore discernables.

Il faut donc $\Delta\theta_K > \delta\theta_K$

C'est-à-dire $Kn\Delta\lambda > \frac{\lambda}{Na}$. Donc $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} < \frac{K.N}{R}$ (on a $n = \frac{1}{a}$)

R : pouvoir de résolution du réseau.

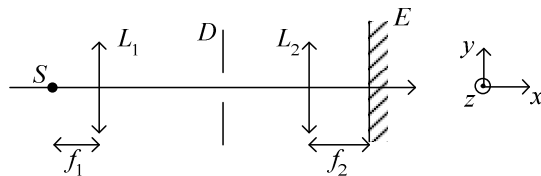
- Exemple :

Pour $\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$, $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$: on a $\lambda / \Delta\lambda \sim 1000$, donc $KN > 1000$

Ainsi, avec $K = 1$, il suffit de 2mm de réseau avec $n = 500\text{mm}^{-1}$.

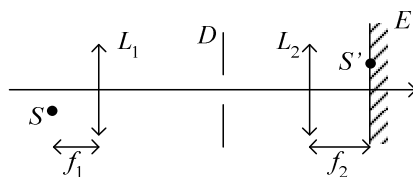
X Compléments

A) Modification du dispositif de Fraunhofer



1) Influence d'une translation selon y.

- De S :



Si on décale S vers le bas, l'image S' est décalée vers le haut avec un rapport $-\frac{f_2}{f_1}$

- De D :

Il n'y aura pas de changement (on étudie la diffraction à l'infini) :

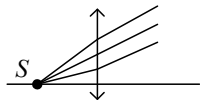
$$\text{On a } \underline{A}(k_y) = K \int_{-\infty}^{+\infty} t(y) e^{-ik_y y} dy$$

En faisant une translation, $t(y) \rightarrow t(y-d) = t(Y)$

$$\text{Et } \underline{A}'(k_y) = K \int_{-\infty}^{+\infty} t(y-d) e^{-ik_y y} dy = K e^{-ik_y d} \int_{-\infty}^{+\infty} t(Y) e^{-ik_y Y} dY = \underline{A}(k_y) e^{-ik_y d}$$

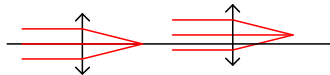
Donc $I'(k_y) = I(k_y)$

- De L_1 :



On aura le même effet en décalant L_1 vers le haut que si on décale la source vers le bas.

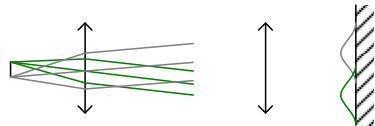
- De L_2 :



On aura un décalage de l'image de la même quantité.

2) Influence d'un élargissement selon y .

- De S :



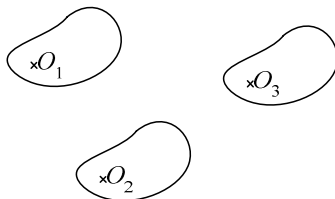
On a un élargissement de la tache de diffraction :

- De D :

On aura un rétrécissement de la tache de diffraction.

B) Diffraction par un ensemble d'ouvertures identiques

1) Cas général



- Amplitude :

$$\text{On a } \underline{A}(\vec{k}) = K \iint t(\vec{OP}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{OP}} dS = \sum_{i=1}^n \underline{A}_i(\vec{k})$$

$$\text{Où } \underline{A}_i(\vec{k}) = K \iint_{S_i} t(\vec{OP}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{OP}} dS$$

$$\text{Ou, en notant } t_i(\vec{OP}) = \begin{cases} t(\vec{OP}) & \text{si } P \in S_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_i(\vec{k}) &= K \iint t_i(\vec{OP}) e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{OO}_i + \vec{O}_iP)} dS \\ &= e^{-i\vec{k} \cdot \vec{OO}_i} \underbrace{K \iint t_i(\vec{O}_iP) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{O}_iP} dS}_{\text{indépendant de } i} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \underline{A}(\vec{k}) = \underbrace{\left(K \iint t_1(\vec{O}_1 P) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{O}_1 P} dS \right)}_F \underbrace{\sum_{i=1}^N e^{i\vec{k} \cdot \vec{OO}_i}}_S$$

F : facteur de forme, correspond à l'amplitude diffractée par une seule forme
 S : facteur de structure.

- Convolution :

$$t(\vec{r}) = t_1(\vec{r}) \otimes \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \text{ avec } \vec{r}_i = \vec{OO}_i. \text{ Ainsi, } \underline{A}(\vec{k}) = K \tilde{t}_1(\vec{k}) \times \sum_{i=1}^N e^{-i\vec{k} \cdot \vec{OO}_i}$$

- Intensité :

$$I = FF^* SS^*$$

2) Répartition régulière ou aléatoire

- Régulière : Pour des réseaux ou des cristaux, la figure de diffraction renseigne aussi bien sur la structure que sur la forme du diaphragme.

- Aléatoire :

- Analyse sommaire :

On a $I = FF^* SS^*$

$$\text{Et } SS^* = \left(\sum_{i=1}^N e^{-i\vec{k} \cdot \vec{OO}_i} \right) \left(\sum_{j=1}^N e^{+i\vec{k} \cdot \vec{OO}_j} \right) = N + \sum_{i < j} 2 \cos \vec{k} \cdot \vec{O}_j \vec{O}_i$$

Comme la répartition est aléatoire, peut-on considérer que $\sum_{i < j} 2 \cos \vec{k} \cdot \vec{O}_j \vec{O}_i = 0$?

Dans ce cas, $I = NFF^*$, ce qui correspond à la somme des intensités de N fentes simples.

- Analyse fine :

(1) Marche au hasard :

Si on fait N pas aléatoirement : on parcourt une distance ΔN , et en général $|\Delta N| > 0$

Si on fait un grand nombre d'expériences comme celles-ci, on trouve une valeur moyenne $|\overline{\Delta N}| \propto \sqrt{N}$

On a donc un étalement.

Dans notre cas, on a une somme de $N^2 - N \sim N^2$ termes, donc $\sum_{i < j} 2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{O}_j \vec{O}_i) \sim \sqrt{N^2}$

(2) Application à la diffraction :

On a $I = FF^* SS^*$, SS^* étant aléatoire, et FF^* fixé.

- Poudre de Lycopode (grains très réguliers) :

On souffle de la poudre de Lycopode sur une plaque de verre : on obtient d'après le théorème de Babinet la même chose que si on avait fait des trous.

On trouve une tache centrale très lumineuse, avec des marbrures (« speckle »)

