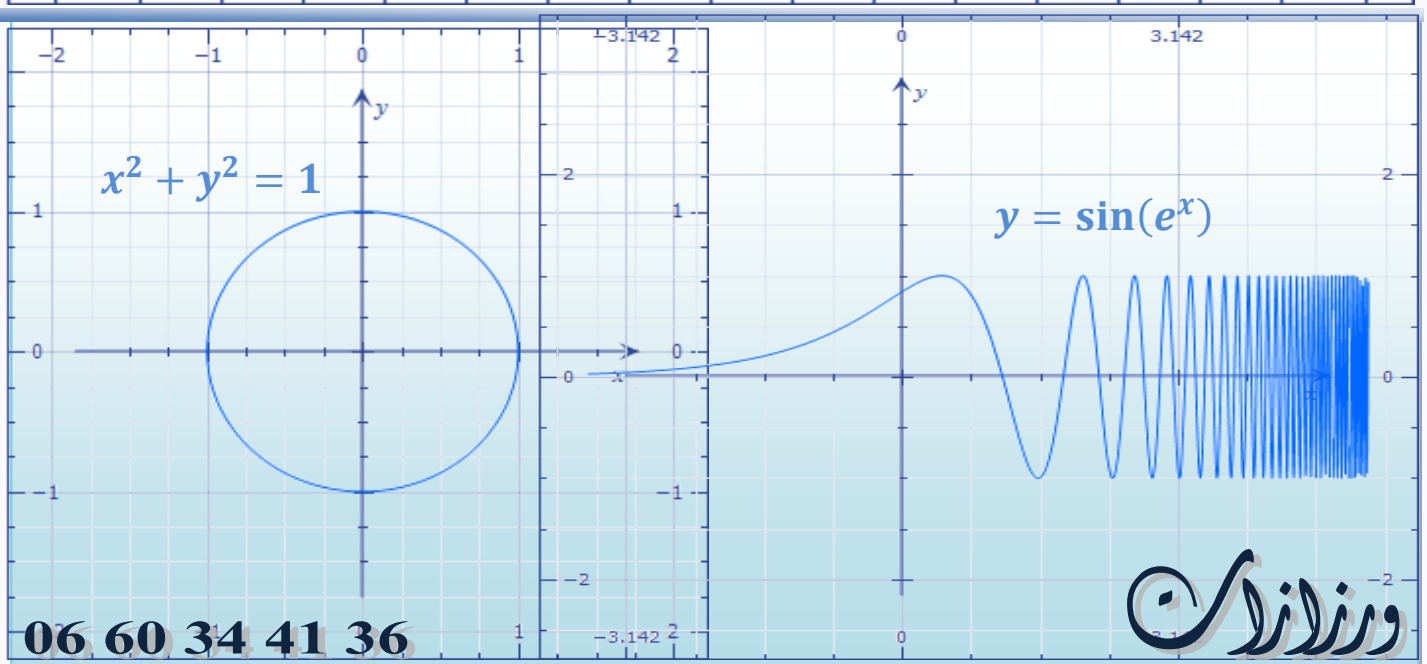
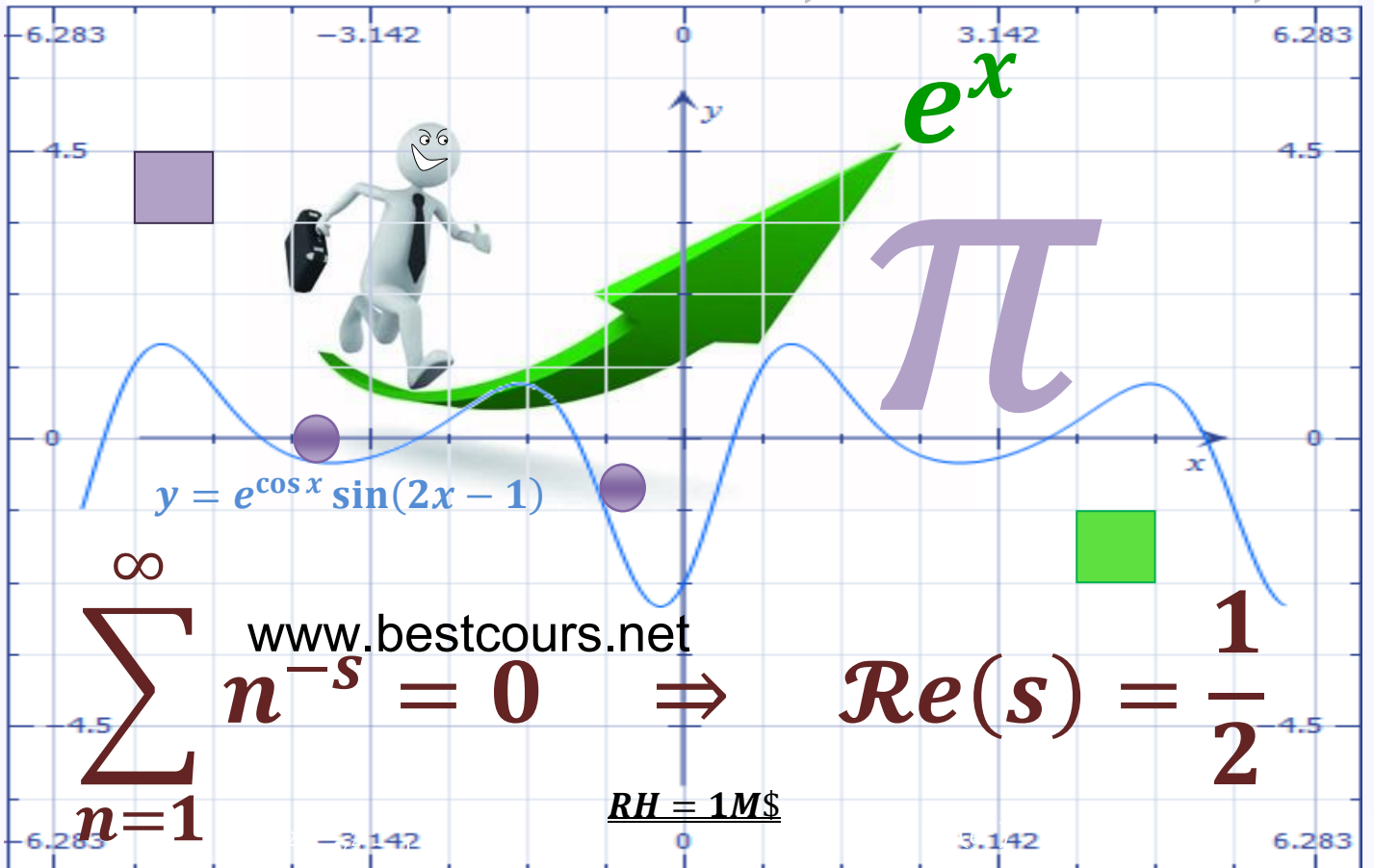


الاستعدادات الوطنية لتبيل شهادة البكالوريا

من 2003 إلى 2014 في مادة الرياضيات الفائزة تلاميذ السنة الثانية بكالوريا شعبة العلوم الرياضية أرو

عمل تطوعي من إخراج الأستاذ بدر الدين الفانجي - <http://www.professeurbadr.blogspot.com>





الاستعدادات

087.....	أجوبة موضوع الدورة العادية 2003
093.....	أجوبة موضوع الدورة الاستدراكية 2003
099.....	أجوبة موضوع الدورة العادية 2004
105.....	أجوبة موضوع الدورة الاستدراكية 2004
110.....	أجوبة موضوع الدورة العادية 2005
118.....	أجوبة موضوع الدورة الاستدراكية 2005
125.....	أجوبة موضوع الدورة العادية 2006
133.....	أجوبة موضوع الدورة الاستدراكية 2006
140.....	أجوبة موضوع الدورة العادية 2007
149.....	أجوبة موضوع الدورة الاستدراكية 2007
158.....	أجوبة موضوع الدورة العادية 2008
163.....	أجوبة موضوع الدورة الاستدراكية 2008
170.....	أجوبة موضوع الدورة العادية 2009
178.....	أجوبة موضوع الدورة الاستدراكية 2009
184.....	أجوبة موضوع الدورة العادية 2010
191.....	أجوبة موضوع الدورة الاستدراكية 2010
196.....	أجوبة موضوع الدورة العادية 2011
201.....	أجوبة موضوع الدورة الاستدراكية 2011
206.....	أجوبة موضوع الدورة العادية 2012
213.....	أجوبة موضوع الدورة الاستدراكية 2012
219.....	أجوبة موضوع الدورة العادية 2013
230.....	أجوبة موضوع الدورة الاستدراكية 2013
241.....	أجوبة موضوع الدورة العادية 2014
249.....	أجوبة موضوع الدورة الاستدراكية 2014

259	أجوبة امتحان مدينة بولمان
271	أجوبة امتحان مدينة بني ملال
278	أجوبة امتحان مدينة كلميم
285	أجوبة امتحان مدينة أكادير
292	أجوبة امتحان مدينة فاس
302	أجوبة امتحان مدينة القنيطرة
312	أجوبة امتحان مدينة الرباط
321	أجوبة امتحان مدينة إنزكان
331	أجوبة امتحان مدينة طنجة
343	أجوبة امتحان مدينة آسفي
تأجل	أجوبة امتحان مدينة وجدة
تأجل	أجوبة امتحان مدينة الخميسات
تأجل	أجوبة امتحان دولة الجزائر 2014
تأجل	أجوبة امتحان دولة تونس 2014

تهنئة الرياضيات

يُمثل هذا الكتاب النسخة المعدلة و المنقحة من كتاب وطنيات العلوم الرياضية. و هو ثمرة مجهود فردي مدعم بملاحظات بعض تلاميذ المغرب و الجزائر و تونس. و في هذا الباب، أشكر التلميذ وليد الشرفاوي من مدينة وادي زم على الملاحظات التي أسداها طيلة الموسم الدراسي، و أقدر له تشجيعاته المتواصلة. أسأل الله له التوفيق و السداد و أن يجعله مواطناً صالحاً يخدم هذا الوطن العزيز. كما أشكر التلميذين عبد الحليم الراشدي من مدينة تاونات و بدر الدين الناصري من الرباط اللذان نشرا النسخة الماضية على نطاق واسع داخل تخوم الأينترنت. و أشكر جزيل الشكر عثمان بوارك من وهران الجزائر و خالد مسناوي من تونس على تشجيعاتهما المتواصلة عبر الهاتف. أسأل الله أن يوفقهم جميعاً لصالح الأعمال و أن يهديهم سبيل الرشاد.

أرجوا من تلاميذ هذا الموسم أن يحذوا حذو هؤلاء ، و أن يرسلوا أية ملاحظة عبر SMS طيلة هذا العام. و من أجل هذا الهدف وضعت رقماً هاتفياً لهذا الغرض و ليس لتعبئته كما ادعى بعض المفكرين. أولئك أراهم قد ضلوا ضلالاً بعيداً. و منهم من أساء الفهم في صورة كانت الغاية من ورائها النكتة و روح الدعابة ، فراحوا يفسرون و يحللون في فراغ ، حتى إذا خلصوا من ذلك أخذوا يقذفون الخفي و الباد . لقد مشى الطاووس يوماً باختيال ، فقلد شكل مشيته بنوه. قال على ما تختالون قالوا : سبقت به و نحن مقلدوه . و ينشأ الفتى على ما كان عوده أبوه.

ذ بدر الدين الفاتحي



التمرين الأول: (3,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة (E) التالية : $x^2(x^2 + 7) = y(2x + y)$

ليكن (x, y) عنصرا من $(\mathbb{N}^*)^2$ و ليكن δ القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y .

نضع : $x = \delta a$ و $y = \delta b$

نفترض أن (x, y) حل للمعادلة (E) . تحقق أن : $a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a + b)$ **أ 1** ن 0,50

استنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $\delta^2 a^2 + 7 = kb$ و $2a + b = ka^2$ **ب** ن 0,50

بين أن : $a = 1$ **ج** ن 0,50

استنتج أن : $(b + 1)^2 = \delta^2 + 8$ **د** ن 0,75

حل في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E) . **2** ن 0,75

التمرين الثاني: (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

نعتبر المنحنى (E) الذي معادلته : $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$

بين أن (E) جزء من إهليلج يتم تحديده . **أ 1** ن 0,75

أرسم المنحنى (E) . **ب** ن 0,50

لتكن A و B النقطتين اللتين زوجا إحداثيتهما على التوالي هما : (4,0) و (0,3)

نعتبر النقطة M_1 من (E) التي أفصولها x_1 حيث x_1 ينتمي إلى المجال $[0,4]$.

نضع : $x_1 = 4\cos(t_1)$ حيث : $0 \leq t_1 \leq \frac{\pi}{2}$.

و نعتبر التكامل الآتي : $I(x_1) = \frac{3}{4} \int_{x_1}^4 \sqrt{16 - x^2} dx$

باستعمال المكاملة بتغيير المتغير و وضع $x = 4\cos(t)$ حيث $0 \leq t_1 \leq \frac{\pi}{2}$

بين أن : $I(x_1) = 6t_1 - 3\sin(2t_1)$ **أ 2** ن 1,00

لتكن $S(x_1)$ مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OM₁) و المنحنى (E)

و لتكن S مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OB) و المنحنى (E) .

تحقق أن أرتوب النقطة M_1 هو $3\sin(t_1)$. **ب** ن 0,25

أحسب $S(x_1)$ بدلالة t_1 . **ج** ن 0,25

استنتج قيمة S . **د** ن 0,25

بين صحة التكافؤ التالي : $S(x_1) = \frac{1}{2}S \Leftrightarrow t_1 = \frac{\pi}{4}$ **و** ن 0,25

حدد إحداثيتي النقطة M_1 في المعلم (O, \vec{OA}, \vec{OB}) في حالة $t_1 = \frac{\pi}{4}$. **هـ** ن 0,25

التمرين الثالث: (4,5 ن)

الجزء الأول: لكل (a, b) من \mathbb{R}^2 نعتبر المصفوفة : $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ I

في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لتكن E المجموعة المعرفة بما يلي : $E = \{ M_{(a,b)} ; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \}$

بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ و من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ **1** ن 0,75

بين أن $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية و واحدة . **2** ن 0,25

بين أن لكل عددين حقيقيين x و y لدينا : $(x^2 + xy + y^2 = 0) \Leftrightarrow (x = y = 0)$ **أ 3** ن 0,50

حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(E, +, \times)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
استنتج أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
الجزء الثاني : ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى \mathbb{R} .				
بين أن $(1, \sigma)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
نعتبر التطبيق ψ المعرف من E نحو \mathbb{C} بما يلي : $M_{(a,b)} \rightarrow a + \sigma b$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
بين أن ψ تشاكل تقابلي من $(E, +)$ نحو $(\mathbb{C}, +)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
نعتبر في \mathbb{C} المعادلة التالية : $z^2 - z + 1 = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
حل في مجموعة الأعداد العقدية هذه المعادلة و اكتب حلها على الشكل المثلثي أو الأسّي .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
نفترض في هذا السؤال أن $\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. بين أن ψ تشاكل من (E, \times) نحو (\mathbb{C}, \times) .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن

التمرين الرابع : (3,5 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{4 \ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في م م م (O, \vec{i}, \vec{j}) وحدته : $\ \vec{i}\ = \ \vec{j}\ = 2 \text{ cm}$				
أحسب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
بين أن : $\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = 4 \left(\frac{1-2 \ln x}{x^3} \right)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
إعط جدول تغيرات الدالة f .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين α و β بحيث : $1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي أفصولها 1 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
أرسم المنحنى (C)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
بين أن : $\forall t \in [0, +\infty[; 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
استنتج أن : $\forall a \in [0, +\infty[; a - \frac{a^2}{2} \leq \ln(1+a) \leq a$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث $n \geq 4$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
نعتبر الدالة f_n المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = \frac{n \ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$				
و ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في م م م (O, \vec{i}, \vec{j})				
أدرس تغيرات الدالة f_n .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
أدرس تقعر المنحنى (C_n) و بين أنه يقبل نقطة انعطاف أفصولها $e^{5/6}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ وذلك حسب قيم المتغير الحقيقي x .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين u_n و v_n بحيث : $1 < u_n < \sqrt{e} < v_n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
بين أن $(u_n)_{n \geq 4}$ متتالية تناقصية قطعا مستعملا نتيجة السؤال (3) .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
باستعمال (II) بين أن : $(\forall n \geq 4) ; \frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq u_n - 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
استنتج أن : $(\forall n \geq 4) ; \frac{(u_n)^2}{2n} \leq u_n - 1 \leq \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
بين أن : $(\forall n \geq 4) ; \frac{1}{2n} \leq u_n - 1 \leq \frac{e}{n}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 4}$ متقاربة محددتا نهايتها .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
بين أن : $(\forall n \geq 4) ; v_n > e^{5/6}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن



التمرين الأول: (3,5 ن)

لدينا صندوقان U و V . الصندوق U يحتوي على 4 كرات حمراء و 4 كرات زرقاء. الصندوق V يحتوي على كرتين حمراوين و 4 كرات زرقاء. نعتبر التجربة العشوائية التالية: "نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U ، إذا كانت حمراء نضعها في الصندوق V ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V . وإذا كانت زرقاء نضعها جانبا ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V ".

نعتبر الأحداث التالية: R_1 : "الكرة المسحوبة من U حمراء" B_1 : "الكرة المسحوبة من U زرقاء" R_2 : "الكرة المسحوبة من V حمراء" B_2 : "الكرة المسحوبة من V زرقاء"

- أحسب احتمال كل من الحدثين R_1 و B_1 . 1 1,00
- أحسب احتمال الحدث B_2 علما أن الحدث R_1 محقق، و احتمال B_2 علما أن B_1 محقق. 2 1,00
- بين أن: $p(B_2) = \frac{13}{21}$ 3 0,50
- استنتج احتمال الحدث R_2 . 4 0,50

التمرين الثاني: (4,5 ن)

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث: $0 \leq \theta \leq 2\pi$. نضع: $p = 5 \cos \theta + 3i \sin \theta$. نعتبر في \mathbb{C} المعادلة (E) التالية: $z^2 - 2pz + 16 = 0$ تحقق أن: $p^2 - (3 \cos \theta + 5i \sin \theta)^2 = 16$ أوجد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث: $|z_1| < |z_2|$ المستوى العقدي منسوب إلى $M(0, \vec{u}, \vec{v})$.

- نعتبر النقطتين M_1 و M_2 اللتين لحقاهما على التوالي هما: z_1 و z_2 . بين أنه عندما يتغير θ في $[0, 2\pi[$ فإن M_1 تتغير على دائرة (C) ينبغي تحديد معادلة لها. لتكن P منتصف $[M_1 M_2]$. ولتكن (Γ) مجموعة النقط P عندما يتغير θ في المجال $[0, 2\pi]$. بين أن (Γ) إهليلج بؤرتاه هما النقطتان F و F' اللتان لحقاهما على التوالي هما 4 و -4. بين أنه لكل عددين عقديين a و b من $\mathbb{C} \setminus \{4\}$. لدينا التكافؤ التالي:

$$\left(\frac{b+4}{b-4}\right) = -\left(\frac{a+4}{a-4}\right) \Leftrightarrow (ab = 16)$$

استنتج أن: $\left(\frac{z_2+4}{z_2-4}\right) = -\left(\frac{z_1+4}{z_1-4}\right)$ ب 0,50

بين أن: $(\overline{M_1 F}, \overline{M_1 F'}) \equiv \pi + (\overline{M_2 F}, \overline{M_2 F'}) [2\pi]$ ج 0,50

بين أن معادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) في النقطة P هي: $3x \cos \theta + 5y \sin \theta = 15$ د 0,50

بين أن المماس (T) عمودي على المستقيم $(M_1 M_2)$. ب 0,50

التمرين الثالث: (3,5 ن)

لكل زوج (a, b) من \mathbb{Z}^2 نعتبر المصفوفة: $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$ في $M_2(\mathbb{R})$ نعتبر المجموعة (E) المعرفة بما يلي: $E = \{M_{(a,b)}; a^2 - 2b^2 = 1\}$

نضع : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ تحقق أن : $A \in E$ **1** 0,25 ن

بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ و أن القانون \times تبادلي في المجموعة E . **2** 0,50 ن

بين أن جميع عناصر E تقبل مقلوبا في E بالنسبة للقانون \times . **ب** 0,50 ن

بين أن (E, \times) زمرة تبادلية **ج** 0,50 ن

نضع : $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A^{n+1} = A^n \times A$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

و نعتبر المجموعة : $G = \{A^n ; n \in \mathbb{N}\}$

تحقق أن : $G \subset E$ **3** 0,25 ن

لتكن H مجموعة مماثلات مصفوفات G بالنسبة للقانون \times في المجموعة E .

بين أن : $H = \{B^n ; n \in \mathbb{N}\}$ حيث : $B = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ **ب** 0,50 ن

بين أن $G \cup H$ زمرة جزئية من (E, \times) . **ج** 0,50 ن

التمرين الرابع : (9,5 ن)

لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $g_n(x) = x + e^{-nx}$ **I**

و ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة g_n في $M M M$ (O, \vec{i}, \vec{j}) .

أدرس تغيرات الدالة g_n . **1** 0,50 ن

بين أن g_n تقبل قيمة دنيا عند عدد حقيقي u_n يتم تحديده بدلالة n . **ب** 0,50 ن

أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x)$ **2** 0,50 ن

حدد الفرعين اللانهائين للمنحنى (C_n) **ب** 0,50 ن

أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) الممثلين على التوالي للدالتين g_1 و g_2 . **3** 0,50 ن

أرسم في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) المنحنيين (C_1) و (C_2) . (نأخذ : $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$) **ب** 0,50 ن

باستعمال مكاملة بالأجزاء ، أحسب بدلالة x التكامل التالي : $I(x) = \int_0^x t e^{-2t} dt$ **4** 1,00 ن

لتكن h_2 قصور الدالة g_2 على المجال $[0, \ln 2]$.

أحسب حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران التمثيل المبياني لـ h_2 حول محور الأفاصيل. **ب** 0,50 ن

نضع : $v_n = g_n(u_n)$. بين أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربتان و حدد نهايتهما. **5** 1,00 ن

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f_n(x) = x + e^{nx}$ **II**

و ليكن (Γ_n) منحنى الدالة f_n في $M M M$ (O, \vec{i}, \vec{j}) .

أدرس تغيرات الدالة f_n **1** 0,50 ن

استنتج أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n . **2** 0,50 ن

بين أن : $\alpha_1 \in]-\ln 2 ; \frac{-1}{2}[$ **3** 0,50 ن

بين أن الكميتين $(x - \alpha_1)$ و $(e^x + \alpha_1)$ لهما نفس الإشارة. **ب** 0,50 ن

لتكن φ الدالة العددية المعرفة على $]-\infty ; \frac{-1}{2}[$ بما يلي : $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$

بين أن الدالة φ تناقصية على المجال $]-\infty ; \frac{-1}{2}[$. **4** 0,50 ن

استنتج أن : $|e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|x - \alpha_1|$ **ب** 0,50 ن

نعتبر المتتالية $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} \beta_{n+1} = -e^{\beta_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \\ \beta_0 = \frac{-1}{2} \end{cases}$

بين أنه يوجد عدد حقيقي a بحيث : $|\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq a |\beta_n - \alpha_1|$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ **5** 0,50 ن

بين أن المتتالية $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها. **ب** 0,50 ن



التمرين الأول: (3,0 ن)

- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .
- بين أنه إذا كان n عددا فرديا فإن : $n^2 \equiv 1[8]$. **1** 0,50 ن
- بين أنه إذا كان n عددا زوجيا فإن : $n^2 \equiv 0[8]$ أو $n^2 \equiv 4[8]$. **ب** 0,50 ن
- لتكن a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة طبيعية فردية .
- بين أن $(a^2 + b^2 + c^2)$ ليس مربعا كاملا . **2** 0,50 ن
- بين أن : $2(ab + bc + ac) \equiv 6[8]$. **ب** 0,50 ن
- (لاحظ أن : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$)
- استنتج أن : $2(ab + ac + bc)$ ليس مربعا كاملا . **ج** 0,50 ن
- بين أن : $(ab + ac + bc)$ ليس مربعا كاملا . **د** 0,50 ن

التمرين الثاني: (3,5 ن)

- لتكن E مجموعة المصفوفات المربعة التي تكتب على الشكل : $M_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}(a - \frac{1}{a}) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$
- و لتكن F مجموعة المصفوفات المكتوبة على شكل : $N_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}(a - \frac{1}{a}) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}$
- بين أن : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_*^2 ; M_a \times M_b = M_{ab}$. **1** 0,50 ن
- ليكن φ التطبيق المعرف من \mathbb{R}^* نحو E بما يلي : $\varphi(a) = M_a$.
- بين أن φ تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) . **ب** 0,50 ن
- استنتج البنية الجبرية للمجموعة (E, \times) . **ج** 0,50 ن
- بين أن : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_*^2 ; N_a \times N_b = M_{\frac{a}{b}}$. **2** 0,50 ن
- نضع : $G = E \cup F$. بين أن (G, \times) زمرة . **ب** 0,50 ن
- هل (G, \times) زمرة تبادلية ؟ **ج** 0,50 ن

التمرين الثالث: (3,5 ن)

- حل في \mathbb{C} المعادلة : $z^2 + z + 1 = 0$. **1** 0,75 ن
- نضع : $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ و $z' = \frac{1}{z^2 + z + 1}$
- مع : $-\pi \leq \theta \leq \pi$ و $\theta \neq \frac{2\pi}{3}$ و $\theta \neq \frac{-2\pi}{3}$.
- تحقق أن : $1 + z + z^2 = z(1 + z + \bar{z})$. **2** 0,75 ن
- أحسب معيار و عمدة العدد العقدي z' بدلالة θ . **ب** 0,75 ن
- نضع : $z' = x + iy$ حيث $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. بين أن : $x^2 + y^2 = (1 - 2x)^2$. **ج** 0,75 ن
- استنتج أن M ذات اللحق z' تنتمي إلى هذلول يتم تحديد مركزه و رأسيه و مقاربيه . **د** 0,50 ن

التمرين الرابع : (3,5 ن)



نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^* بما يلي : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ **I**

أحسب نهايات الدالة f عند محددات مجموعة تعريفها D_f . **1** 0,50 ن

أدرس تغيرات الدالة f . **2** 0,50 ن

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$.
أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C) . **3** 0,50 ن

أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j})$. **ب** 0,25 ن

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بـ : $\begin{cases} u_{n+1} = (u_n)^2 f(u_n) = u_n e^{-u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$ **II**

بين أن : $e^x \geq x + 1$; $(\forall x \in \mathbb{R})$ **1** 0,25 ن

استنتج أن : $x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1}$; $(\forall x > 0)$ **2** 0,25 ن

باستعمال البرهان بالترجع بين أن : $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ **3** 0,50 ن

بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها. **ب** 0,75 ن

نعتبر من أجل كل عنصر n من \mathbb{N}^* المتتالية التالية : $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$
بين أن : $v_n = \ln\left(\frac{1}{u_n}\right)$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ **4** 0,75 ن

حدد نهاية المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. **ب** 0,50 ن

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي :
 $\begin{cases} F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t) dt ; (\forall x > 0) \\ F(0) = 2 \ln 2 \end{cases}$ **III**

تحقق أن : $\int_{x^2}^{4x^2} \frac{1}{t} dt = 2 \ln 2$; $(\forall x > 0)$ **1** 0,25 ن

باستعمال نتيجة السؤال (1) من الجزء الثاني بين أن : $-t < e^{-t} - 1 \leq 0$; $(\forall t > 0)$ **ب** 0,50 ن

بين أن : $-3x^2 \leq F(x) - 2 \ln 2 \leq 0$; $(\forall t > 0)$ **2** 0,50 ن

استنتج أن F دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر. **ب** 0,25 ن

بين أن : $f(t) < e^{-t}$; $(\forall t \geq 1)$ **3** 0,25 ن

استنتج النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ **ب** 0,50 ن

بين أن F قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و احسب $F'(x)$. **4** 0,75 ن

إعط جدول تغيرات الدالة F . **ب** 0,50 ن

أنشئ (C_F) المنحنى الممثل للدالة F في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$. **ج** 0,50 ن

لتكن G الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي :
 $G(x) = \int_x^{4x} e^{-t} \ln t dt$ **5** 0,50 ن

بين أن : $G(x) = F(\sqrt{x}) - e^{-4x} \ln(4x) + e^{-x} \ln(x)$; $(\forall x > 0)$ **ب** 0,50 ن

أحسب النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x} - e^{-4x}) \ln x$ **ب** 0,50 ن

استنتج النهاية التالية : $\lim_{x > 0} G(x)$ **ج** 0,25 ن



التمرين الأول: (3,5 ن)

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و 10 كرات حمراء لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب عشوائيا كرة من هذا الكيس ، إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نعيدها إلى الكيس

و إذا كانت بيضاء نضع بدلها 3 كرات حمراء في الكيس ثم نسحب كرة من الكيس .

أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين .

أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوين .

أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين .

أحسب الاحتمال لكي تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء علما أن الكرة الثانية المسحوبة بيضاء.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

0,50 ن
0,50 ن
0,75 ن
0,75 ن

التمرين الثاني: (3,5 ن)

حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) التالية : $3x - 2y = 1$ (E)

ليكن $n \in \mathbb{N}$. بين أن الزوج $(14n + 3 ; 21n + 4)$ حل للمعادلة (E) .

استنتج أن العددين $(14n + 3)$ و $(21n + 4)$ أوليان فيما بينهما .

ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين $(2n + 1)$ و $(21n + 4)$.

بين أن : $d = 1$ أو $d = 13$.

أثبت صحة التكافؤ التالي : $d = 13 \Leftrightarrow n \equiv 6[13]$.

من أجل $n \geq 2$ نضع : $A = 21n^2 - 17n - 4$ و $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$

بين أن العددين A و B قابلين للقسمة على العدد $(n - 1)$ في المجموعة \mathbb{Z} .

حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

0,75 ن
0,25 ن
0,50 ن
0,50 ن
0,25 ن
0,25 ن
0,50 ن

التمرين الثالث: (3,5 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى M م م م م (O, \vec{u}, \vec{v})

ليكن a عددا عقديا غير منعدم مكتوب جبريا على شكل : $a = \alpha + i\beta$.

لتكن (H) مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق : $z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2$.

حدد طبيعة المجموعة (H) .

أنشئ (H) في الحالة $a = 1 + i$.

لتكن (C) مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق : $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4a\bar{a}$.

حدد طبيعة المجموعة (C) .

أنشئ (C) في الحالة $a = 1 + i$.

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} النظام (S) التالية : $\begin{cases} z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2 \\ (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases}$ (S)

نضع : $u = z - a$.

بين أن (S) تكافئ النظام (S') التالية : $\begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ (u + 2a)(u^3 - 8a(\bar{a})^2) = 0 \end{cases}$ (S')

نضع $a = re^{i\theta}$ حيث $r > 0$ و $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

حدد بدلالة r و θ ألقاق نقط تقاطع المنحنيين (C) و (H) .

استنتج أن تقاطع (C) و (H) يتضمن ثلاث نقط و هي رؤوس لمثلث متساوي الأضلاع .

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ج	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

0,50 ن
0,50 ن
0,75 ن
0,25 ن
0,75 ن
0,75 ن
0,50 ن

التمرين الرابع : (3,5 ن)

$$\begin{cases} f(x) = 4x e^{-x \ln 2} - 2 \\ g(x) = \frac{\ln(2x)}{x} \end{cases}$$

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي :

و ليكن (C) و (T) المنحنيين الممثلين للدالتين f و g على التوالي في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$.

أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

حدد الفرعين اللانهائين للمنحنى (C) .

بين أن : $f'(x) = 4(1 - x \ln 2)e^{-x \ln 2}$; $(\forall x \in \mathbb{R})$.

اعط جدول تغيرات الدالة f . بين أن 1 و 2 هما الحلين الوحيديين للمعادلة $f(x) = 0$.

أدرس الدالة g : الفروع اللانهائية - النهايات - الرتبة.

أرسم المنحنيين (C) و (T) في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) و نأخذ : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4 \text{ cm}$.

(تحديد نقط الانعطاف غير مطلوب)
ليكن k عدد حقيقيا بحيث : $0 < k < \frac{2}{e}$

تحقق مبيانيا أن المعادلة $g(x) = k$ تقبل حلين مختلفين α و β بحيث : $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$

حدد قيمة k بحيث يكون α و β هما حلا المعادلة $f(x) = 0$.

نعتبر الدالة العددية f_k المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f_k(x) = 4x e^{-kx} - 2$

تأكد من أن : $f'_k(x) = 4(1 - kx)e^{-kx}$; $(\forall x \in \mathbb{R})$.

إعط جدول تغيرات الدالة f_k .

استنتج أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين a و b بحيث : $a < \frac{1}{k} < b$.

بين أن : $a = \alpha$ و $b = \beta$.

باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^t x e^{-kx} dx = \frac{1}{k^2} (1 - kt e^{-kt} - e^{-kt})$; $(\forall t \in \mathbb{R})$

أحسب التكامل : $I_k = \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x) dx$ بدلالة α و β

استنتج أن : $\ln(2\alpha) \cdot \ln(2\beta) \leq 1$

بين أنه إذا كان u و v عنصرين مختلفين من \mathbb{R}_+^* بحيث : $\frac{\ln u}{u} = \frac{\ln v}{v}$

فإن : $\ln(u) \cdot \ln(v) \leq 1$



التمرين الأول: (3,5 ن)

نعتبر في \mathbb{R}^2 قانون التركيب الداخلي * المعرف بما يلي :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (a, b) * (x, y) = \left(\frac{ax + by}{2}, \frac{ay + bx}{2} \right)$$

نعتبر المجموعة التالية: $E = \left\{ \left(m + \frac{1}{m}; m - \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 ; m \in \mathbb{R}^* \right\}$

بين أن * قانون تركيب داخلي في المجموعة E. 1 0,75 ن

ليكن φ التطبيق من \mathbb{R}^* نحو E بما يلي: $\varphi(m) = \left(m + \frac{1}{m}; m - \frac{1}{m} \right)$; $(\forall m \in \mathbb{R}^*)$

بين أن φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو $(E, *)$. 2 0,50 ن

استنتج أن $(E, *)$ زمرة تبادلية محددًا عنصرا محايد. ب 0,75 ن

و حدد مماثل كل عنصر $\left(m + \frac{1}{m}; m - \frac{1}{m} \right)$ حيث m عدد حقيقي غير منعدم.

نعتبر المجموعة (F) التالية: $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 2 \text{ et } y^2 = x^2 - 4 \}$

بين أن: $F = \left\{ \left(m + \frac{1}{m}; m - \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 ; m > 0 \right\}$ 3 1,00 ن

بين أن $(F, *)$ زمرة جزئية من $(E, *)$. ب 1,00 ن

التمرين الثاني: (3,5 ن)

ليكن p عددا صحيحا طبيعيا أوليا و أكبر من أو يساوي 5.

بين أن: $p^2 \equiv 1[3]$. 1 0,50 ن

بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي q بحيث: $p^2 - 1 = 4q(q + 1)$. 2 0,50 ن

استنتج أن: $p^2 \equiv 1[8]$. ب 0,50 ن

بين أن: $p^2 \equiv 1[24]$. 3 0,50 ن

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا أوليا مع العدد 24.

بين أن: $a^2 \equiv 1[24]$. 1 0,50 ن

هل توجد أعداد صحيحة طبيعية a_1, a_2, \dots, a_{23} بحيث:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{23}^2 = 23997 \text{ و } \forall k \in \{1, 2, \dots, 23\}; a_k \wedge 24 = 1$$

التمرين الثالث: (3,5 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = (x + 2)e^{-\frac{2}{x}}$; $\forall x > 0$; $f(0) = 0$ 1 0,25 ن

وليكن (C_f) المنحنى للممثل للدالة f في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$. بحيث: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$

بين أن f متصلة على اليمين في الصفر. 1 0,25 ن

بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر. ب 0,25 ن

بين أن f تزايدية قطعا على المجال $[0, +\infty[$. ج 0,50 ن

أحسب النهاية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 2 0,25 ن

بين أن: $(\forall t \geq 0); 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$ ب 0,50 ن

بين أن: $(\forall t > 0); \frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$ ج 0,50 ن

استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا مائلا (Δ) ينبغي تحديد معادلته .	د	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم . نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right) e^{-\frac{2}{x}}$; $\forall x > 0$ $f_n(0) = 0$	II	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
بين أن الدالة f_n قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر .	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0, +\infty[$.	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
بين أن لكل n من \mathbb{N}^* ، المعادلة $f_n(x) = \frac{2}{n}$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0, +\infty[$.	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
بين أن : $f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$; $(\forall x > 0)$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$;	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
استنتج أن المتتالية $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة . نضع : $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)$	ج	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
بين أن : $n a_n = 2 e^{\left(\frac{2}{a_n}\right)} - 2$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$;	د	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
بين أن : $a = 0$	هـ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$ (بحيث f هي الدالة المعرفة في الجزء الأول)	III	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
بين أن : $x f(x) \leq F(x) \leq x f(2x)$; $(\forall x > 0)$	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
أحسب النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$.	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
و أن : $F'(x) = e^{-\frac{2}{x}} \left((x+2) \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) + (3x+2) e^{\frac{1}{x}} \right)$; $\forall x > 0$ $F'_d(0) = 0$ (هو العدد المشتق للدالة F على اليمين في الصفر)		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
إعط جدول تغيرات الدالة F .	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن

التمرين الرابع : (3,5 ن)

لكل عدد عقدي z مخالف للعدد (-1) نضع : $f(z) = \frac{iz-1}{(z+1)^2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
حدد العدد الحقيقي y بحيث : $f(iy) = iy$.	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
حل في \mathbb{C} المعادلة $(E) : f(z) = z$ التالية :	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1,00 ن
نرمز بـ z_0 و z_1 و z_2 لحلول (E) حيث : $Re(z_1) > Re(z_2)$ و $Re(z_0) = 0$.		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
تحقق أن : $z_2 + 1 = e^{\left(\frac{i7\pi}{6}\right)}$ و $z_1 + 1 = e^{\left(\frac{i11\pi}{6}\right)}$	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
استنتج الكتابة المثلثية لكل من العددين العقديين z_1 و z_2 .	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
في هذا السؤال نفترض أن : $z = e^{i\alpha}$ حيث : $0 \leq \alpha < \pi$.		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
بين أن : $f(z) = iz f(z)$.	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
حدد α إذا علمت أن : $f(z) + \overline{f(z)} = 0$.	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
أكتب $f(z)$ على الشكل $(z) = r e^{i\varphi}$ حيث : $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.	ج	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
حدد z إذا علمت أن : $ z = 1$ و أن : $Re(f(z)) = \frac{1}{2}$	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن



التمرين الأول: (3,5 ن)

ليكن $x \wedge y$ القاسم المشترك الأكبر للعددين النسبيين x و y .

و ليكن $\overline{abc}^{(x)}$ تمثيل العدد abc في نظمة العد ذات الأساس x .

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة: $(E) : (x + 1)^2 = 9 + 5y$.

ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E) . بين أن: $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 2[5]$. 1 0,50 ن

حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) . ب 0,50 ن

بين أن: $(\forall k \in \mathbb{Z}) ; (5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = (k - 3) \wedge 8$ 2 0,75 ن

حل في \mathbb{N}^2 النظمة التالية: $\begin{cases} \overline{121}^{(x)} = \overline{59}^{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$ 3 0,75 ن

التمرين الثاني: (3,5 ن)

في المستوى العقدي المنسوب إلى m, m, m, m (O, \vec{u}, \vec{v}) ، نعتبر المنحنى (C_m) المعروف بـ: 1

$$(C_m) = \left\{ M(x, y) \in \mathcal{P} ; \frac{x^2}{(10 - m)} + \frac{y^2}{(2 - m)} = 1 ; m \in \mathbb{R} \setminus \{2; 10\} \right\}$$

ناقش حسب قيم البارامتر الحقيقي m طبيعة المنحنى (C_m) . 1 1,00 ن

إذا كان (C_m) مخروطيا، إعط عناصره المميزة. 2 1,00 ن

أرسم المنحنى (C_1) . 3 0,25 ن

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$(E) : z^2 - (6 \cos \alpha)z + 1 + 8 \cos^2 \alpha = 0 ; 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

حل في \mathbb{C} المعادلة (E) . 1 0,50 ن

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث: $\text{Im}(z_1) > 0$

ولتكن M_1 و M_2 النقطتان ذواتا اللحين z_1 و z_2 على التوالي. تحقق أن $M_1 \in (C_1)$ أ 2 0,25 ن

بين أنه توجد نقطتان P_1 و P_2 من (C_1) حيث يكون فيهما المماس ب 0,75 ن

للمنحنى (C_1) موازيا للمستقيم (OM_1) .

تحقق أن: $OM_1^2 + OP_1^2 = OM_2^2 + OP_2^2$ ج 0,75 ن

التمرين الثالث: (3,5 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 20.

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و $(n - 10)$ كرة سوداء، نفترض أن كل الكرات غير

قابلة للتمييز باللمس. نسحب كرة من الكيس و نسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس. نكرر هذه

التجربة و نسمي p_k احتمال الحصول على كرة بيضاء k ($0 \leq k \leq n$).

أحسب p_k بدلالة n و k . 1 0,50 ن

نضع: $u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k}$ حيث: $k \in \{0; 1; 2; \dots; (n - 1)\}$

بين أن: $u_k = \frac{n-k}{k+1} \times \frac{10}{n-10}$ أ 2 0,50 ن

- بين أن : $0 \leq k \leq 9 \Leftrightarrow u_k \geq 1$ و $10 \leq k \leq n-1 \Leftrightarrow u_k \leq 1$ 0,50 ن
- استنتج أكبر قيمة عددية M للعدد p_k عندما يتغير k في المجموعة $\{0,1,\dots,n\}$ 1,00 ن
- و بين أن : $M = \frac{n!}{n^n} \times \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}$

التمرين الرابع : (3,5 ن)

- لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = (1+x)e^{-2x}$ I
- و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في $M \times M \times M$ (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 1 0,50 ن
- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C) . B 0,50 ن
- أدرس تغيرات الدالة f على \mathbb{R} . 2 0,50 ن
- أدرس تقعر المنحنى (C) . 3 0,50 ن
- أنشئ المنحنى (C) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) . B 0,50 ن
- بين أن الدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية التالية : $y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$ (E) : 4 0,50 ن
- حدد الحل العام للمعادلة (E) . B 0,50 ن
- ليكن n عنصرا من \mathbb{N}^* و نرمز بـ \mathcal{A}_n لمساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و محور الأرتايب و المستقيم ذي المعادلة $x = n$.
- أحسب المساحة \mathcal{A}_n بدلالة n . 1 1,00 ن
- أحسب النهاية التالية : $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_n$ 2 0,50 ن
- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = n \int_0^1 (f(x))^n dx$ III
- بين أن : $u_n = \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} dt$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; (يمكن وضع $xn = t$) 1 0,75 ن
- بين أن : $2 - r \leq \frac{1}{r} \leq 1$; $\forall r \in [1; 2]$ 2 0,50 ن
- استنتج أن : $x - \frac{x^2}{2n} \leq n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , (\forall x \in [0, n])$ B 0,75 ن
- بين أن : $u_n \leq \int_0^n e^{-x} dt$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; 3 0,50 ن
- بين أن : $e^{\frac{-1}{2\sqrt{n}}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x} dx \leq u_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; B 0,75 ن
- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها 4 0,75 ن
- بين أن : $\int_a^1 n(f(x))^n dx \leq n(1-a)(f(a))^n$; $\forall a \in]0,1[$ 4 0,50 ن
- استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^1 n(f(x))^n dx = 0$; $\forall a \in]0,1[$ B 0,50 ن
- أحسب النهاية : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a n(f(x))^n dx$ لكل a من المجال $]0,1[$. 4 0,50 ن



التمرين الأول: (3,5 ن)

- نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة .
لتكن G مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل : $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ حيث a عدد حقيقي و b عدد حقيقي غير منعدم .
بين أن G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ **1** 0,25 ن
بين أن (G, \times) زمرة ، هل هي تبادلية ؟ **2** 0,75 ن
لتكن H مجموعة المصفوفات $M_{(a,b)}$ من G حيث : $b > 0$
بين أن H زمرة جزئية للزمرة (G, \times) . **3** 0,50 ن
ليكن A عنصرا من G حيث $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ و $a \in \mathbb{R}$.
نضع : $A^1 = A$ و $A^2 = A \times A$ و $A^{n+1} = A^n \times A$.
أحسب A^n بدلالة a و n بحيث $n \in \mathbb{N}^*$. **4** 0,50 ن
نعتبر في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ قانون التركيب الداخلي \top المعرف بما يلي : $(a, b) \top (x, y) = (a + bx, by)$.
و ليكن φ التطبيق المعرف من (G, \times) نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*; \top)$ بما يلي : $\varphi(M_{(a,b)}) = (a, b)$.
بين أن φ تشاكل تقابلي من (G, \times) نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*; \top)$. **1** 0,75 ن
استنتج البنية الجبرية للمجموعة $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*; \top)$. **2** 0,25 ن
حدد مماثل العنصر $(a, 1) \top \dots \top (a, 1)$ في $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*; \top)$ **3** 0,50 ن
n fois

التمرين الثاني: (3,5 ن)

- نعتبر في المجموعة $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة التالية : $(E) : x^2(x + y) = y^2(x - y)^2$.
ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E) . نضع : $d = x \wedge y$ و $x = ad$ و $y = bd$.
تحقق أن : $db^2(a - b)^2 = (a + b)a^2$. **أ** 0,25 ن
استنتج أن $b = 1$. **ب** 0,75 ن
بين أن $a \neq 1$ و أن العدد $(a - 1)$ يقسم العدد $(a + 1)$. **ج** 0,50 ن
استنتج أن $a = 2$ أو $a = 3$. **د** 0,50 ن
حل في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة (E) . **2** 0,50 ن

التمرين الثالث: (3,5 ن)

- نعتبر في \mathbb{C} الحدودية التالية : $P(z) = z^2 - (2 + 6i)z$.
في المستوى العقدي المنسوب إلى M م م م م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، نعتبر (H) مجموعة النقط M ذات اللحق z التي يكون من أجلها $P(z)$ عددا تخيليا صرfa .
بين أن $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$ معادلة ديكارتية للمجموعة (H) . **1** 0,50 ن
بين أن (H) هذلول و حدد مركزه و رأسيه و معادلتيه مقاربيه في $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. **2** 1,00 ن
تحقق أن النقطة O ، أصل المعلم، تنتمي إلى المجموعة (H) ثم اكتب في المعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (H) في النقطة O . **3** 0,50 ن
أنشئ (H) في المعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. **4** 0,75 ن
حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 4 - 6i$. **1** 0,50 ن

ضع : $u = 1 + 5i$ و $v = 1 + i$ و $\omega = 239 - i$

و $\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$ و $\beta = \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$.

تحقق أن : $u^4 \times v = 4\omega$ 0,50 ن

حدد بدلالة α عمدة العدد العقدي u و حدد بدلالة β عمدة العدد العقدي ω . 0,75 ن

استنتج أن : $4 \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$ 0,50 ن

التمرين الرابع : (3,5 ن)

الجزء الأول : ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 3 .

نعتبر الدالة g_n المعرفة على \mathbb{R}_+^* بما يلي : $g_n(x) = nx + 2 \ln x$

ضع جدول تغيرات الدالة g_n . 0,50 ن

بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \sqrt{x} > \ln x$. 0,50 ن

بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في \mathbb{R}_+^* . حيث : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ 0,75 ن

استنتج النهاية التالية : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)$ 0,25 ن

الجزء الثاني :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt[3]{x} e^{-x}$

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في M م م (O, \vec{i}, \vec{j}) بحيث : $\|\vec{i}\| = 3 \text{ cm}$.
أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين الصفر ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها . 0,50 ن

أحسب النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و اعط تأويلا هندسيا لها . 0,50 ن

بين أن : $f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x) \quad \forall x \in]0, +\infty[$ (*) 0,25 ن

ضع جدول تغيرات الدالة f . 0,25 ن

أنشئ (C) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) 0,50 ن

بين أن : $f(I) \subset I$. حيث : $I = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 0,50 ن

باستعمال العلاقة (*) ، بين أن : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3} \quad (\forall x \in I)$ 0,50 ن

ليكن حل المعادلة $g_3(x) = 0$ الذي سبق ذكره في الجزء الأول .

بين صحة التكافؤ التالي : $x = \alpha_3 \Leftrightarrow (f(x) = x ; x > 0)$ 0,50 ن

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$

بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in I$. 0,25 ن

بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha_3| = \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3|$ 0,25 ن

استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ 0,50 ن

بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة و حدد نهايتها . 0,50 ن

لتكن F الدالة العددية المعرفة المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{8x} f(t) dt$

بين أن F قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$. 0,25 ن

أحسب $F'(x)$ لكل x من $[0, +\infty[$. ثم استنتج تغيرات الدالة F . 0,75 ن

بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$ 0,50 ن

استنتج النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 0,25 ن

ضع جدول تغيرات الدالة F . 0,25 ن



التمرين الأول: (2,0 ن)

نوزع بطريقة عشوائية أربع كرات غير قابلة للتمييز باللمس و مرقمة بالأرقام 1 و 2 و 3 و 4 على ستة أشخاص A و B و C و D و E و F. (كل شخص يمكنه أن يحصل على 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 كرات)

ما هو عدد امكانيات توزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة ؟ 1 0,50 ن

أحسب احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل . 2 0,50 ن

أحسب احتمال الحدث التالي : " مجموع عددي الكرات المحصل عليها من طرف الشخصين B و C يساوي عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص A . 3 1,00 ن

التمرين الثاني: (4,0 ن)

في المستوى العقدي المنسوب إلى م م م م (O, \vec{u}, \vec{v}) ، نعتبر التطبيق f المعرف من \mathbb{C} نحو \mathbb{C}

$$f(z) = \frac{1}{6} \left((1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z} \right)$$

بما يلي : حل في \mathbb{C} المعادلة $f(z) = 0$. 1 0,50 ن

نضع $z_0 = 1$ و $z_{n+1} = f(z_n)$ لكل n من \mathbb{N} و نرمز بـ u_n لمعيار العدد العقدي z_n .

بين أن : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ; 1 0,50 ن

استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة و احسب نهايتها . 2 0,50 ن

لكل n من \mathbb{N} نضع : $S_n = \sum_{k=0}^n OM_k = OM_1 + OM_2 + \dots + OM_n$ و لكل k من \mathbb{N} نعتبر النقطة M_k صورة العدد العقدي z_k .

بين أن : $S_n \leq 3$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ; 1 0,50 ن

بين أن المتتالية $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة (حساب نهاية $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ غير مطلوب) . 2 0,50 ن

نضع $z = re^{i\theta}$ حيث $\theta \in]-\pi, \pi[$ و $r > 0$.

بين أن : $f(z) = \frac{2}{3} r \cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) e^{\frac{i\pi}{6}}$ 1 1,00 ن

بين أن النقط M_1 و M_2 و \dots و M_n مستقيمية بحيث $n \in \mathbb{N}^*$. 2 0,50 ن

التمرين الثالث: (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى م م م م (O, \vec{i}, \vec{j}) .

ليكن (Γ) المنحنى الذي معادلته $2y^2 - 4y - 7x = 0$.

بين أن (Γ) شلجم و حدد رأسه و بؤرتيه . 1 0,75 ن

أنشئ المنحنى (Γ) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) . 2 0,25 ن

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) التالية : $2(y-1)^2 = 7x+2$: (E)

ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E) . بين أن $y \equiv 0[7]$ أو $y \equiv 2[7]$. 1 1,00 ن

استنتج أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : 2 0,50 ن

$$S = \{ (14k^2 - 4k; 7k) ; k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ (14k^2 + 4k; 7k + 2) ; k \in \mathbb{Z} \}$$

حدد النقط $M(x, y)$ من المنحنى (Γ) بحيث : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ و $x \wedge y = 9$. 2 1,00 ن

التمرين الرابع : (3,0 ن)



$(\forall t \in \mathbb{R}) ; \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} = \frac{t}{(3+t^2)} - \frac{t}{(3+t^2)} + \frac{1}{(3+t^2)}$ بين أن **1** 0,25 ن

$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) ; \int_0^\alpha \frac{1}{(3+t^2)} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right)$ بين أن **2** 0,50 ن

$F(x) = \int_0^x \left(\frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \right) du$: تعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0, \pi]$ بما يلي : بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0, \pi]$. **3** 0,50 ن

باستعمال مكالمة بتغيير المتغير $t = \tan \left(\frac{u}{2} \right)$ بين أن : **ب** 0,50 ن

$(\forall x \in [0, \pi[) ; F(x) = 2 \int_0^{\tan \frac{\pi}{2}} \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$

نذكر أن : $\sin u = \frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ حيث $t = \tan \frac{u}{2}$ و $u \in [0; \pi[$ باستعمال السؤالين (1 و 2) بين أن : **ج** 0,75 ن

$(\forall x \in [0, \pi[) ; F(x) = \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{\tan \left(\frac{x}{2} \right)}{\sqrt{3}} \right) + \ln \left(\frac{1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{3 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)} \right)$ باستعمال اتصال الدالة F بين أن : **د** 0,50 ن

التمرين الخامس : (3,0 ن)



في هذا التمرين، n يرمز لعدد صحيح طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .
 نعتبر الدالة f_n المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$
 ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في M م م (O, \vec{i}, \vec{j}) . **1** 0,50 ن
 أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ **ب** 0,75 ن

حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_n) . **2** 0,75 ن
 أحسب $f'_n(x)$ لكل x من \mathbb{R} ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_n . **3** 0,50 ن

بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في \mathbb{R} . **ب** 0,25 ن

بين أن : $(\forall n \geq 2) ; f_n \left(\frac{1}{n} \right) < 0$ **ج** 0,75 ن

بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq x + 1$. ثم استنتج أن : $f_n(1) > 0$ **د** 0,50 ن

بين أن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$ **4** 0,50 ن

أنشئ المنحنى (C_2) . (نأخذ : $\alpha_2 \approx 0,6$) **5** 0,50 ن

بين أن : $(\forall n \geq 2) ; f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{n e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1} \left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \right)$ **ب** 0,50 ن

استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$ **ج** 0,75 ن

بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة . **6** 0,50 ن

باستعمال السؤال (3) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; \frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$ **ب** 0,50 ن

استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; \frac{\ln n}{n} < \alpha_n < \frac{2 \ln n}{n}$ **ج** 0,25 ن

حدد النهاية التالية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)$ 0,25 ن



التمرين الأول: (3,5 ن)



- تكن $E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ لكل زوج (a, b) من E^2 نضع: $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$. I
- تحقق أن لكل زوج (a, b) من E^2 لدينا: $a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1)$. 1 0,25
- استنتج أن \perp قانون تركيب داخلي في E . B 0,25
- بين أن زمرة تبادلية (E, \perp) . 2 0,50
- نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة وحدثها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .
- نعتبر المجموعة التالية: $F = \left\{ M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - a & a \\ a & \sqrt{2} - a \end{pmatrix} ; a \in E \right\}$ II
- نضع: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. تحقق أن: $A^2 = -2A$ و أن $M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$ 1 0,50
- بين أن جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ F B 0,50
- نعتبر التطبيق φ المعرفة بما يلي: $\varphi : (E, \perp) \rightarrow (F, \times)$ A 0,50
- $a \rightarrow \varphi(a) = M(a)$ B 0,50
- بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي . A 0,50
- استنتج البنية الجبرية للمجموعة (F, \times) . B 0,50

التمرين الثاني: (3,5 ن)



- ليكن a عددا عقديا مخالفا للعدد i و $-i$. و نعتبر في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية:
- التالية: $(E) : z^2 - (1 + a)(1 + i)z + (1 + a^2)i = 0$ 1 0,25
- تحقق أن العدد العقدي $u = a + i$ حل للمعادلة (E) . B 0,25
- حدد الحل الثاني للمعادلة (E) . A 0,25
- نفترض أن: $|a| = 1$. بين أن $\left(\frac{u}{v}\right)$ عدد حقيقي . B 0,25
- تحقق أن: $u^2 = a((a - \bar{a}) + 2i)$ C 0,50
- استنتج أن: $arg(u) \equiv \left(\frac{1}{2} arg(a) + \frac{\pi}{4}\right) [\pi]$ 3 0,50
- بين أن: $|u| + |v| \geq 2$.
- المستوى العقدي منسوب إلى M م م م م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
- ليكن m عددا حقيقيا أكبر قطعا من 2 .
- و لتكن (E_m) مجموعة النقط $M(a)$ من المستوى العقدي بحيث: $|u| + |v| = m$ 1 0,50
- بين أن (E_m) إهليلج مركزه هو أصل المعلم O .
- نضع: $a = x + iy$ حيث x و y عدنان حقيقيان .
- بين أن: $x^2 + \left(1 - \frac{4}{m^2}\right)y^2 = \frac{m^2}{4} - 1$ معادلة ديكارتية للإهليلج (E_m) 2 0,25
- أنشئ الإهليلج (E_4) . B 0,25
- نعتبر النقطتين $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$ رأسي الإهليلج (E_4) . بين أن (AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ 3 0,50

التمرين الثالث: (3,5 ن)



- نعتبر في \mathbb{Z} المعادلة (E) التالية: $195x - 232y = 1$
- حدد $232 \wedge 195$. A 0,50
- بين أن حلول المعادلة (E) هي: $S = \{(163 + 232k ; 137 + 195k) ; k \in \mathbb{Z}\}$ B 0,50

أوجد العدد الصحيح d الوحيد الذي يحقق : $0 \leq d \leq 232$ و $195d \equiv 1 [232]$	ج			0,25 ن
بين أن العدد 233 عدد أولي .		2		0,25 ن
لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232 .				
نعتبر التطبيق f المعرف من A نحو A بما يلي : مهما يكن a من A فإن $f(a)$				
هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{195} على 233 .				
نقبل أن : $\forall a \in A \setminus \{0\} ; a^{232} \equiv 1 [233]$				
بين أن لكل عنصرين a و b من المجموعة A ، إذا كان $f(a) = f(b)$ فإن $a = b$.	أ	3		0,50 ن
ليكن a و b عنصرين من المجموعة A بحيث $f(a) = b$. حدد a بدلالة b .	ب			0,50 ن
استنتج أن التطبيق f تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} .	ج			0,50 ن

التمرين الرابع : (3,5 ن)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $g(x) = 1 + (x - 1)e^x$

بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \geq 0$		1	I	0,50 ن
بين أن $x = 0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$.		2		0,25 ن
لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :				
$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} ; \forall x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$				
و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$.				
أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x)$		1	II	0,50 ن
بين أن الدالة f متصلة في الصفر .		2		0,25 ن
أحسب $f'(x)$ من أجل كل عنصر x من \mathbb{R}^* .	أ	3		0,50 ن
استنتج تغيرات الدالة f .	ب			0,25 ن
نعتبر التكامل التالي : $J(x) = \int_0^x t e^{-t} dt$ حيث x عدد حقيقي .				
باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $J(x) = e^{-x}(e^x - 1 - x)$	أ	4		0,50 ن
بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{x^2}{2} e^{-\frac{(x+ x)}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{(x- x)}{2}}$	ب			1,00 ن
بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \frac{1}{2} e^{\frac{(x- x)}{2}} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^{\frac{(x+ x)}{2}}$	ج			0,50 ن
استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر و أن : $f'(0) = \frac{-1}{2}$.	د			0,75 ن
بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f''(x) = \left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right)(e^x(x - 1) + 2 + x)$	أ	5		0,50 ن
أدرس إشارة $e^x(x - 2) + 2 + x$ لكل x من \mathbb{R} .	ب			0,50 ن
استنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f''(x) > 0$	ج			0,25 ن
أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j})$.	د			0,50 ن
نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :				
$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$				
بين أن $\ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$.		1	III	0,50 ن
بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) \leq \frac{1}{2}$	أ	2		0,25 ن
بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - \ln 2 \leq \frac{1}{2} u_n - \ln 2 $	ب			0,50 ن
استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها .	ج			0,50 ن
لتكن F الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :				
$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{t}{e^t - 1}\right) dt ; \forall x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$				
بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$	أ	1	IV	0,50 ن
بين أن الدالة F متصلة في الصفر .	ب			0,25 ن
بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق في الصفر و أن : $F'(0) = 1$.	ج			0,50 ن
بين أن F قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* و أن لكل x من \mathbb{R}^* لدينا : $F'(x) = \left(\frac{3 - e^x}{e^x + 1}\right) f(x)$	أ	2		0,50 ن
أدرس تغيرات الدالة F .	ب			0,25 ن



التمرين الأول: (3,5 ن)

- نعتبر في \mathbb{Z} النظمة (S) التالية : $\begin{cases} x \equiv a [p] \\ x \equiv b [q] \end{cases}$ بحيث $\begin{cases} a, b, p, q \in \mathbb{Z} \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$
- بين أنه يوجد زوج (u_0, v_0) من \mathbb{Z}^2 بحيث : $pu_0 + qv_0 = 1$ 0,50 ن
- بين أن $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للنظمة (S) . 0,50 ن
- ليكن x حلا للنظمة (S) ، بين أن العدد pq يقسم العدد $(x - x_0)$. 0,50 ن
- ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث pq يقسم العدد $(x - x_0)$. بين أن x حل للنظمة (S) . 0,50 ن
- استنتج مجموعة حلول النظمة (S) . 0,50 ن
- حل في \mathbb{Z} النظمة التالية : $\begin{cases} x \equiv 1 [8] \\ x \equiv 3 [13] \end{cases}$ 0,50 ن

التمرين الثاني: (3,5 ن)

- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر أو يساوي 3 . نتوفر على n صندوقا مرقما من 1 إلى n . الصندوق رقم k يحتوي على k كرة بيضاء و $(n - k)$ كرة سوداء . $(1 \leq k \leq n)$.
نختار بطريقة عشوائية صندوقا واحدا من بين الصناديق ثم نسحب منه عشوائيا كرة واحدة .
أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء . 0,50 ن
- أحسب احتمال أن يتم السحب من صندوق رقمه عدد فردي . 0,75 ن
- أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء علما أن السحب تم من صندوق رقمه فردي . 0,75 ن

التمرين الثالث: (3,5 ن)

- المستوى العقدي (P) منسوب إلى m, m, m, m (O, \vec{u}, \vec{v}) .
نعتبر المجموعة : $(H) = \{ M(z) \in P ; z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1 \}$.
بين أن (H) هذلول و حدد مركزه و رأسيه و مقاربيه في المعلم (O, \vec{u}, \vec{v}) . 0,50 ن
- أنشئ الهذلول (H) . 0,25 ن
- $M(a)$ و $M(b)$ نقطتان من (H) . نضع : $\varphi(a, b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}$.
بين أن : $M(\varphi(a, b)) \in (H)$ 0,50 ن
- تحقق أن $\varphi(a, 1) = 1$ و أن $\varphi(a, \bar{a}) = 1$.
نزود (H) بقانون التركيب الداخلي * المعرف بما يلي :
 $\forall M(a), M(b) \in H ; M(a) * M(b) = M(\varphi(a, b))$ 0,50 ن
- بين أن $(H, *)$ زمرة تبادلية . 1,00 ن

التمرين الرابع: (3,5 ن)

- $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 .
نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .
نعتبر المجموعة التالية : $F = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
نزود F بجمع المصفوفات + و ضرب مصفوفة في عدد حقيقي . و ضرب المصفوفات \times .
نضع : $O = M(0,0)$ و $I = M(1,0)$ و $J = M(0,1)$.

بين أن $(F, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .	أ	1		0,50 ن
بين أن (I, J) أساس للفضاء المتجهي $(F, +, \cdot)$ و اعط بعده .	ب			0,50 ن
ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى \mathbb{R} .				
بين أن الأسرة $(1, \alpha)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.		2		0,50 ن
نعتبر التطبيق ψ من \mathbb{C} نحو F المعرفة بما يلي : $\psi(z) = M(m, n)$.				
بحيث : $z = m + an$ و $m \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{R}$ و $z \in \mathbb{C}$.				
تحقق أن : $J^2 = -2(I + J)$ و أن : $\psi(\alpha) = J$.	أ	3		0,50 ن
حدد قيمتي α اللتان من أجلهما يكون التطبيق ψ تشاكلا تقابليا من (\mathbb{C}, \times) نحو (F, \times) .	ب			0,50 ن
نأخذ $\alpha = -1 + i$. أكتب في الأساس (I, J) المصفوفة J^{2007} .		4		0,50 ن

التمرين الخامس : (3,5 ن)



لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $g(x) = 1 + x - e^{-x}$.				
أدرس تغيرات الدالة g على \mathbb{R} .	أ	1	I	0,50 ن
أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة g .	ب			0,50 ن
استنتج أن $x_0 = 0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$.	ج			0,50 ن
لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^* بما يلي : $f(x) = \frac{1}{1+x-e^{-x}}$				
و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في $M(3, M)$ (O, \vec{i}, \vec{j}) .				
أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.	أ	2		0,50 ن
أحسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R}^* .	ب			0,25 ن
ضع جدول تغيرات الدالة f .	ج			0,50 ن
أنشئ المنحنى (C) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .	د			0,50 ن
ليكن n من \mathbb{N}^* ، بين أن المعادلة $f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا x_n في المجال $]0, +\infty[$.	أ	3		0,50 ن
بين أن المتتالية $(x_n)_{n \geq 1}$ تناقصية و أنها متقاربة .	ب			0,50 ن
بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.	ج			0,50 ن
بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تكافئ المعادلة $e^{-x} = x$.	أ	1	II	0,25 ن
بين أن المعادلة $e^{-x} = x$ تقبل حلا وحيدا α بحيث : $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.	ب			0,50 ن
نعتبر المتتالية $(y_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} y_{n+1} = e^{-y_n} ; \forall n \in \mathbb{N}^* \\ y_1 = 1 \end{cases}$				
بين أن : $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.	أ	2		0,50 ن
بين أن : $ y_{n+1} - \alpha < e^{-\frac{1}{e}} y_n - \alpha $; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.	ب			0,50 ن
استنتج أن $(y_n)_{n \geq 1}$ متقاربة ثم حدد نهايتها .	ج			0,50 ن
لتكن F الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي : $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt ; \forall x > 0 \\ F(0) = \frac{\ln 2}{2} \end{cases}$				
بين أن : $\frac{1}{1+t} < f(t) < \frac{1}{t}$; $(\forall t > 0)$.	أ	1	III	0,25 ن
استنتج النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.	ب			0,50 ن
بين أن : $1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$; $(\forall t \geq 0)$.	أ	2		0,50 ن
بين أن : $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right)$; $\forall t \in]0, 4[$.	ب			0,50 ن
استنتج أن F متصلة على اليمين في الصفر .	ج			0,25 ن
بين أن F قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* و أحسب $F'(x)$ من أجل $x > 0$.	أ	3		0,50 ن
أدرس تغيرات الدالة F على \mathbb{R}_+ .	ب			0,25 ن



التمرين الأول: (3,5 ن)

- نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة و احادية .
- و نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي . و $(\mathbb{R}, +, \times)$ جسم تبادلي .
- $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ و $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. 0,75 ن
- بين أن الأسرة (I, J) أساس للفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$. 0,50 ن
- نعتبر التطبيق : $f : \mathbb{C}^* \rightarrow E^*$ حيث : $E^* = E \setminus \{M(0,0)\}$ $a + ib \rightarrow M(a, b)$
- بين أن جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$. 0,25 ن
- بين أن f تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E^*, \times) . 0,50 ن
- بين أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي . 0,50 ن
- حل في E المعادلة $J \times X^3 = I$. (حيث : $X^3 = X \times X \times X$) . 0,75 ن

التمرين الثاني: (3,5 ن)

- ليكن a عددا عقديا غير منعدم و \bar{a} مرافق العدد a .
- نعتبر في \mathbb{C} المعادلة $(G) : iz^2 + (a + \bar{a} - i)z - \bar{a} - ia\bar{a} = 0$.
- تحقق أن مميز المعادلة (G) هو : $\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$. 0,50 ن
- حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة (G) . 0,50 ن
- بين أن a حل المعادلة (G) إذا و فقط إذا كان $Re(a) = Im(a)$. 0,50 ن
- المستوى العقدي منسوب إلى M م م م (O, \vec{u}, \vec{v}) . نفترض أن : $Re(a) \neq Im(a)$.
- نعتبر النقط A و B و C التي أحاقها على التوالي هي a و $i\bar{a}$ و $(1 + ia)$.
- نضع : $z = \frac{(1+ia)-a}{i\bar{a}-a}$. تحقق أن : $\bar{z} = \frac{(i-1)\bar{a}-i}{i\bar{a}-a}$. 0,50 ن
- بين أن النقط A و B و C مستقيمية إذا و فقط إذا كان $Im(a) = \frac{1}{2}$. 0,50 ن
- نفترض في هذا السؤال أن : $Im(a) \neq \frac{1}{2}$. و نعتبر الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و R_2 الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$. نضع : $R_1(B) = B'$.
- و $R_2(C) = C'$. لتكن E منتصف القطعة $[BC]$.
- حدد b' و c' لحقي النقطتين B' و C' على التوالي . 0,50 ن
- بين أن المستقيمين (AE) و $(B'C')$ متعامدان . و بين أن : $B'C' = 2AE$. 0,75 ن

التمرين الثالث: (3,5 ن)

- نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة التالية : $(E) : 35u - 96v = 1$.
- تحقق أن الزوج $(11, 4)$ حل خاص للمعادلة (E) . 0,25 ن
- استنتج مجموعة حلول المعادلة (E) . 0,50 ن
- نعتبر في المجموعة \mathbb{Z} المعادلة التالية : $(F) : x^{35} \equiv 2 [97]$.
- ليكن x حلا للمعادلة (F) . بين أن العدد 97 أولي و أن x و 97 أوليان فيما بينهما . 0,50 ن
- بين أن : $x^{96} \equiv 1 [97]$. 0,50 ن

0,50 ن
0,25 ن
0,50 ن

بين أن : [97] $x \equiv 2^{11}$.
بين أنه إذا كان العدد الصحيح الطبيعي x يحقق [97] $x \equiv 2^{11}$ فإن x حل للمعادلة (F) .
بين أن مجموعة حلول المعادلة (F) هي مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تُكتب على الشكل $(11 + 97k)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين الرابع : (3,5 ن)



لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي : $f(x) = 2x - e^{-x^2}$
و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$.

أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$ ثم أول النتيجة المحصل عليها هندسيا .

أحسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R}^+ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R}^+ وأن $0 < \alpha < 1$.

أدرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0,1]$.

أنشئ المنحنى (C) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) . (نأخذ : $\alpha \approx 0,4$)

نعتبر الدالتين العدديتين φ و g المعرفتين على \mathbb{R}^+ بما يلي :

$$g(x) = x^2 - \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{و} \quad \begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt ; x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

بين أن : $\frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-c^2}$; $(\exists c \in]0, x[)$, $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+)$

استنتج أن : $\int_0^1 e^{-t^2} dt < 1$

بين أن : $g(\alpha) = \int_0^\alpha f(t) dt$

بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^+ وأن : $g'(x) = f(x)$; $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$

بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $] \alpha, 1[$.

بين أن الدالة φ متصلة على اليمين في الصفر .

باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $\varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$; $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+)$

بين أن φ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_*^+ وأن : $\varphi'(x) = \frac{-2}{x^2} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$; $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+)$

بين أن : $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$

بين أنه لكل عدد حقيقي x من \mathbb{R}^+ لدينا : $\int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \frac{x^3}{3}$

بين أن : $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3}$; $(\forall x \in]0,1[)$

بين أن : $\varphi(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$; $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+)$

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \varphi(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

بين أن : $0 \leq u_n \leq 1$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

بين أن : $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة و حدد نهايتها .

0,50 ن

0,50 ن

0,50 ن

0,50 ن

0,50 ن

0,50 ن

0,50 ن

0,50 ن

0,50 ن

0,50 ن

0,50 ن

0,50 ن

0,75 ن

0,50 ن

0,50 ن

0,50 ن

0,50 ن

0,50 ن

0,25 ن

0,50 ن

0,50 ن

0,50 ن



مادة الرياضيات
شعبة العلوم الرياضية أ وب
المعلم: 9
مدة الانجاز: أربع ساعات



التمرين الأول: (3,5 ن)



- المستوى العقدي منسوب إلى (O, \vec{u}, \vec{v}) .
 نعتبر التطبيق r الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M_1(z_1)$ حيث: $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$
 و التطبيق h الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M_2(z_2)$ حيث: $z_2 = -2z + 3i$
 و نعتبر التطبيق F المعروف بما يلي: $F = h \circ r$.
 حدد طبيعة كل من التطبيقين r و h و عناصرهما المميزة .
 نعتبر النقطتين $\Omega(i)$ و $A(a)$ حيث a عدد عقدي معلوم مخالف للعدد العقدي i .
 و نضع: $F(A) = B$ و $F(B) = C$ و $F(C) = D$.
 بين أنه إذا كانت $M'(z')$ هي صورة $M(z)$ بالتطبيق F فإن: $z' - i = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}(z - i)$
 تحقق أن Ω هي النقطة الوحيدة التي تحقق: $F(\Omega) = \Omega$.
 حدد بدلالة العدد العقدي a الأعداد العقدية b و c و d ألقاق النقط B و C و D على التوالي .
 بين أن النقط Ω و A و D مستقيمية .
 بين أن Ω هو مرجح النظمة المترنة $\{(B, 4); (C, 2); (D, 1)\}$.
 حدد مجموعة النقط $A(a)$ لكي تكون النقطة D تنتمي إلى المحور الحقيقي .

1,00 ن

0,50 ن

0,25 ن

0,75 ن

0,25 ن

0,50 ن

0,25 ن

التمرين الثاني: (3,5 ن)



- نزود \mathbb{R} بالقانون الداخلي $*$ المعروف بما يلي: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; x * y = x + y - 3xy$
 تحقق أن: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; (1 - 3x)(1 - 3y) = 1 - 3(x * y)$
 بين أن: $(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}; *)$ زمرة تبادلية .
 بين أن التطبيق φ الذي يربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي $\varphi(x) = 1 - 3x$ تشاكل
 تقابلي من $(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}; *)$ نحو (\mathbb{R}^*, \times) .
 بين أن: $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*) =]-\infty; \frac{1}{3}[$
 بين أن $(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}; *)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}; *)$.
 لكل x من المجموعة $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ و لكل n من \mathbb{N} نضع: $\begin{cases} x^{(n+1)} = x^{(n)} * x \\ x^{(0)} = 0 \end{cases}$
 بين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}; (\forall n \in \mathbb{N}); \varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n$
 استنتج $x^{(n)}$ بدلالة x و n .
 نزود \mathbb{R} بالقانون الداخلي \top المعروف بما يلي: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; x \top y = x + y - \frac{1}{3}$
 بين أن (\mathbb{R}, \top) زمرة تبادلية .
 بين أن $(\mathbb{R}, \top, *)$ جسم تبادلي .

0,25 ن

0,75 ن

0,50 ن

0,25 ن

0,50 ن

0,25 ن

0,50 ن

0,50 ن

0,50 ن

التمرين الثالث: (3,5 ن)



- يحتوي صندوق على أربع كرات: كرة بيضاء و ثلاث كرات حمراء غير قابلة للتمييز باللمس
 نسحب عشوائيا كرة من الصندوق و نسجل لونها ثم نعيدها إلى الصندوق .
 نجري نفس التجربة العشوائية لمرات متتالية إلى أن نحصل لأول مرة على كرتين
 متتابعين من نفس اللون و نوقف التجربة . ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي رتبة
 السحبة التي توقفت عندها التجربة .

1,00 ن 1 أحسب احتمال كل حدث من الحدثين التاليين : $[X = 2]$ و $[X = 3]$.

0,75 ن 2 أ بين أن احتمال الحدث $[X = 2k]$ هو : $p_{2k} = \frac{5}{8} \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$. ليكن k عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

0,75 ن ب بين أن احتمال الحدث $[X = 2k + 1]$ هو : $p_{2k+1} = \left(\frac{3}{16}\right)^k$.

التمرين الرابع : (3,5 ن)

$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x} ; \forall x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{array} \right.$ نعتبر الدالة f المعرفة على $I = \left] \frac{-1}{2}; +\infty \right[$: ب

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في $M \times M (O, \vec{i}, \vec{j})$. بين أن الدالة f متصلة في الصفر . 0,50 ن 1 أ

لكل عدد حقيقي غير منعدم a من المجال I نعتبر الدالة h_a للمتغير الحقيقي x المعرفة على

المجال I بما يلي : $h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)a^2$. $h_a(0)$ و $h_a(a)$ أحسب 0,50 ن 2 أ

ثم استنتج أنه يوجد عدد حقيقي b محصور بين 0 و a بحيث : $\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$.

استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر . و أن : $f'(0) = -2$. 0,75 ن ب

بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $I \setminus \{0\}$. 0,50 ن 3 أ

و : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$; $\forall x \in I \setminus \{0\}$ حيث : $g(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$

بين أن : $g(x) < 0$; $\forall x \in I \setminus \{0\}$ 0,50 ن ب

استنتج تغيرات الدالة f على المجال I . 0,25 ن ج

أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^+} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا 0,50 ن 4 أ

بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1; 2]$ بحيث : $f(\alpha) = 1$. 0,50 ن ب

أنشئ المنحنى (C) . (نأخذ : $\alpha \approx 1,3$) 0,50 ن ج

نضع : $J = [1, \alpha]$ و $\varphi(x) = \ln(1+2x)$; $(\forall x \in I)$.

بين أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على المجال I . و أن : $0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$; $(\forall x \geq 1)$ 0,50 ن 1 أ

تحقق أن : $\varphi(\alpha) = \alpha$ و أن : $\varphi(J) \subset J$. 0,75 ن ب

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = \ln(1+2u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{array} \right.$

بين أن : $u_n \in J$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ 0,50 ن 2 أ

بين أن : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ 0,50 ن ب

استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها . 0,50 ن ج

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال I بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال I . ثم احسب $F'(x)$ لكل x من I . 0,50 ن 1 أ

استنتج منحنى تغيرات الدالة F على المجال I . 0,25 ن ب

بين أن : $F(x) > \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{1+2t}\right) dt$; $(\forall x \geq 1)$ 0,50 ن 2 أ

استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ 0,50 ن ب

نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية l على اليمين في $\frac{-1}{2}$.

و نعتبر الدالة \tilde{F} المعرفة على المجال $\left] \frac{-1}{2}; +\infty \right[$ بما يلي : $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{F}(x) = F(x) ; \forall x \in I \\ \tilde{F}\left(\frac{-1}{2}\right) = l \end{array} \right.$

باستعمال مبرهنة التزايد المنتهية، بين أن : $F(x) - l > \left(x + \frac{1}{2}\right) f(x)$; $(\forall x \in I)$ 0,50 ن 3 أ

استنتج أن الدالة \tilde{F} غير قابلة للاشتقاق على اليمين في $\frac{-1}{2}$. 0,50 ن ب



التمرين الأول: (3,0 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها هي المصفوفة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

نضع: $F = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}; (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \right\}$

بين أن جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ 1,00 ن

بين أن (F, \times) زمرة غير تبادلية. 0,25 ن

نعتبر المجموعة التالية: $G = \{ M(x, 0) \in F; x \in \mathbb{R}^* \}$

بين أن G زمرة جزئية للزمرة (F, \times) . 0,50 ن

نزود المجموعة $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي \perp المعرف بما يلي:

$$(\forall (x, y) \in E), (\forall (a, b) \in E) : (x, y) \perp (a, b) = \left(ax, bx + \frac{y}{a} \right)$$

و نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي:

$$M(x, y) \rightarrow \varphi(M(x, y)) = (x, y)$$

أحسب: $(2, 3) \perp (1, 1)$ و $(1, 1) \perp (2, 3)$ 0,25 ن

بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من (F, \times) نحو (E, \perp) . 0,50 ن

استنتج البنية الجبرية للمجموعة (E, \perp) . 0,50 ن

التمرين الثاني: (4,0 ن)

ليكن m عددا عقديا مخالفا للعدد 1. و نعتبر في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية: I

$$(E) : z^2 - (1 - i)(m + 1)z - i(m^2 + 1) = 0$$

تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $\Delta = ((1 + i)(m - 1))^2$ 1,00 ن

حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة (E) . 0,25 ن

حدد على الشكل الجبري قيمتي m لكي يكون جداء حلي المعادلة (E) يساوي 1 0,50 ن

نضع: $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$.

أكتب z_1 و z_2 على الشكل المتلثي في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 1,00 ن

المستوى العقدي (\mathcal{P}) منسوب إلى M م م م م $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

نعتبر النقط $M(m)$ و $M_1(1 - im)$ و $M_2(m - i)$.

حدد مجموعة النقط M التي من أجلها تكون النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية. 1,00 ن

بين أن التحويل R الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة M' التي لحقها $z' = 1 - iz$ ، 0,50 ن

هو دوران ينبغي تحديد لحق مركزه Ω و قياسا لزاويته.

بين التكافؤ التالي: $\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \right) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(m) + \text{Im}(m) = 1$ 0,50 ن

استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة. 0,50 ن

التمرين الثالث: (3,0 ن)

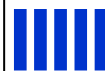
نضع: $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

تحقق أن a_n عدد زوجي مهما يكن n من \mathbb{N}^* . 1,00 ن

حدد قيم n التي من أجلها يكون $a_n \equiv 0 [3]$. 0,75 ن

- ليكن p عددا أوليا موجبا و أكبر قطعا من العدد 3 .
 بين أن : $2^{p-1} \equiv 1 [p]$ و $3^{p-1} \equiv 1 [p]$ و $6^{p-1} \equiv 1 [p]$. أ 2 0,75 ن
 بين أن العدد p يقسم العدد a_{p-2} . ب 0,75 ن
 بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q ، يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n بحيث : ج 0,50 ن
 $a_n \wedge q = q$. $a_n \wedge q$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و q

التمرين الرابع : (10 ن)



- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم ، و نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0; +\infty[$ بما يلي : $f_n(0) = 0$ و $f_n(x) = x(1 - \ln x)^n$; $(\forall x > 0)$;
 ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$.
 بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في الصفر . أ 1 0,50 ن
 أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في الصفر . ب 0,25 ن
 أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$. ج 1,00 ن
 أدرس تغيرات الدالة f_1 . أ 2 0,50 ن
 أدرس تغيرات الدالة f_2 . ب 0,50 ن
 أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) . أ 3 0,25 ن
 أنشئ المنحنيين (C_1) و (C_2) . نأخذ : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$. ب 0,50 ن
 (و نقل أن $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_2))
 نعتبر الدالة F المعرفة على $]-\infty; 0]$ بما يلي : $F(x) = \int_{e^x}^1 \left(\frac{f_1(t)}{1+t^2} \right) dt$
 بين أن F قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 0]$. و أن : $F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$; $(\forall x < 0)$ أ 1 0,50 ن
 استنتج منحنى تغيرات الدالة F على المجال $]-\infty; 0]$. ب 0,25 ن
 بين أن : $\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$; $(\forall x < 0)$ أ 2 0,25 ن
 تحقق أن الدالة $x \rightarrow x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $]0, +\infty[$. ب 0,25 ن
 بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \frac{3}{4}$ ج 0,25 ن
 نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية l عندما يؤول x إلى $-\infty$. بين أن : $\frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}$.
 لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \int_1^e f_n(x) dx$
 بين أن : $u_n \geq 0$; $(\forall n \geq 1)$. أ 1 0,50 ن
 حدد إشارة الفرق $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1, e]$. ب 0,50 ن
 بين أن : $u_{n+1} \leq u_n$; $(\forall n \geq 1)$. ج 0,25 ن
 استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة . د 0,25 ن
 بين أن : $u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \left(\frac{n+1}{2} \right) u_n$; $(\forall n \geq 1)$. أ 2 0,50 ن
 استنتج ب cm^2 مساحة الحيز من المستوى المحصور بين (C_1) و (C_2) والمستقيمين ذوا المعادلتين التاليتين : $x = e$ و $x = 1$.
 بين أن : $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$; $(\forall n \geq 2)$ أ 3 0,75 ن
 حدد النهايتين التاليتين : $\lim_{n \rightarrow \infty} (n u_n)$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$ ب 0,50 ن
 ليكن a عددا حقيقيا مخالفا للعدد u_1 . و نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي :
 $v_1 = a$ و $v_{n+1} = \frac{-1}{2} + \left(\frac{n+1}{2} \right) v_n$; $\forall n \geq 1$
 و من أجل كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $d_n = |v_n - u_n|$.
 بين أن : $d_n = \left(\frac{n!}{2^{(n-1)}} \right) d_1$; $(\forall n \geq 1)$ ج 4 0,25 ن
 بين أن : $\frac{n!}{2} \geq 3^{(n-2)}$; $(\forall n \geq 2)$ د 0,50 ن
 و استنتج أن $(v_n)_{n \geq 1}$ متباعدة



التمرين الأول: (3,0 ن)

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ حلقة واحدة وحدثها $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ و $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

نضع : $V = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

بين أن V فضاء متجهي جزئي من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ و حدد أساسا له. 1 0,75

بين أن V جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ أ 2 0,25

بين أن $(V, +, \times)$ حلقة واحدة و تبادلية . ب 0,50

أحسب : $M\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}\right) \times M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ أ 3 0,25

هل الحلقة $(V, +, \times)$ جسم ؟ ب 0,25

لتكن X مصفوفة من المجموعة V حيث $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ مع $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

بين أن : $X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I = O$ حيث $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ أ 4 0,50

نفترض أن $a^2 - 4b^2 \neq 0$. بين أن المصفوفة X تقبل مقلوبا في V ينبغي تحديده . ب 0,50

التمرين الثاني: (4,0 ن)

ليكن u عددا عقديا مخالفا لـ $(1 - i)$. أنشر ثم بسط التعبير التالي : $(iu - 1 - i)^2$ أ 1 0,25

حل في \mathbb{C} المعادلة ذات الجهول z التالية : $z^2 - 2(u + 1 - i)z + 2u^2 - 4i = 0$ ب 0,75

المستوى العقدي منسوب إلى M م م م (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نعتبر النقط : $A((1 + i)u - 2i)$ و $B((1 - i)u + 2)$ و $U(u)$ و $\Omega(2 - 2i)$

حدد لحق I منتصف $[AB]$ ، ثم حدد متجهة الإزاحة t التي تحول النقطة U إلى النقطة I . أ 2 0,25

ليكن R الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{-\pi}{2}$. بين أن : $R(A) = B$ ب 0,50

استنتج أن المستقيمان (AB) و (ΩI) متعامدان . ج 0,50

اقترح طريقة لإنشاء النقطتين A و B انطلاقا من النقطة U . د 0,75

نضع : $u = a(1 + i) - 2i$. حدد لحقي المتجهتين \vec{AB} و \vec{AU} بدلالة العدد الحقيقي a أ 3 0,50

استنتج أن النقط A و B و U نقط مستقيمية . ب 0,50

التمرين الثالث: (3,0 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و أكبر من أو يساوي 4 . و U_1 و U_2 و U_3 ثلاثة صناديق .

الصندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء و $(n - 1)$ كرة سوداء .

الصندوق U_2 يحتوي على كرة حمراء و $(n - 2)$ كرة سوداء .

الصندوق U_3 يحتوي على كرة حمراء و $(n - 3)$ كرة سوداء .

نختار عشوائيا صندوقا واحدا ثم نسحب منه عشوائيا و تانيا كرتين .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

حدد قيم المتغير العشوائي X . 1 0,50

بين أن احتمال الحدث $[X = 2]$ يساوي $\frac{8}{3n(n-1)}$ أ 2 0,50

بين أن احتمال الحدث $[X = 1]$ يساوي $\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$ ب 0,50

استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X . ج 0,75

علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين ، ما هو احتمال أن يكون السحب قد تم من U_3 ؟ 3 0,75

التمرين الرابع: (10 ن)



نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$ **I**

أدرس تغيرات الدالة g . ثم ضع جدول تغيراتها . **1** **I** 1,00 ن

بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]\ln 4; \ln 6[$. **2** **J** 0,50 ن

أدرس إشارة $g(x)$ على \mathbb{R}^+ . **ب** 0,50 ن

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n}) \\ u_0 = 1 \end{cases}$ **3** **أ** 0,50 ن

بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq \alpha$ **ب** 0,25 ن

بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ **ج** 0,25 ن

بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية قطعا . **د** 0,50 ن

بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها . **1** **II** 1,00 ن

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R}_+^* بما يلي : $f(x) = \frac{1-e^x}{x^2}$ **2** **أ** 0,50 ن

وليكن (\mathcal{C}) المنحنى الممثل للدالة f في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$. **1** **II** 1,00 ن

أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **2** **أ** 0,50 ن

تحقق أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$ **ب** 0,75 ن

بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; f'(x) = \frac{e^x g(x)}{x^3}$. ثم ضع جدول تغيرات الدالة f . **3** 0,50 ن

أنشئ المنحنى (\mathcal{C}) . (نأخذ : $\alpha \approx 1,5$) **1** **III** 0,50 ن

نعتبر الدالة العددية F المعرفة بما يلي : $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{1-e^t}{t^2} \right) dt ; \forall x > 0 \\ F(0) = -\ln 2 \end{cases}$ **ب** 0,50 ن

بين أن : $(\forall x > 0) ; F(x) = \left(\frac{e^{2x}-1}{2x} \right) - \left(\frac{e^x-1}{x} \right) - \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t} \right) dt$ **ج** 0,50 ن

بين أن : $\forall x \in]0; +\infty[; e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t} \right) dt \leq e^{2x} \ln 2$ **أ** 0,50 ن

أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t} \right) dt$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على يمين الصفر . **2** 0,50 ن

بين أن : $\forall x \in]0; +\infty[; F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$ **ب** 0,50 ن

أحسب النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ **3** 0,75 ن

بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$. و أن : $(\forall x > 0) ; F'(x) = \frac{-1}{2} \left(\frac{e^x-1}{x} \right)^2$ **أ** 0,25 ن

ليكن $x > 0$ ، بين أنه يوجد c من $]0, x[$ بحيث : $F(x) - F(0) = \frac{-1}{2} x e^{2c}$ **ب** 0,25 ن

بين أن : $\forall x \in]0; +\infty[; \frac{-1}{2} e^{2x} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq \frac{-1}{2}$ **ج** 0,25 ن

استنتج أن F قابلة للاشتقاق على يمين الصفر . و أن : $F'_d(0) = \frac{-1}{2}$ **ج** 0,25 ن



التمرين الأول: (3,5 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان .

نزود المجموعة $I =]0; +\infty[$ بقانون التركيب الداخلي * المعرفة بما يلي :

$$\forall (a, b) \in I^2 ; a * b = e^{\ln(a) \cdot \ln(b)}$$

بين أن القانون * تبادلي و تجميعي في المجموعة I .

بين أن القانون * يقبل عنصرا محايدا e في I ينبغي تحديده .

بين أن $(I \setminus \{1\}; *)$ زمرة تبادلية .

بين أن $]1; +\infty[$ زمرة جزئية للزمرة $(I \setminus \{1\}; *)$.

بين أن القانون * توزيعي بالنسبة للقانون \times .

بين أن $(I, \times, *)$ جسم تبادلي .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

نعتبر المصفوفة التالية :

أحسب : A^3 و A^2 .

استنتج أن المصفوفة A لا تقبل مقلوبا .

التمرين الثاني: (3,5 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى m, m, m, m (O, \vec{u}, \vec{v}) .

حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $(3 + 4i)$.

حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة : $4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$: (E) .

ليكن a و b حلي المعادلة (E) حيث : $\text{Re}(a) < 0$. و نعتبر النقطتين $A(a)$ و $B(b)$.

تحقق أن : $\frac{b}{a} = 1 - i$.

استنتج أن المثلث AOB متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة A .

لتكن C نقطة لحقها c و تخالف النقطة A . و لتكن D صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه C

و زاويته $\frac{\pi}{2}$. و لتكن L صورة النقطة D بالإزاحة التي متجهتها \vec{AO} .

حدد العدد العقدي c بدلالة العدد العقدي d . حيث d هو لحق النقطة D .

حدد بدلالة c العدد العقدي l . حيث l هو لحق النقطة L .

حدد الكتابة الجبرية للعدد العقدي $\left(\frac{l-c}{a-c}\right)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACL .

التمرين الثالث: (3,0 ن)

حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية m بحيث : $m^2 + 1 \equiv 0 [5]$.

ليكن p عددا أوليا بحيث : $p = 3 + 4k$ من k عدد صحيح طبيعي .

و ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $n^2 + 1 \equiv 0 [p]$.

تحقق أن : $(n^2)^{2k+1} \equiv -1 [p]$.

بين أن العددين n و p أوليان فيما بينهما .

استنتج أن : $(n^2)^{2k+1} \equiv 1 [p]$.

استنتج مما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n يحقق $n^2 + 1 \equiv 0 [p]$.

التمرين الرابع : (6,25 ن)

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = 4x e^{-x^2}$ I
- و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى $M(0, \vec{i}, \vec{j})$.
 أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. 1 I 0,25 ن
- أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$. ثم ضع جدول تغيراتها . 2 0,50 ن
- حدد معادلة نصف المماس للمنحنى (C) في أصل المعلم ثم أنشئ المنحنى (C) 3 0,50 ن
- (نأخذ : $\|\vec{l}\| = 2 \text{ cm}$. و نقبل أن النقطة التي أفصولها $\sqrt{\frac{3}{2}}$ نقطة انعطاف للمنحنى (C))
 أحسب التكامل التالي : $a = \int_0^1 f(x) dx$. ثم استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محوري المعلم و المستقيم ذو المعادلة $x = 1$.
 ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر أو يساوي 2 .
 نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = 4 x^n e^{-x^2}$.
 بين أن : $e^{-x^2} < e^{-x}$; $(\forall x > 1)$. 1 II 0,50 ن
- استنتج نهاية الدالة f_n عندما يؤول x إلى $+\infty$. ب 0,50 ن
- أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0; +\infty[$. ثم ضع جدول تغيراتها . 2 0,50 ن
- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد u_n من المجال $]0,1[$ بحيث $f_n(u_n) = 1$. 3 0,50 ن
- تحقق أن : $f_{n+1}(u_n) = u_n$; $(\forall n \geq 2)$. 4 0,50 ن
- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة . ب 0,50 ن
- نضع : $l = \lim u_n$. بين أن : $0 < l \leq 1$. 5 0,50 ن
- بين أن : $\frac{-\ln 4}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}$; $(\forall n \geq 0)$. ب 0,50 ن
- استنتج أن : $l = 1$. ج 0,50 ن

التمرين الخامس : (3,75 ن)

- نعتبر الدالة العددية F المعرفة على \mathbb{R}^* بما يلي : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$
- بين أن دالة فردية . 1 0,50 ن
- لكل x من المجال $]0; +\infty[$ ، نضع : $\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$.
 تحقق أن : $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$; $(\forall x > 0)$. 2 0,25 ن
- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$. ثم احسب $F'(x)$ لكل $x > 0$. ب 0,50 ن
- استنتج منحي تغيرات الدالة F على المجال $]0; +\infty[$. ج 0,50 ن
- بين أن : $F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$; $(\exists c \in]x; 2x[)$; $(\forall x > 0)$. 3 0,50 ن
- استنتج أن : $\frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$; $(\forall x > 0)$. ب 0,50 ن
- أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. ج 0,50 ن
- تحقق أن : $F(\sqrt{e-1}) > \frac{\sqrt{e-1}}{2}$ و $F(\sqrt{e-1}) < \sqrt{e-1}$. د 0,50 ن
- ثم استنتج أن المعادلة $F(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0; +\infty[$



التمرين الأول: (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة غير تبادلية .
نعتبر المجموعة التالية : $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$

- بين أن جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$. 1 0,50 ن
- بين أن التطبيق $\varphi : x \rightarrow M(x)$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (E, \times) . 2 0,75 ن
- استنتج أن زمرة تبادلية (E, \times) . ب 0,50 ن
- حدد $M^{-1}(x)$ مقلوب المصفوفة $M(x)$ لكل عدد حقيقي x . ج 0,50 ن
- حل في المجموعة E المعادلة $A^5 X = B$ حيث $A = M(2)$ و $B = M(12)$. د 0,75 ن
- بين أن المجموعة $F = \{ M(\ln x) ; x \in \mathbb{R}_+^* \}$ زمرة جزئية للزمرة (E, \times) . 3 0,50 ن

التمرين الثاني: (3,5 ن)

- المستوى العقدي منسوب إلى m, m, m $(0, \vec{u}, \vec{v})$.
- نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة التالية : $z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$: (E) .
- تحقق أن العدد العقدي $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$ حل للمعادلة (E) . 1 0,50 ن
- استنتج b الحل الثاني للمعادلة (E) . ب 0,50 ن
- بين أن : $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{6}}$. 2 0,50 ن
- أكتب العدد a على الشكل المثلي . ب 0,50 ن
- نعتبر النقط A و B و C التي أحاقها على التوالي a و b و $c = 2i + 2e^{\frac{i\pi}{7}}$.
- و لتكن (Γ) الدائرة التي مركزها Ω و أحد أقطارها $[AB]$.
- حدد w لحق النقطة Ω . 3 0,50 ن
- بين أن النقطتين O و C تنتميان إلى الدائرة (Γ) . ب 0,50 ن
- بين أن العدد العقدي $\left(\frac{c-a}{c-b}\right)$ تخيلي صرف . ج 0,50 ن

التمرين الثالث: (3,0 ن)

- يحتوي صندوق على 10 كرات بيضاء و كرتين حمراوين .
- نسحب الكرات من الصندوق الواحدة تلو الأخرى بدون إحلال إلى أن نحصل لأول مرة على كرة بيضاء ثم نوقف التجربة . ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات المسحوبة .
- حدد مجموعة قيم المتغير العشوائي X . 1 0,50 ن
- أحسب احتمال الحدث التالي : $[X = 1]$. ب 0,50 ن
- بين أن : $p[X = 2] = \frac{5}{33}$. ج 0,50 ن
- أحسب احتمال الحدث التالي : $[X = 3]$. د 0,50 ن
- بين أن : $E(X) = \frac{13}{11}$. (حيث $E(X)$ هو الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X) 2 0,50 ن
- أحسب $E(X^2)$ ثم استنتج قيمة $V(X)$. (حيث $V(X)$ هي مغايرة المتغير العشوائي X) ب 0,50 ن

التمرين الرابع : (10 ن)

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1-\ln(1-x)} ; 0 \leq x < 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

نعتبر الدالة f المعرفة على $I = [0; 1]$ بما يلي :

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في $M \times M$ م (O, \vec{i}, \vec{j}) .

$$(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm)$$

بين أن الدالة f متصلة على اليسار في 1 .

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في 1 .

أدرس تغيرات الدالة f على المجال I . ثم اعط جدول تغيراتها .

بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{e-1}{e}$.

أنشئ (C) مبرزا نصف مماسه في النقطة ذات الأفصول 0 .

بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال I و يحقق $f(\alpha) = \alpha$.

بين أن الدالة f تقابل من المجال I نحو المجال I نفسه .

حدد صيغة الدالة العكسية $f^{-1}(y)$ لكل y من المجال I .

نضع $I_0 = \int_0^1 f(t) dt$ و $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

بين أن المتتالية $(I_n)_{n \geq 0}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .

بين أن : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$. ثم حدد نهاية المتتالية $(I_n)_{n \geq 0}$.

لكل عدد حقيقي x من المجال $J = [0, 1[$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n F_k(x) \text{ و } F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt \text{ و } F_n(x) = \int_0^x t^n f(t) dt \text{ و } F_n(0) = \int_0^x f(t) dt$$

بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), (\forall x \in J) ; F(x) - S_n(x) = \int_0^x \left(\frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} \right) dt$

بين أن الدالة $x \rightarrow (1-x)(1-\ln(1-x))$ تناقصية قطعاً على المجال J .

استنتج أن الدالة $t \rightarrow \frac{f(t)}{1-t}$ تزايدية قطعاً على المجال $[0, x]$ ، مهما يكن x من J .

بين أن : $0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \left(\frac{1}{n+2} \right) \left(\frac{1}{1-x} \right)$; $(\forall n \in \mathbb{N}), (\forall x \in J)$.

استنتج أنه مهما يكن العدد x من المجال J لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = F(x)$

حدد $F(x)$ لكل x من المجال J .

حدد النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$

 I

 1 ن 0,50

 2 ن 0,50

 3 ن 0,75

 أ 4 ن 0,50

 ب ن 0,75

 5 ن 0,50

 أ 6 ن 0,25

 ب ن 0,50

 1 II ن 0,75

 2 ن 0,75

 1 III ن 1,00

 أ 2 ن 0,50

 ب ن 0,50

 أ 3 ن 1,00

 ب ن 0,50

 أ 4 ن 0,50

 ب ن 0,25



التمرين الأول: (4,0 ن)

الجزءان الأول والثاني مستقلان.

في الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ نعتبر المصفوفتين A و I المعرفتين بما يلي :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نضع : $A^0 = I$ و $A^1 = 1$ و $A^2 = A \times A$ و $A^{n+1} = A^n \times A$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

بين أن : $A^{2k} = I$; $(\forall k \in \mathbb{N})$ **1** **I** 0,50 ن

بين أن المصفوفة A تقبل مقلوبا A^{-1} . ينبغي تحديده . **2** 0,50 ن

ليكن α عددا حقيقيا موجبا قطعاً .

لكل x و y من المجال $I =]\alpha; +\infty[$ نضع : $x * y = (x - \alpha)(y - \alpha) + \alpha$

بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة I . **1** **II** 0,50 ن

بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي في I . **ب** 0,50 ن

بين أن المجموعة $(I, *)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده . **ج** 0,50 ن

بين أن المجموعة $(I, *)$ زمرة تبادلية . **2** 0,50 ن

نعتبر التطبيق φ المعرف من I نحو \mathbb{R}_+^* بما يلي : $\varphi(x) = \frac{1}{x - \alpha}$

بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(I, *)$ نحو (\mathbb{R}_+^*, \times) . **3** 0,50 ن

حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة $x^3 = \alpha^3 + \alpha$ بحيث : $x^{(3)} = x * x * x$. **ب** 0,50 ن

التمرين الثاني: (2,5 ن)

ليكن N العدد الصحيح الطبيعي الممثل في نظمة العد العشري بما يلي : $N = \underbrace{111 \dots 11}_{2010 \text{ fois}}$ 0,25 ن

بين أن العدد N قابل للقسمة على العدد 11 . **1** 0,25 ن

تحقق أن العدد 2011 أولي ، و أن : $10^{2010} - 1 = 9N$. **2** 0,75 ن

بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$. **ب** 0,50 ن

استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N . **ج** 0,50 ن

بين أن العدد N يقبل القسمة على العدد 22121 . **3** 0,50 ن

التمرين الثالث: (3,5 ن)

الجزءان الأول والثاني مستقلان.

ليكن m عددا عقديا غير منعدم . و نعتبر في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E_m) : z^2 + [(1 - i)m - 4]z - im^2 - 2(1 - i)m + 4 = 0$$

تحقق أن العدد $z_1 = 2 - m$ حل للمعادلة (E_m) . **1** **I** 0,50 ن

ليكن z_2 الحل الثاني للمعادلة (E_m) .

أثبت صحة التكافؤ التالي : $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1 - i)m - 3 = 0$. **2** 0,50 ن

حدد قيمتي m بحيث $z_1 z_2 = 1$. **ب** 1,00 ن

- المستوى العقدي منسوب إلى M م م م م (O, \vec{u}, \vec{v}) .
 نعتبر التطبيق S الذي يربط النقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z'
 بحيث : $z' = -(z - 1) + 1$. و الدوران R الذي مركزه النقطة Ω ذات اللوح
 $(1 + i)$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$. و ليكن z'' لحق النقطة M'' صورة M بالدوران R .
 بين أن التطبيق S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة ذات اللوح 1 .
 بين أن $z'' = iz + 2$.
 حدد طبيعة المثلث $AM'M''$.
 حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة .

التمرين الرابع : (6,5 ن)

- الهدف من هذا التمرين هو دراسة الحلول الموجبة للمعادلة $(E) : e^x = x^n$ بحيث $n \in \mathbb{N}^*$
 نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $D = [0,1[\cup]1, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
 و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في M م م م (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 تحقق أنه لكل x من المجموعة $]0,1[\cup]1, +\infty[$ لدينا : $(e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x))$
 بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر .
 أحسب النهايات التالية مع إعطاء تأويلات هندسية للنتائج المحصل عليها .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$
 أدرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1, +\infty[$. ثم اعط جدول تغيراتها .
 بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثياتها .
 أنشئ المنحنى (C) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين a_n و b_n
 بحيث $1 < a_n < e < b_n$.
 لندرس في هذه الفقرة تقارب المتتاليتين $(a_n)_{n \geq 3}$ و $(b_n)_{n \geq 3}$.
 بين أن : $b_n \geq n$; $(\forall n \geq 3)$. ثم استنتج أن نهاية المتتالية $(b_n)_{n \geq 3}$.
 بين أن المتتالية $(a_n)_{n \geq 3}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .
 بين أن : $\frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$; $(\forall n \geq 3)$. ثم استنتج نهاية المتتالية $(a_n)_{n \geq 3}$.
 بين أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = e$

التمرين الخامس : (3,5 ن)

- نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بما يلي : $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$
 بين أن : $0 \leq F(x) \leq x e^{-x^2}$; $(\forall x \geq 0)$.
 بين أن : $e^{-x^2} \leq e^{-x}$; $(\forall x \geq 1)$. ثم استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$.
 بين أن F قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$. و أن : $F'(x) = e^{-2x^2} - 2x F(x)$; $(\forall x \geq 0)$
 نعتبر الدالة G المعرفة على المجال $[0, \frac{\pi}{2}]$ بما يلي :

$$\begin{cases} G(x) = F(\tan x) ; x \neq \frac{\pi}{2} \\ G(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$
 بين أن الدالة G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$.
 بين أنه يوجد عدد حقيقي من المجال $]0; +\infty[$ بحيث $F'(c) = 0$ و $F(c) = \frac{1}{2c} e^{-2c^2}$.
 نعتبر الدالة العددية H المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي : $H(x) = F'(x) \frac{e^{x^2}}{2x}$.
 بين أن الدالة H تناقصية قطعاً على المجال $]0; +\infty[$.
 استنتج أن العدد c وحيد ثم اعط جدول تغيرات الدالة F .



التمرين الأول: (3,5 ن)

- لكل x و y من المجال $I =]0,1[$ نضع : $x * y = \frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$
- بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في I . **1** 0,50
- بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي في I . **ب** 0,50
- بين أن $(I,*)$ يقبل عنصرا محايدا ينبغي تحديده. **ج** 0,50
- بين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية. **2** 0,50
- نعتبر المجموعتين $H = \{2^n ; n \in \mathbb{Z}\}$ و $K = \left\{ \frac{1}{2^{n+1}} ; n \in \mathbb{Z} \right\}$ **3** 0,50
- بين أن H زمرة جزئية للزمرة (\mathbb{R}_+, \times) . **أ** 0,50
- نعتبر التطبيق φ المعرف من H نحو I بما يلي : $\varphi(x) = \frac{1}{1+x}$ **ب** 0,50
- بين أن التطبيق φ تشاكل من (H, \times) نحو $(I, *)$. **ج** 0,50
- استنتج أن $(K, *)$ زمرة جزئية للزمرة $(I, *)$. 0,50

التمرين الثاني: (2,5 ن)

- ليكن x عددا صحيحا طبيعيا يحقق $10^x \equiv 2 [19]$
- تحقق أن : $10^{x+1} \equiv 1 [19]$ **1** 0,25
- بين أن : $10^{18} \equiv 1 [19]$ **ب** 0,50
- ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و $(x+1)$
- بين أن : $10^d \equiv 1 [19]$ **2** 0,75
- بين أن : $d = 18$ **ب** 0,50
- استنتج أن : $x \equiv 17 [18]$ **ج** 0,50

التمرين الثالث: (4,0 ن)

- نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية : **I**
- $(E) : z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0$
- بين أن العدد $-2i$ حل للمعادلة (E) . **1** 0,50
- حدد العددين العقديين α و β بحيث : **2** 0,50
- $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = (z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$
- حدد الجذرين المربعين للعدد $5 - 12i$ **3** 0,50
- حل في \mathbb{C} المعادلة (E) . **ب** 0,50
- المستوى العقدي منسوب إلى M م م م (O, \vec{u}, \vec{v}) .
- نعتبر A و B و C التي أحاقها على التوالي: $a = -1 + 3i$ و $b = -2i$ و $c = 2 + i$
- بين أن ABC قائم الزاوية و متساوي الساقين في النقطة C . **1 II** 0,50
- نعتبر الدوران R_1 الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و الدوران R_2 الذي مركزه A و زاويته $\frac{-2\pi}{3}$.
- لتكن M من المستوى لحقها z و M_1 صورتها بالدوران R_1 و M_2 صورتها بالدوران R_2 .
- تحقق أن الصيغة العقدية للدوران R_1 هي : $z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) z - \sqrt{3} - i$ **2** 0,50
- حدد العدد العقدي z_2 لحق النقطة M_2 بدلالة z . **ب** 0,50
- استنتج أن النقطة I منتصف القطعة $[M_1M_2]$ نقطة ثابتة. **ج** 0,50

التمرين الرابع : (6,0 ن)



- لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x + \ln x$.
 و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى M م م (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 و نأخذ : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$.
- أحسب النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ **1** 1,00 ن
- ضع جدول تغيرات الدالة f . **2** 0,50 ن
- بين أن الدالة f تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو مجال J و يجب تحديده . **ب** 0,75 ن
- ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي f^{-1} .
 أحسب $f(1)$ و $f(e)$ ثم أنشئ (C) و (C^{-1}) في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) . **3** 0,50 ن
- أحسب التكامل $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$. **أ** **4** 0,50 ن
- استنتج مساحة الحيز من المستوى المحصور بين (C^{-1}) و المستقيمتان التي معادلاتها الديكارتية على التوالي هي : $x = 1$ و $x = e + 1$ و $y = x$. **ب** 0,50 ن
- بين أن المعادلة $x + \ln x = n$: (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n لكل n من \mathbb{N}^* . **أ** **5** 0,25 ن
- حدد القيمة العددية للحل x_1 . ثم بين أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. **ب** 0,50 ن
- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(x_n) \leq f(n)$. ثم استنتج أن : $x_n \leq n$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$. **أ** **6** 0,50 ن
- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n - \ln n \leq x_n$. **ب** 0,50 ن
- أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n - n}{n} \right)$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{n - \ln n} \right)$ **ج** 0,50 ن

التمرين الخامس : (4,0 ن)



- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و f_n الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :
- $$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$$
- بين أنه من أجل $n \geq 2$ يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]0,1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$ **1** 0,50 ن
- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة . **2** 0,75 ن
- تحقق أن : $(\forall t \neq 1) ; 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$ **أ** **3** 0,50 ن
- استنتج أن : $\alpha_n + \frac{(\alpha_n)^2}{2} + \frac{(\alpha_n)^3}{3} + \dots + \frac{(\alpha_n)^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt$ **ب** 0,50 ن
- بين أن : $1 + \ln(1 - \alpha_n) = - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt$ **أ** **4** 0,75 ن
- بين أن : $(\forall n \geq 2) ; 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$ **ب** 0,50 ن
- استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = 1 - e^{-1}$ **ج** 0,50 ن



التمرين الأول: (3,5 ن)

في الحلقة الواحدة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ نعتبر المصفوفتين A و I المعرفتين بما يلي:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

أحسب: A^2 و $I - A$. **1** **0,75**

استنتج أن المصفوفة A تقبل مقلوبا يتم تحديده. **2** **0,50**

لكل a و b من المجال $I =]1; +\infty[$. نضع: $a * b = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2}$

تحقق أن: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$. **1** **0,25**

بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة I . **2** **0,50**

نذكر أن (\mathbb{R}_+, \times) زمرة تبادلية.

نعتبر التطبيق φ المعرف من \mathbb{R}_+^* نحو I بما يلي: $\varphi(x) = \sqrt{x + 1}$

بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}_+, \times) نحو $(I, *)$. **3** **0,50**

استنتج البنية الجبرية للمجموعة $(I, *)$. **ب** **0,25**

بين أن المجموعة $T = \{\sqrt{1 + 2^m}; m \in \mathbb{Z}\}$ زمرة جزئية من $(I, *)$. **ج** **0,75**

التمرين الثاني: (3,5 ن)

الجزءان الأول والثاني مستقلان.

المستوى العقدي منسوب إلى M م م م م (O, \vec{u}, \vec{v}) . نعتبر في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$(E): iz^2 + (2 - i)az - (1 + i)a^2 = 0; a \in \mathbb{C}^*$$

حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) . **1** **0,75**

تحقق أن: $z_1 z_2 = a^2(i - 1)$. **2** **0,25**

أثبت صحة التكافؤ التالي: $z_1 z_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg a \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right]$. **ب** **0,50**

ليكن c عددا حقيقيا غير منعدم و z عدد عقدي غير منعدم.

نعتبر النقط A و B و C و D و M التي أحاقها على التوالي هي: 1 و $i + 1$ و i و c و ic و z .

بين التكافؤ التالي: A و D و M نقط مستقيمية $\Leftrightarrow (ic + 1)z + (ic - 1)\bar{z} = 2ic$. **1** **0,50**

بين التكافؤ التالي: $(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow (ic + 1)z - (ic - 1)\bar{z} = 0$. **ب** **0,50**

ليكن h لحق النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (AD) .

بين أن: $h - (1 + i) = \frac{i}{c}(h - c)$. **2** **0,75**

استنتج أن المستقيمان (BH) و (CH) متعامدان. **ب** **0,25**

التمرين الثالث: (3,0 ن)

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة التالية: $(E): 143x - 195y = 52$

حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 143 و 195. و استنتج أن المعادلة (E) تقبل حولا في \mathbb{Z}^2 . **1** **0,50**

علما أن $(-1; -1)$ حل خاص لـ (E) . أوجد الحل العام للمعادلة (E) في \mathbb{Z}^2 . **ب** **0,75**

ليكن n عنصرا من \mathbb{N}^* و أولي مع العدد 5. بين أن: $5 \mid n^{4k} - 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$. **2** **0,50**

ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث $x \equiv y \pmod{4}$.

بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n^x \equiv n^y [5]$	أ	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n^x \equiv n^y [10]$	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث يكون (x, y) حلا للمعادلة (E) . بين أنه مهما يكن n من \mathbb{N}^* ، العددين n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري .		4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن

التمرين الرابع : (5,5 ن)

ليكن n من \mathbb{N}^* . نعتبر الدالة f_n المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى M^3 م (O, \vec{i}, \vec{j}) .					
أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) بجوار $-\infty$.	أ	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
بين أن $y = x$: (D) مقارب مائل لـ (C_n) بجوار $+\infty$.	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
و حدد الوضع النسبي لـ (C_n) و (D) .					
أدرس تغيرات الدالة f_n ثم ضع جدول تغيراتها .	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
أنشئ المنحنى (C_3) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) نأخذ : $f_3(-1,5) \approx 0$ و $f_3(-0,6) \approx 0$	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن $\frac{e}{n} < \ln n$.	أ	5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين x_n و y_n	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1,00 ن
بحيث : $x_n \leq -\ln n$ و $-\frac{e}{n} \leq y_n \leq 0$.					
أحسب النهايتين : $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$	ج	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
لتكن g الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x ; \forall x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$					
بين أن الدالة g متصلة على يمين الصفر .	أ	6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
تحقق أن : $(\forall n \geq 3) ; g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
استنتج النهاية التالية : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{x_n}\right)$	ج	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن

التمرين الخامس : (4,5 ن)

نعتبر الدالة F المعرفة على $[0,1]$ بما يلي : $\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} ; \forall x \in]0,1[\\ F(0) = 1 \end{cases}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
ليكن x عنصرا من $[0,1]$. بين أنه مهما يكن t من $[0, x]$ لدينا : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
ليكن x عنصرا من المجال $]0,1[$. بين أن : $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right) dt$	أ	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
بين أن : $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$. ثم استنتج أن الدالة F متصلة على يمين الصفر .	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
بين أن : $\forall x \in]0,1[; \int_0^x \left(\frac{2t}{1+2t}\right) dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
ليكن x عنصرا من المجال $]0,1[$. بين أن : $F'(x) = \frac{-4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$	أ	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
بين أن : $\forall x \in]0,1[; \frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
بين أن : $\forall x \in]0,1[; \frac{-4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$	ج	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
استنتج أن الدالة F قابلة للاشتقاق على يمين الصفر و حدد العدد المشتق على اليمين في 0 .	د	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن



التمرين الأول: (3,5 ن)



- الجزءان الأول والثاني مستقلان
- لكل a و b من المجال $I = [1; +\infty[$ ، نضع: $a \perp b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$.
- بين أن \perp قانون تركيب داخلي في I . **1** **I** 0,50 ن
- بين أن القانون \perp تبادلي و تجميعي في I . **2** 0,50 ن
- بين أن القانون \perp يقبل عنصرا محايدا في I و جب تحديده. **3** 0,25 ن
- نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة.
- بين أن $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}^* \right\}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ **1** **II** 0,50 ن
- نعتبر التطبيق φ المعرف من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) بما يلي: $\varphi(x) = M(x)$
- بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) . **أ** **2** 0,50 ن
- استنتج البنية الجبرية للمجموعة (E, \times) . **ب** 0,50 ن
- بين أن المجموعة $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\}$ زمرة جزئية من (E, \times) . **ج** 0,75 ن

التمرين الثاني: (3,5 ن)



- الجزءان الأول والثاني مستقلان.
- المستوى العقدي منسوب إلى m, m, m, m (O, \vec{u}, \vec{v}) .
- نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة التالية: $(E) : z^2 - 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)z + \frac{5}{3} + 4i = 0$
- تحقق أن العدد العقدي $z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$ حل للمعادلة (E) . **أ** **1** **I** 0,50 ن
- بين أن الحل الثاني للمعادلة (E) هو $z_2 = 3z_1$. **ب** 0,50 ن
- نعتبر ثلاث نقاط A و B و Ω مختلفة مثنى مثنى ألحاقها على التوالي: a و b و ω .
- ليكن r الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{3}$. نضع: $P = r(A)$ و $Q = r(B)$.
- ليكن العدد العقدي p لحق النقطة P و العدد العقدي q لحق النقطة Q .
- بين أن: $p = \omega + e^{\frac{i\pi}{3}}(a - \omega)$ و $q = \omega + e^{-\frac{i\pi}{3}}(b - \omega)$ **أ** **1** **II** 0,50 ن
- بين أن: $\frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ **ب** 0,25 ن
- بين أن: $\frac{(p-a)}{(q-b)} = \frac{(\omega-a)}{(\omega-b)} e^{\frac{4i\pi}{3}}$ **ج** 0,50 ن
- نفترض أن: $\frac{(\omega-a)}{(\omega-b)} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. بين أن الرباعي $APQB$ متوازي أضلاع. **أ** **2** 0,75 ن
- بين أن: $\arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ و استنتج أن الرباعي $APQB$ مستطيل. **ب** 0,75 ن

التمرين الثالث : (3,0 ن)

- تحقق أن العدد 503 عدد أولي . **1** 0,50 ن
- بين أن : $7^{502} \equiv 1 [503]$. ثم استنتج أن : $7^{2008} \equiv 1 [503]$. **ب** 0,50 ن
- نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة التالية : $49x - 6y = 1$: (E) .
 علما أن (1,8) حل خاص للمعادلة (E) ، حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) مبرزا مراحل الحل . **2** 0,50 ن
- نضع : $N = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007}$.
 بين أن الزوج $(7^{2006}, N)$ حل للمعادلة (E) . **3** 0,50 ن
- بين أن $N \equiv 0 [4]$ و $N \equiv 0 [503]$. **ب** 0,50 ن
- استنتج أن N يقبل القسمة على العدد 2012 . **ج** 0,50 ن

التمرين الرابع : (7,5 ن)

- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بما يلي : $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ **ا** 0,50 ن
- أدرس تغيرات الدالة g على المجال $[0; +\infty[$. **1** **ا** 0,50 ن
- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$. **2** 0,50 ن
- لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$.
 بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ **1** **ا** 0,50 ن
- بين أنه لكل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = e^x g(e^{-x})$. **2** 0,50 ن
- ضع جدول تغيرات الدالة f . **3** 0,50 ن
- أشئ (C) و (C') المنحنيين الممثلين على التوالي للدالتين f و $-f$ في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 نقبل أن $-0,7$ قيمة مقربة لأفصول نقطة الإنعطاف الوحيدة للمنحنى (C) .
 بين أن : $\forall x \in]-1,0[; 0 < f'(x) < g(e)$ **5** 0,50 ن
- بين أن المعادلة $f(x) + x = 0$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R} . و أن $-1 < \alpha < 0$.
 نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = -f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$ **6** 0,50 ن
- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -1 \leq u_n \leq 0$. **7** 0,50 ن
- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$. **ب** 0,50 ن
- استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$. **ج** 0,50 ن
- علما أن $g(e) < 0,6$ ، أحسب النهاية : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$ **د** 0,50 ن

التمرين الخامس : (2,5 ن)

- نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \left(\frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt$ 0,25 ن
- أحسب $F(1)$. **1** 0,25 ن
- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$. و احسب $F'(x)$ لكل x من $]0; +\infty[$. **2** 0,50 ن
- استنتج أن : $F(x) = 0$; $(\forall x > 0)$. **ب** 0,25 ن
- بين أن : $F(x) = \left(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$; $(\forall x > 0)$ **3** 0,50 ن
- بين أن : $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)$; $(\forall x > 0)$ **4** 0,50 ن
- بين أن : $\ln x = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$; $(\forall x > 0)$ **5** 0,50 ن



www.bestcours.net

التمرين الأول : (3,5 ن)

- نذكر أن $(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة واحدية تبادلية و كاملة .
- نزود \mathbb{Z} بقانون التركيب الداخلي $*$ المعروف بما يلي : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; x * y = x + y - 2$ 1
- بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي . أ 1 0,50 ن
- بين أن $(\mathbb{Z}, *)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده . ب 1 0,25 ن
- بين أن $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة تبادلية . ج 1 0,50 ن
- نزود \mathbb{Z} بقانون التركيب الداخلي \top المعروف ب : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; x \top y = xy - 2x - 2y + 6$ 2
- و نعتبر التطبيق f من \mathbb{Z} نحو \mathbb{Z} المعروف بما يلي : $(\forall x \in \mathbb{Z}) ; f(x) = x + 2$
- بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من (\mathbb{Z}, \times) نحو (\mathbb{Z}, \top) . أ 2 0,50 ن
- بين أن : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 ; (x * y) \top z = (x \top z) * (y \top z)$ ب 2 0,25 ن
- إستنتج من كل ما سبق أن : $(\mathbb{Z}, *, \top)$ حلقة تبادلية و واحدية . 3 0,75 ن
- بين أن : $x \top y = 2$ إذا وفقط إذا كان $x = 2$ أو $y = 2$. أ 4 0,25 ن
- استنتج أن الحلقة $(\mathbb{Z}, *, \top)$ كاملة . ب 4 0,25 ن
- هل $(\mathbb{Z}, *, \top)$ جسم ؟ (علل الجواب) ج 4 0,25 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

- ليكن a عددا عقديا غير منعدم . ا 1
- نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z :

$$(E) : 2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0$$

- تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $(-1 + i\sqrt{3})^2 a^2$ 1 ا 1 0,25 ن
- حل في \mathbb{C} المعادلة (E) . 2 ا 1 0,50 ن
- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{u}, \vec{v}) II
- نعتبر النقط A و B و M التي أحاقها على التوالي : a و $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ و z .
- ليكن r الدوران الذي مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{3}$. نضع : $A_1 = r^{-1}(A)$ و $B_1 = r(B)$
- (حيث r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r)
- ليكن a_1 و b_1 لحقي A_1 و B_1 على التوالي .
- تحقق أن المثلث OAB متساوي الأضلاع . 1 II 0,50 ن
- بين أن : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و $b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ أ 2 II 0,50 ن
- بين أن الرباعي OA_1MB_1 متوازي أضلاع . ب 2 II 0,50 ن

$$\frac{z - b_1}{z - a_1} = - \left(\frac{z - b}{z - a} \right) \times \frac{a}{b} \quad \text{نفترض أن } M \neq A \text{ و } M \neq B \text{ بين أن : } \quad \boxed{\text{أ}} \quad \boxed{3} \quad \boxed{\text{II}} \quad \underline{0,50 \text{ ن}}$$

بين أن النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط M و O و A و B متداورة . $\boxed{\text{ب}} \quad \boxed{3} \quad \boxed{\text{II}} \quad \underline{0,75 \text{ ن}}$

التمرين الثالث : (3 ن)

الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الصحيحة الطبيعية n الأكبر قطعا من 1
و التي تحقق الخاصية (\mathcal{R}) التالية : $3^n - 2^n \equiv 0 [n] : (\mathcal{R})$.
نفترض أن n يحقق الخاصية (\mathcal{R}) . و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n . **1**

بين أن : $3^n - 2^n \equiv 0 [p]$ ثم استنتج أن $p \geq 5$. $\boxed{\text{أ}} \quad \boxed{1} \quad \boxed{} \quad \underline{0,75 \text{ ن}}$

بين أن : $2^{p-1} \equiv 1 [p]$ و $3^{p-1} \equiv 1 [p]$. $\boxed{\text{ب}} \quad \boxed{1} \quad \boxed{} \quad \underline{0,50 \text{ ن}}$

بين أنه يوجد زوج (a, b) من \mathbb{Z}^2 بحيث : $an - b(p - 1) = 1$. $\boxed{\text{ج}} \quad \boxed{1} \quad \boxed{} \quad \underline{0,50 \text{ ن}}$

ليكن r و q باقي و خارج القسمة الأفلديدية للعدد a على $(p - 1)$. $\boxed{\text{د}} \quad \boxed{1} \quad \boxed{} \quad \underline{0,50 \text{ ن}}$

(يعني : $a = q(p - 1) + r$ حيث : $0 \leq r < p - 1$ و $q \in \mathbb{Z}$)

بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث : $rn = 1 + k(p - 1)$.

استنتج من كل ما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 و يحقق الخاصية (\mathcal{R}) . $\boxed{} \quad \boxed{2} \quad \boxed{} \quad \underline{0,75 \text{ ن}}$

التمرين الرابع : (10 ن)

$$\begin{cases} h(x) = \frac{x-1}{x \ln x} ; (\forall x > 1) \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بما يلي : الجزء الأول

بين أن الدالة h متصلة على اليمين في 1 . $\boxed{\text{أ}} \quad \boxed{1} \quad \boxed{} \quad \underline{0,25 \text{ ن}}$

بين أن : $\ln x < x - 1$; $(\forall x > 1)$ ثم استنتج أن h تناقصية قطعا على المجال $[1; +\infty[$. $\boxed{\text{ب}} \quad \boxed{1} \quad \boxed{} \quad \underline{0,75 \text{ ن}}$

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة h . $\boxed{\text{أ}} \quad \boxed{2} \quad \boxed{} \quad \underline{0,50 \text{ ن}}$

استنتج أن : $0 < h(x) \leq 1$; $(\forall x \geq 1)$. $\boxed{\text{ب}} \quad \boxed{2} \quad \boxed{} \quad \underline{0,25 \text{ ن}}$

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بما يلي : الجزء الثاني

$$\begin{cases} g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt ; (\forall x > 1) \\ g(1) = \ln 2 \end{cases}$$

و ليكن (\mathcal{C}) المنحنى الممثل للدالة g

في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

تحقق أن : $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$; $(\forall x > 1)$ $\boxed{\text{أ}} \quad \boxed{1} \quad \boxed{} \quad \underline{0,25 \text{ ن}}$

تحقق أن : $g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} dt$; $(\forall x > 1)$ $\boxed{\text{ب}} \quad \boxed{1} \quad \boxed{} \quad \underline{0,25 \text{ ن}}$

بين أن : $g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) dt$; $(\forall x > 1)$ $\boxed{\text{ج}} \quad \boxed{1} \quad \boxed{} \quad \underline{0,50 \text{ ن}}$

بين أن : $(x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$; $(\forall x > 1)$ $\boxed{\text{أ}} \quad \boxed{2} \quad \boxed{} \quad \underline{0,50 \text{ ن}}$

0,50 ن

ب 2 استنتج أن الدالة g قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 .

0,75 ن

ج 2 بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ وأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

0,75 ن

أ 3 بين أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1; +\infty[$. وأن : $g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$; $(\forall x > 1)$;

0,50 ن

ب 3 استنتج أن : $0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$; $(\forall x \geq 1)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .

0,50 ن

ج 3 أنشئ المنحنى (\mathcal{C}) .

الجزء الثالث

0,50 ن

أ 1 بين أن الدالة : $k : x \mapsto g(x) - x + 1$ تقابل من $]1; +\infty[$ نحو $]-\infty; \ln 2]$.

0,25 ن

أ 2 استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1; +\infty[$ بحيث : $1 + g(\alpha) = \alpha$.

$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + g(u_n) ; (\forall n \geq 0) \\ 1 \leq u_0 < \alpha \end{cases}$	نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي :	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	II
--	--	--	----

0,50 ن

أ 1 بين أن : $(\forall n \geq 0) ; 1 \leq u_n < \alpha$

0,50 ن

ب 1 بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً .

0,75 ن

ج 1 استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة . وأن : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$

0,50 ن

أ 2 بين أن : $(\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

0,50 ن

ب 2 بين أن : $(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

0,25 ن

ج 2 استنتج مرة ثانية أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$



التمرين الأول: (3,5 ن)

الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما .

لكل x و y من المجال $G =]1,2[$ نضع : $x * y = \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$

بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G . 1 I 0,50 ن

نذكر أن (\mathbb{R}_+, \times) زمرة تبادلية 2 I

و نعتبر التطبيق f المعرف من \mathbb{R}_+^* نحو G بما يلي : $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

بين أن f تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}_+^*, \times) نحو $(G, *)$. 2 I 0,75 ن

استنتج أن $(G, *)$ زمرة تبادلية و حدد عنصرها المحايد . 2 I 0,50 ن

نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة صفرها : $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و وحدتها : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ II

و أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و نضع : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

تحقق أن : $A^3 = \mathcal{O}$ ثم استنتج أن A قاسم للصفر في الحلقة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ 1 II 0,50 ن

تحقق أن : $(A^2 - A + I)(A + I) = I$. 1 II 0,50 ن

ثم استنتج أن المصفوفة $(A + I)$ تقبل مقلوبا في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ يتم تحديده .

لكل a و b من \mathbb{R} نضع : $M(a, b) = a \cdot I + b \cdot A$ 2 II 0,75 ن

و نعتبر المجموعة : $E = \{ M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$

بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و حدد أساسا له .

التمرين الثاني: (3 ن)

يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .

نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 4 كرات من الصندوق و نعتبر المتغير العشوائي X الذي I

يساوي عدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق .

حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X . 1 I 1,00 ن

أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X . 2 I 0,50 ن

نجز التجربة العشوائية التالية في ثلاث مراحل كالآتي : II

المرحلة الأولى : نسحب كرة من الصندوق ، نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق .

المرحلة الثانية : نضيف إلى الصندوق 5 كرات لها نفس لون الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى .

المرحلة الثالثة : نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 كرات من الصندوق الذي أصبح يحتوي على

12 كرة بعد المرحلة الثانية .

نعتبر الأحداث التالية :

- . { الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى سوداء } = N
. { الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى حمراء } = R
. { جميع الكرات المسحوبة في المرحلة الثالثة سوداء } = E

بين أن : $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$ 1 ن 0,50

أحسب $p(E)$ 2 ن 0,50

أحسب احتمال الحدث R علما أن الحدث E قد تحقق . 3 ن 0,50

التمرين الثالث : (3,5 ن)

ليكن a عددا عقديا يخالف 1 . 1

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

بين أن : $z_1 = \frac{(a-1)(1+i)}{2}$ و $z_2 = \frac{(a-1)(1-i)}{2}$ هما حلتي المعادلة (E) . 1 ن 0,50

نأخذ $a = e^{i\theta}$ حيث $0 < \theta < \pi$. 2 1

بين أن : $a - 1 = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$ 2 1 ن 0,50

استنتج الشكل المثلثي لكل من z_1 و z_2 . 2 1 ن 1,00

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\sigma, \vec{u}, \vec{v})$. 2

نفترض أن $\operatorname{Re}(a) < 0$ و نعتبر النقط $A(a)$ و $B(-i)$ و $C(i)$ و $B'(1)$.

حدد لحقي كل من J و K منتصفتي القطعتين $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي بدلالة a . 1 ن 0,50

ليكن r_1 الدوران الذي مركزه J و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$. و r_2 الدوران الذي مركزه K و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$. 2 ن 0,50

نضع : $C' = r_1(C)$ و $A' = r_2(A)$.

و ليكن c' لحق C' و a' لحق A' . بين أن : $a' = z_1$ و $c' = z_2$.

أحسب $\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right)$ ثم استنتج أن المستقيم $(A'B')$ ارتفاع في المثلث $A'B'C'$. 3 ن 0,50

التمرين الرابع : (8,25 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : 1

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(x \ln x)^2}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0 ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 1 1 ن 0,50

أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في النقطة 0 (يمكنك استعمال النتيجة $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$) 1 ن 0,50

بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$. و أن مشتقتها معرفة بـ : 1 ن 0,50

$$(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ضع جدول تغيرات الدالة f . 1 ن 0,50

تكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ **2**

و ليكن (\mathcal{E}_F) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(\sigma, \vec{i}, \vec{j})$

حدد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ على المجال $[e, +\infty[$. **أ** **2** 0,25 ن

www.bestcours.net

بين أن : $(\forall t \geq e) ; t \ln t < \sqrt{1 + (t \ln t)^2} < \sqrt{2} t \ln t$ **ب** **2** 0,50 ن

بين أن : $(\forall t \geq e) ; \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < \ln(\ln x)$ **ج** **2** 0,75 ن

استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ و أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ **د** **2** 0,50 ن

بين أن (\mathcal{E}_F) يقبل نقطتي انعطاف المطلوب تحديد أفصول كل واحدة منهما . **هـ** **2** 0,50 ن

أنشئ (\mathcal{E}_F) (نأخذ من أجل ذلك $F(1) \approx 0,5$ و $F\left(\frac{1}{e}\right) \approx 0,4$) **ز** **2** 1,00 ن

لكل x من المجال $[0, +\infty[$ نضع : $\varphi(x) = x - F(x)$ **3**

بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ ثم ادرس تغيرات الدالة φ . **أ** **3** 0,75 ن

بين أنه لكل n من \mathbb{N} ، المعادلة $\varphi(x) = n$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $[0, +\infty[$. **ب** **3** 0,50 ن

بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_n \geq n$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ **ج** **3** 0,50 ن

بين أن : $(\forall n \geq 1) ; 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)$ **أ** **4** 0,50 ن

(من أجل ذلك يمكن استعمال مبرهنة التزايديات المنتهية)

أحسب النهاية : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_n}{n}\right)$ **ب** **4** 0,50 ن

التمرين الخامس : (1,75 ن)



لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ و $v_n = \ln(u_n)$

تحقق أن : $(\forall n \geq 1) ; v_n = n^2 [\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))]$ **1** 0,25 ن

باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية بين أن : **2** 0,50 ن

$(\forall n \geq 1) , (\exists c \in]n ; n+1[) ; v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$

بين أن : $(\forall n \geq 1) ; \frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$ **3** 0,50 ن

أحسب النهاية : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ **4** 0,50 ن



التمرين الأول: (3,0 ن)

لكل n من \mathbb{N}^* نضع: $a_n = \underbrace{333 \dots 31}_{n \text{ fois}}$

- تحقق أن العددين a_1 و a_2 أوليان. 1 0,50 ن
- بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 3 a_n + 7 = 10^{n+1}$ 2 0,50 ن
- بين أن: $(\forall k \in \mathbb{N}) ; 10^{30k+2} \equiv 7 [31]$ 3 0,75 ن
- بين أن: $(\forall k \in \mathbb{N}) ; 3 a_{30k+1} \equiv 0 [31]$. ثم استنتج أن العدد 31 يقسم a_{30k+1} 4 0,75 ن
- بين أنه لكل n من \mathbb{N}^* ، إذا كان $n \equiv 1 [30]$ فإن المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حولا في \mathbb{Z}^2 . 5 0,50 ن

التمرين الثاني: (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathbb{C}, +, \times)$ جسم تبادلي و أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة صفرها $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

لكل a و b من \mathbb{R} نضع: $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$

و نعتبر المجموعة التالية: $E = \{ M(a, b) ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$
بين أن زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$. 1 0,50 ن

أحسب $J^2 = J \times J$ حيث $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ثم استنتج أن E جزء غير مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ 2 0,75 ن

نعرف على $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ قانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي: $A * B = A \times N \times B$

حيث: $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و حيث A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

و نعتبر التطبيق φ المعرف من \mathbb{C}^* نحو $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $(a + ib)$ بالمصفوفة $M(a, b)$ حيث: a و b عدنان حقيقيان

بين أن φ تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), *)$. 3 0,50 ن

نضع $E^* = E - \{O\}$. بين أن: $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$. 4 0,25 ن

بين أن $(E^*, *)$ زمرة تبادلية. 5 0,50 ن

بين أن: $\forall (A, B, C) \in E^2 ; A * (B + C) = A * B + A * C$ 4 0,50 ن

استنتج مما سبق أن $(E, +, *)$ جسم تبادلي. 5 0,50 ن

التمرين الثالث: (3,5 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى m, m, m, m (O, \vec{u}, \vec{v}) .

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث: $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية: $(E) : z^2 - \sqrt{2} e^{i\theta} z + e^{2i\theta} = 0$

تحقق أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta = (\sqrt{2} i e^{i\theta})^2$. 1 0,25 ن

أكتب على الشكل المتلثي z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) في المجموعة \mathbb{C} . 2 0,75 ن

نعتبر النقط I و J و T_1 و T_2 و A التي أحاقها على التوالي هي: 1 و -1 و $e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}$

و $e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}$ و $\sqrt{2} e^{i\theta}$

بين أن المستقيمين (OA) و (T_1T_2) متعامدان .	أ	2	0,50 ن
ليكن k منتصف القطعة $[T_1T_2]$. بين أن O و k و A نقط مستقيمية .	ب		0,25 ن
استنتج أن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1T_2]$.	ج		0,25 ن
ليكن r الدوران الذي مركزه T_1 و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$. اعط الصيغة العقدية للدوران r .	أ	3	0,25 ن
تحقق أن لحق النقطة B صورة النقطة I بالدوران r هو $b = \sqrt{2} e^{i\theta} + i$.	ب		0,50 ن
بين أن المستقيمين (IJ) و (AB) متعامدان .	ج		0,25 ن
حدد لحق النقطة C صورة النقطة A بالازاحة التي متجهتها $(-\vec{v})$.		4	0,25 ن
بين أن النقطة A هي منتصف القطعة $[BC]$.		5	0,25 ن

التمرين الرابع : (8,0 ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2}$; $\forall x > 0$ $f(0) = 0$			أ	
بين أن الدالة f متصلة على المجال $]0; +\infty[$. و متصلة على يمين الصفر .	أ	1	أ	0,50 ن
فيما يلي نقبل أن f متصلة على المجال $[0, +\infty[$.				
أدرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0, +\infty[$.	ب			0,25 ن
بين أن : $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$; $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$.	أ	2		0,25 ن
بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.	ب			0,25 ن
بين أنه يوجد α من $]0,1[$ بحيث $f'(\alpha) = 0$.	ج			0,50 ن
استنتج أن : $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$.	د			0,50 ن
نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة F في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$.				
تحقق أن : $\frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$; $\forall t \in [1; +\infty[$.	أ	1	II	0,50 ن
بين أن : $F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$; $\forall x \geq 1$.	ب			1,00 ن
(لاحظ أن : $F(x) = \int_0^1 f(t) dt - \int_1^x \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) \frac{\ln t}{t} dt$)				
أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها .	ج			1,00 ن
بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ ثم احسب $F'(x)$ لكل x من $[0, +\infty[$.	أ	2		0,50 ن
أدرس تغيرات الدالة F على المجال $[0, +\infty[$.	ب			0,25 ن
بين أن : $-t \ln t \leq \frac{1}{e}$; $(\forall t > 0)$.	أ	1	III	0,50 ن
بين أن : $f(t) \leq \frac{1}{e}$; $(\forall t \geq 0)$.	ب			0,25 ن
استنتج أن : $F(x) < x$; $(\forall x > 0)$.	ج			0,25 ن
نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_{n+1} = F(u_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_0 \in]0,1[$				
بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \in]0,1[$.	أ	2		0,50 ن
بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة .	ب			0,50 ن
حدد النهاية التالية : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$.	ج			0,50 ن

التمرين الخامس : (2,0 ن)

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\left(\frac{1}{x}\right)}$; $\forall x > 0$ $g(0) = 0$			
بين أن الدالة g متصلة على المجال $]0, +\infty[$.	أ	1	0,25 ن
بين أن الدالة g متصلة على يمين الصفر .	ب		0,25 ن
بين أن الدالة g غير متصلة في الصفر .	ج		0,25 ن

لكل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$ نضع : $L(x) = \int_0^x g(t) dt$.

أحسب $L(x)$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$. أ 2 0,25 ن

بين أن الدالة L متصلة على المجال $]0, +\infty[$. ب 0,25 ن

أحسب النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x)$ ج 0,25 ن

نقبل في هذا السؤال أن g متصلة على المجال $]0, +\infty[$.
و لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر أو يساوي 1 نضع :

$$S_n = n \left(\left(\frac{1}{1} \right)^2 e^{-n} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 e^{-\frac{n}{2}} + \left(\frac{1}{3} \right)^2 e^{-\frac{n}{3}} + \dots + \left(\frac{1}{n-1} \right)^2 e^{-\left(\frac{n}{n-1} \right)} \right)$$

بين أن : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$; $(\forall n \geq 1)$ أ 3 0,25 ن

استنتج أن المتتالية $(S_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها . ب 0,25 ن



التمرين الأول: (2,0 ن)

- نعتبر ثلاثة صناديق U و V و W . يحتوي الصندوق W على كرة سوداء و كرتين بيضاوين .
و يحتوي كل صندوق من الصناديق U و V على كرتين سوداوين و كرتين بيضاوين .
ننجز التجربة العشوائية التالية : " نسحب كرة من الصندوق W ، إذا كانت هذه الكرة بيضاء
نضعها في الصندوق U ثم نسحب منه تانيا كرتين . أما إذا كانت هذه الكرة سوداء فنضعها في
الصندوق V ثم نسحب منه تانيا كرتين .
ما هو احتمال أن يتم السحب من الصندوق U ؟ 1 0,25
ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة ؟ 2 0,75
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المحصل عليها في نهاية التجربة .
حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X . 3 1,00

التمرين الثاني: (1,0 ن)

- ليكن n عددا طبيعيا غير منعدم . نضع $b_n = 2 \cdot 10^n + 1$ و $c_n = 2 \cdot 10^n - 1$.
بين أن : $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$ ثم استنتج أن c_n و b_n أوليان فيما بينهما 1 0,50
أوجد زوجاً (x_n, y_n) من \mathbb{Z}^2 يحقق $b_n x_n + c_n y_n = 1$. 2 0,50

التمرين الثالث: (3,75 ن)

- نضع $J =]-1; 1[$.
لكل عنصرين a و b من المجال J نضع : $a * b = \frac{a+b}{1+ab}$
تحقق أن : $\forall (a, b) \in J^2 ; 1 + ab > 0$. ثم استنتج أن $*$ قانون تركيب داخلي في J .
بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي . 1 0,75
بين أن المجموعة $(J, *)$ تقبل عنصرا محايدا و جب تحديده . 2 0,50
بين أن $(J, *)$ زمرة تبادلية . 3 0,25
نعتبر التطبيق f المعرف على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
بين أن الدالة f تقابل من \mathbb{R} نحو J . 1 0,75
ليكن g التقابل العكسي للتطبيق f (تحديد g غير مطلوب)
لكل x و y من J نضع : $x \perp y = f(g(x) \times g(y))$.
بين أن f تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (J^*, \perp) . حيث : $J^* = J - \{0\}$. 2 0,50
نذكر أن (\mathbb{R}^*, \times) زمرة تبادلية و نقبل أن \perp توزيعي بالنسبة للقانون $*$ في J .
بين أن $(J, *, \perp)$ جسم تبادلي . 3 0,50

التمرين الرابع: (7,25 ن)

- حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة $z^2 + i = 0$. ليكن a الحل الذي يحقق $Re(a) > 0$.
حدد معيار و عمدة العدد العقدي $1 + a$. 1 0,50
استنتج أن : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. 2 0,50
تحقق أن : $(1 + a)(1 - a) = 1 + i$ ثم استنتج الشكل المثلثي للعدد $(1 - a)$. 3 0,25
 4 0,50

في المستوى العقدي المنسوب إلى M م م م م (O, \vec{u}, \vec{v}) . نعتبر النقط A و B و M و M'

التي أحاقها على التوالي a و $-a$ و z و z' . و نفترض أن $zz' + i = 0$.

لتكن N النقطة التي لحقها هو \bar{z} مرافق z . بين أن: $(OM') \perp (ON)$. 1 ن 0,25

بين أن: $z' - a = i \left(\frac{z-a}{az} \right)$. 2 ن 0,25

بين أنه إذا كان $z \neq -a$ فإن $z' \neq -a$. و بين أن: $\left(\frac{z'-a}{z'+a} \right) = - \left(\frac{z-a}{z+a} \right)$. ب ن 0,50

نفترض أن A و B و M غير مستقيمية. بين أن M' تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث ABM . 3 ن 0,50

التمرين الخامس: (7,5 ن)

لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي: $f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في م م م م (O, \vec{i}, \vec{j}) . بحيث: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$.

أحسب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما. 1 ن 1,00

أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0; +\infty[$ ثم استنتج تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$. 2 ن 0,75

لكل n من \mathbb{N}^* نعتبر الدالة g_n المعرفة على $]0; 1[$ بما يلي: $g_n(x) = f(x) - x^n$

بين أن الدالة g_n تناقصية قطعاً على المجال $]0; 1[$. أ 3 ن 0,50

استنتج أنه لكل n من \mathbb{N}^* لدينا: $f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$; $\exists! \alpha_n \in]0; 1[$. ب ن 0,50

بين أن لكل n من \mathbb{N}^* لدينا: $g_n(\alpha_{n+1}) < 0$. ج ن 0,50

بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ تزايدية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة. نضع $l = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)$

تحقق أن: $0 < \alpha_1 \leq l \leq 1$. أ 4 ن 0,25

تحقق أن: $h(\alpha_n) = n$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; حيث: $h(x) = \frac{-1}{2} + \frac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$. ب ن 0,25

بين أن $l = 1$. ج ن 0,25

استنتج أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^n = 0$. د ن 0,25

أدرس إشارة التكامل $\int_x^1 f(t) dt$ لكل x من \mathbb{R}_+^* . أ 1 ن 0,25

باستعمال الكاملة بالأجزاء بين أن: $\int_x^1 f(t) dt = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$; $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$. ب ن 0,50

استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمت التي معادلاتها على التوالي هي: $x = 1$ و $x = e^2$ و $y = 0$. ج ن 0,50

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

بين أنه لكل عددين صحيحين طبيعيين n و k بحيث $n \geq 2$ و $1 \leq k \leq n-1$. أ 2 ن 0,50

لدينا: $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

بين أن: $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$. ب ن 0,50

استنتج أن: $\lim(u_n) = 4$. ج ن 0,25

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي: $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 (e^{-t^2}) dt$.

لكل x من \mathbb{R} نضع: $k(x) = \int_1^x (e^{-t^2}) dt$

تحقق أنه لكل x من $]0; +\infty[$ لدينا: $g(x) = -k(\sqrt{x})$. أ 1 ن 0,25

بين أن الدالة g متصلة على المجال $]0; +\infty[$ و قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$. ب ن 0,50

أحسب $g'(x)$ لكل x من $]0; +\infty[$ ثم استنتج أن g تناقصية قطعاً على المجال $]0; +\infty[$. ج ن 0,50

بين أن: $\frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-1}{2\sqrt{x}} e^{-x}$; $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$. أ 2 ن 0,75

استنتج أن g قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر و اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها. ب ن 0,50



التمرين الأول: (3,0 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة و $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

نضع : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

و نعتبر المجموعة التالية : $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & 3b \\ b & a-b \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي جزئي من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ 1 0,50 ن

بين أن (I, J) أساس للفضاء المتجهي E . 2 0,50 ن

بين أن $J^2 \in E$ و استنتج أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ 3 0,50 ن

بين أن $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية و واحدة . 4 0,75 ن

بين أن العنصر $M(a, b)$ قاسم للصفر في E إذا و فقط إذا كان $a^2 - 4b^2 = 0$. 5 0,75 ن

التمرين الثاني: (3,5 ن)

ليكن a عددا عقديا . و نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية :

$(E) : z^2 - az + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = 0$

ليكن z_0 و z_1 حلي المعادلة (E) .

بين أن : $|z_0| \cdot |z_1| = 1$. و أن : $\arg(z_0) + \arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ 1 0,50 ن

نضع $z_0 = e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$. بين أن : $a = 2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{i\pi}{6}}$ 2 0,50 ن

استنتج أنه إذا كان $z_0 = i$ فإن : $1 + ia - a^2 - ia^3 + a^4 + ia^5 = 0$ 3 0,50 ن

نفترض في هذا السؤال أن $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

أكتب العدد z_1 على شكله المثلثي و الجبري . ثم استنتج قيمتي $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 4 0,75 ن

أكتب العدد a على شكله المثلثي و الجبري . 5 0,50 ن

نعتبر التحويل R الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث $z' = iz + \sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{6}}$.

و نعتبر النقط $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ حيث $a = e^{\frac{i\pi}{12}}$ و $b = e^{\frac{i\pi}{4}}$ و $C = R(B)$.

بين أن R دوران محدد مركزه و زاويته . 6 0,50 ن

تحقق أن : $(c - a) = i(b - a)$. 7 0,25 ن

نضع $R(C) = D$. بين أن A منتصف القطعة $[BD]$. 8 0,50 ن

التمرين الثالث: (3,0 ن)

بين أن مجموعة حلول المعادلة $27x - 31y = 1$ في \mathbb{Z}^2 9 1,00 ن

هي $\{(31k - 8; 27k - 7) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

نعتبر المجموعة التالية : $E = \{0, 1, 2, \dots, 30\}$.

حدد العدد الوحيد a من E الذي يحقق $27a \equiv 1 [31]$ 10 0,50 ن

ليكن f التطبيق من E نحو E الذي يربط كل عنصر n من E بباقي قسمة العدد $(27n + 4)$

على 31 .

- بين أن f تطبيق تبايني من E نحو E . 2 ن 0,50
- بين أن f تطبيق شمولي من E نحو E . ب ن 0,50
- استنتج أن f تقابل و حدد تقابلة العكسي f^{-1} . ج ن 0,50

التمرين الرابع : (10 ن)

الجزء الأول : لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[-1, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} ; x \in]-1,0[\cup]0; +\infty[\\ f(-1) \text{ et } f(0) = e \end{cases}$$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في \mathbb{M} م م م (O, \vec{i}, \vec{j}) .

بين أن : $\forall x \in]-1,0[\cup]0; +\infty[; f(x) = e^{\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}}$ 1 ن 0,25

أدرس اتصال الدالة f في الصفر و على يمين العدد -1 . ب ن 0,50

أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 2 ن 0,50

بين أن : $\forall x \in]-1,0[\cup]0; +\infty[; f(x) - x = x \left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - 1 \right) + e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$ ب ن 0,25

استنتج الفرع النهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$. ج ن 0,50

بين أن : $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \right) = +\infty$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها . 3 ن 0,50

بين أن : $\forall x \in \left[\frac{-1}{2}, +\infty \right[; \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t} \right) dt = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ 4 ن 0,50

بين أن : $\forall t \in \left[\frac{-1}{2}, +\infty \right[; \frac{t^2}{1+t} \leq 2t^2$ ب ن 0,25

بين أن : $\forall x \in \left[\frac{-1}{2}, +\infty \right[; \left| \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t} \right) dt \right| \leq \frac{2}{3}|x|^3$ ج ن 0,50

استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \right) = \frac{-1}{2}$ د ن 0,25

استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر و أن : $f'(0) = \frac{e}{2}$ ه ن 0,50

أدرس تغيرات الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x) = x - \ln(1+x)$ 5 ن 0,25

و استنتج أن : $(\forall x > -1) ; g(x) \geq 0$.

بين أن : $\forall x \in]-1,0[\cup]0; +\infty[; f'(x) = \frac{(x+1)g(x)}{x^2} e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$ ب ن 0,50

ضع جدول تغيرات الدالة f . ج ن 0,25

أنشئ المنحنى (C_f) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) . 6 ن 1,00

$F(x) = \int_0^1 f(xt) dt$: بما يلي المجال $[0, +\infty[$ معرف على الدالة F <u>الجزء الثاني</u> :	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
. $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $f(x) \geq x$: بين أن	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
استنتج أن : $(\forall x \geq 0)$; $F(x) \geq \frac{x}{2}$	<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
أحسب النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$	<input type="checkbox"/>	ج	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
$\forall x \in]0, +\infty[$; $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$: بين أن	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
. بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$	<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
ثم بين أن : $\forall x \in]0, +\infty[$; $F'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - F(x))$	<input type="checkbox"/>	ج	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
$\forall x \in [0; +\infty[$; $e \leq F(x) \leq f(x)$: بين أن	<input type="checkbox"/>	د	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
. استنتج أن الدالة F تزايدية على \mathbb{R}_*^+	<input type="checkbox"/>	ج	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
$u_n = \int_0^1 f\left(\frac{t}{n}\right) dt$: بما يلي المجال $(u_n)_{n \geq 1}$ المتتالية <u>الجزء الثالث</u> :	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
. بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تناقصية	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n \geq e$	<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = n \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt$: بين أن	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$	<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
أحسب النهاية التالية : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$	<input type="checkbox"/>	ج	<input type="checkbox"/>	0,25 ن



التمرين الأول: (2,0 ن)

$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $\frac{t^3 + t}{t + 1} = t^2 - t + 2 - \frac{2}{t + 1}$: تحقق أن **1** ن 0,25

$I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x}{1 + \sqrt{x} - 1} dx$: أحسب التكامل التالي **ب** ن 1,00

$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+k}{\sqrt{n} + \sqrt{k}} \right)$: نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي **2** ن 0,75
بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة و احسب نهايتها .

التمرين الثاني: (2,75 ن)

ليكن x عنصرا من المجال $]0, +\infty[$. و نعتبر المعادلتين التفاضليتين التاليتين :

$$\begin{cases} (E) : y'' + 2y' + 2y = (x + 1)^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} \\ (F) : y'' + 2y' + 2y = 0 \end{cases}$$

حل المعادلة التفاضلية (F) . **1** ن 0,75
نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}_+^* بما يلي : $f(x) = \int_1^x (t \ln t) dt$

بين أن الدالة f حل خاص للمعادلة التفاضلية (E) . **2** ن 1,00
لتكن y دالة عددية معرفة على \mathbb{R}_+^* ، بين أن الدالة y تكون حلا للمعادلة التفاضلية (E) **ب** ن 0,50

إذا و فقط إذا كانت الدالة $(y - f)$ حلا للمعادلة (F) .
استنتج صيغة الحل العام للمعادلة (E) . **ج** ن 0,50

التمرين الثالث: (5,5 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[1, 2]$ بما يلي : $f(x) = \text{Arctan}(\sqrt{x + 2})$

أحسب $f'(x)$ لكل x من $[1, 2]$. ثم حدد منحنى تغيرات الدالة f على $[1; 2]$ **1** ن 0,50

تحقق أن : $\forall x \in [1; 2]$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$ **ب** ن 0,50

بين أن : $\forall x \in [1; 2]$; $\text{Arctan}(x) \leq x$ **ج** ن 0,50

استنتج أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1; 2]$. **د** ن 1,00

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$

بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in [\alpha, 2]$ **2** ن 0,50

بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية . **ب** ن 0,50

بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}} |u_n - \alpha|$ **ج** ن 1,00

بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و احسب نهايتها . **د** ن 1,00

التمرين الرابع : (5,0 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} e^{-t^2}\right) dt ; \forall x > 0 \\ f(0) = \ln 2 \end{cases}$$

- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x + 1 \leq e^x$ **1** ن 0,50
- استنتج أن : $(\forall t > 0) ; \frac{1}{t} - t \leq \frac{1}{t} e^{-t^2} \leq \frac{1}{t}$ **ب** ن 0,50
- بين أن : $(\forall x > 0) ; \ln 2 - \frac{3}{2}x^2 \leq f(x) \leq \ln 2$ **ج** ن 0,50
- أدرس اتصال و قابلية اشتقاق الدالة f على يمين الصفر . ثم حدد $f'_d(0)$. **د** ن 0,50
- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$. **2** ن 1,00
- ثم بين أن : $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{e^{-4x^2}}{x} (1 - e^{3x^2})$ **ب** ن 0,50
- ضع جدول تغيرات الدالة f . (نقبل أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$) **ب** ن 0,50
- بين أن الدالة f تقابل من المجال $[0; +\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده . **3** ن 0,50
- أنشئ (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ المنحنيين الممثلين على التوالي للدالتين f و f^{-1} **ب** ن 1,00
- في م م م (O, \vec{i}, \vec{j}) . حيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$.

التمرين الخامس : (4,75 ن)

- نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة (E) التالية :
- $$(E) : z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = 0$$
- بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 . **1** ن 0,50
- حدد الحلين z_1 و z_2 الآخرين للمعادلة (E) بحيث $\Im m(z_1) > 0$. **ب** ن 1,00
- حدد في المجموعة \mathbb{N} الأعداد n التي من أجلها يكون العدد $(z_1 - z_0)^n$ عددا حقيقيا سالبا . **ج** ن 0,75
- في المستوى العقدي (\mathcal{P}) المنسوب إلى م م م (O, \vec{u}, \vec{v}) ، نعتبر النقط $A(i)$ و $B(2 + 3i)$ و $C(2 - 3i)$. وليكن الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{4}$. **2** ن 0,50
- حدد لحق النقطة A' صورة A بالدوران r . **أ** ن 0,50
- بين أن النقط A' و B و C مستقيمية . **ب** ن 0,50
- حدد الصيغة العقدية للتحاكي h الذي مركزه B و يحول C إلى A' . **ج** ن 0,75
- تحقق أن : $(h^{-1} \circ r)(A) = C$ ثم حدد الصيغة العقدية للتطبيق $(h^{-1} \circ r)$. **د** ن 0,75



التمرين الأول: (5,1 ن)

نعتبر المجموعة التالية: $M = \left\{ A_n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\}$

- بين أن M مجموعة غير فارغة . **1** 0,25 ن
- بين أن M جزء مستقر في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$. **2** 0,25 ن
- حدد العنصر المحايد للضرب \times في M . **3** 0,25 ن
- هل \times تبادلي في M . **4** 0,25 ن
- أحسب $(A_m)^n$ لكل m و n من \mathbb{N} . واستنتج $(A_2)^3$. **5** 0,50 ن

التمرين الثاني: (5,3 ن)

المستوى العقدي (\mathcal{P}) منسوب إلى m, m, m م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. نعتبر A و B ذواتا اللحين a و 1

على التوالي حيث $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

لتكن f الدالة المعرفة على $(\mathcal{P}) \setminus \{B\}$ و التي تربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة

$z' = \frac{z-a}{z-1}$ حيث: $M'(z')$

بين أنه إذا كانت $M(z)$ صامدة بالتحويل f فإن z سوف يكون حلا للمعادلة (G) التالية: **1** 0,50 ن

$(G) : z^2 - 2z + a = 0$

نفترض أن $a = 1 + e^{i\theta}$ حيث $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

حدد على الشكل المثلي حلي المعادلة (G) . **2** 1,50 ن

في هذا السؤال نفترض أن $a = -1$. و لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى (\mathcal{P})

حيث $z \neq 1$ و $M'(z')$ هي صورة $M(z)$ بالتحويل f .

بين أن: $(\vec{e}_1, \overline{BM}) + (\vec{e}_1, \overline{BM'}) \equiv 0 [2\pi]$ **3** 0,50 ن

بين التكافؤ التالي: $z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$ **ب** 0,50 ن

اقترح طريقة لإنشاء النقطة M' صورة M من الدائرة المثلية المحرومة من النقطة B . **ج** 0,50 ن

التمرين الثالث: (5,2 ن)

الأسئلة (1 و 2 و 3 و 4) مستقلة فيما بينها .

بين أن لكل a من \mathbb{Z} لدينا: $a^2 \equiv 1 [3]$ أو $a^2 \equiv 0 [3]$ **1** 0,25 ن

استنتج أن: $a^2 + b^2 \equiv 0 [3] \Rightarrow a \equiv b \equiv 0 [3]$; $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$. **ب** 0,25 ن

لتكن x و y و z ثلاثة أعداد نسبية بحيث $x^2 + y^2 = 3z^2$

بين أن $x \equiv y \equiv 0 [3]$ و $3z^2 \equiv 0 [9]$ **2** 0,50 ن

استنتج أن: $x \equiv y \equiv z \equiv 0 [3]$ **ب** 0,25 ن

لكل m من \mathbb{N}^* نضع $a_m = m^2(m^2 - 1)$

بين أن: $a_m \equiv 0 [3]$ **3** 0,50 ن

بين أن: $a_m \equiv 0 [4]$ **ب** 0,50 ن

استنتج أن: $a_m \equiv 0 [12]$ **ج** 0,25 ن

الجزء الأول : لكل عدد حقيقي m نعتبر الدالة f_m المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f_m(x) = 2m e^x - e^{2x} - 2m$$

و ليكن (C_m) المنحنى الممثل للدالة f_m في المستوى المنسوب إلى m م م (O, \vec{i}, \vec{j}) .

حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$.

أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_m(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x)$ 1 ن 0,75

ليكن m و m' عدنان حقيقيان بحيث $m < m'$. أدرس الوضع النسبي لـ (C_m) و $(C_{m'})$ 2 ن 0,25

بين أن جميع المنحنيات $\{(C_m) ; m \in \mathbb{R}\}$ تمر من نقطة ثابتة A يتم تحديدها . 3 ن 0,50

بين أنه إذا كان $m \leq 0$ فإن f_m تناقصية قطعاً على \mathbb{R} . 4 ن 0,50

نفترض في هذا السؤال أن $m > 0$.

بين أن f_m تقبل طرفاً β_m عند النقطة α_m مع تحديد α_m و β_m . 5 ن 0,50

لتكن (Γ) مجموعة النقط $I_m(\alpha_m, \beta_m)$ عندما يتغير m في \mathbb{R}_+^* .

بين أن (Γ) هو المنحنى الممثل للدالة g التالية : $g(x) = e^{2x} - 2e^x$; $(\forall x \in \mathbb{R})$ ب ن 0,50

تحقق أن : $g(x) = -2 - f_1(x)$; $(\forall x \in \mathbb{R})$. ج ن 0,75

و استنتج أن (Γ) و (C_1) متماثلان بالنسبة للمستقيم $y = -1$: (D) .

حدد تقاطع المنحنى (C_2) و المستقيم (D) . 6 ن 0,25

أنشئ في نفس المعلم المنحنيات (C_1) و (C_2) و (C_{-1}) و (Γ) . 7 ن 0,50

أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز من المستوى المحصور المحصور بين (C_2) و (D) 8 ن 0,50

و المستقيمين ذوا المعادلتين $x = 0$ و $x = \ln 3$.

الجزء الثاني :

بين أن : $0 < \frac{g(x) + 1}{x} < g'(x)$; $(\forall x > 0)$ 1 ن 0,50

استنتج أن : $x g'(x) - g(x) > 1$; $(\forall x > 0)$ 2 ن 0,25

استنتج أن الدالة $x \rightarrow \frac{g(x)}{x}$ تزايدية قطعاً على \mathbb{R}_+^* . 3 ن 0,25

لتكن G الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي : $G(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{g(t)}{t}\right) dt$; $\forall x > 0$
 $G(0) = -\ln 2$

باستعمال السؤال (1) من الجزء الثاني، بين أن : 4 ن 0,50

$$(\forall x > 0) ; 0 < G(x) + \ln 2 \leq g(2x) - g(x)$$

استنتج أن G متصلة و قابلة للاشتقاق على يمين الصفر . ب ن 0,25

بين أن : $G(x) \geq g(x) \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t}\right) dt$; $(\forall x > 0)$ و استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$ 5 ن 0,50

بين أن الدالة G قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* . 6 ن 0,75

و بين أن : $G'(x) = \frac{g(2x) - g(x)}{x}$; $(\forall x > 0)$

إعط جدول تغيرات الدالة G . 7 ن 0,25



التمرين الأول: (3,0 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 ،

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

و صفرها $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. نعتبر المجموعة التالية :

$$E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; a^2 + b^2 = 1 \text{ et } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

تحقق أن : $M(a, b) \times M(c, d) = M(ac - bd ; ad + bc)$ **1** 0,25 ن

بين أن E جزء مستقر من المجموعة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$. **ب** 0,50 ن

لتكن U مجموعة الأعداد العقدية التي معيارها 1 . و نذكر أن (U, \times) زمرة تبادلية .

و ليكن f التطبيق المعرف من U نحو E بما يلي : $f(a + ib) = M(a, b)$

بين أن f تشاكل تقابلي من (U, \times) نحو (E, \times) . **2** 0,50 ن

استنتج أن (E, \times) زمرة تبادلية . **ب** 0,50 ن

نضع : $A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$ و $A^1 = A$ و نضع : $A^{n+1} = A^n \times A$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

أكتب A^n بدلالة n . **3** 0,50 ن

حل في المجموعة E المعادلة $X^4 = A$. **4** 0,75 ن

التمرين الثاني: (4,0 ن)

ليكن $a \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ و نعتبر في \mathbb{C} المعادلة التالية :

$$(E) : iz^2 + (1 - i)(1 + ia)z + (a^2 - 1) = 0$$

تحقق أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta = -2i(a + i)^2$. **1** 0,50 ن

استنتج أن حلي المعادلة (E) هما u و v بحيث $u = i(1 + a)$ و $v = 1 - a$ **ب** 0,50 ن

في المستوى العقدي المنسوب إلى M م م م م (O, \vec{u}, \vec{v}) ، نعتبر النقط $A(ia)$ و $B(u)$

$$\omega = \frac{u^2 + a}{1 - i} \text{ و } C(v) \text{ و } D(v^2) \text{ و } E(\omega)$$

حدد مجموعة النقط $M(a)$ بحيث تكون O و B و C نقط مستقيمة . **2** 0,75 ن

بين أن C هي صورة A بدوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ و حدد مركزه . **ب** 0,50 ن

فيما يلي نفترض أن $|a| = 1$ و $a^2 + (2 + i)a + 1 \neq 0$.

بين أن $A \neq D$ و $A \neq E$ و $D \neq E$. **3** 0,75 ن

بين أن ADE مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في النقطة E . **ب** 0,50 ن

بين أن O و A و D و E نقط متداورة . **ج** 0,50 ن

التمرين الثالث : (2,5 ن)



$$\begin{cases} a_{n+1} = 1 + (a_n - 1)^2 ; \forall n \geq 0 \\ a_0 = 17 \end{cases}$$

نعتبر المتتالية $(a_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي :

- | | | | | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-----|--------------------------|--------|
| بين أن : $a_n \in \mathbb{N}^*$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | 0,25 ن |
| بين أن : $a_n \equiv 7 [10]$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 2 | <input type="checkbox"/> | 0,50 ن |
| بين أن : $a_n = 2^{2^{n+2}} + 1$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | أ 3 | <input type="checkbox"/> | 0,50 ن |
| استنتج أن : $a_{n+4} = (a_n - 1)^{16} + 1$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ب 4 | <input type="checkbox"/> | 0,25 ن |
| بين أن : $36^{16} \equiv 36 [100]$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | أ 4 | <input type="checkbox"/> | 0,50 ن |
| استنتج أن : $a_{4n+2} \equiv 37 [100]$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ب 4 | <input type="checkbox"/> | 0,50 ن |

التمرين الرابع : (9,5 ن)



الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x - x \ln x ; \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- | | | | | | | |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-----|--------------------------|--------|
| بين أن الدالة f متصلة على المجال $]0; +\infty[$ و متصلة على يمين الصفر .
فيما يلي نقبل أن f متصلة على المجال $]0; +\infty[$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | أ 1 | <input type="checkbox"/> | 0,50 ن |
| إعط جدول إشارة $f(x)$ على $]0; +\infty[$.
أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في الصفر . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ب 2 | <input type="checkbox"/> | 0,50 ن |
| بين أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$. ثم احسب $f'(x)$ لكل x من $]0; +\infty[$.
إعط جدول تغيرات الدالة f . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ب 3 | <input type="checkbox"/> | 0,50 ن |
| نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \frac{e^{n-1}}{n^n}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$
تحقق أن : $u_n = e^{(f(n)-1)}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | أ 4 | <input type="checkbox"/> | 0,25 ن |
| بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تناقصية قطعاً و بين أن $\lim(u_n) = 0$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ب 5 | <input type="checkbox"/> | 0,75 ن |
| ليكن n عنصراً من \mathbb{N}^* . بين أن المعادلة $f(x) = u_n$ تقبل حلاً وحيداً v_n في المجال $[1, e]$
بين أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ب 6 | <input type="checkbox"/> | 0,75 ن |
| الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $]0; +\infty[$: $F(x) = \int_1^x f(t) dt$
و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة F في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | II | <input type="checkbox"/> | |
| بين أن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$. و احسب $F'(x)$ لكل x من $]0; +\infty[$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | 0,50 ن |
| بين أن : $F(x) = \frac{3}{4}(x^2 - 1) - \left(\frac{x^2}{2}\right) \ln x$; $\forall x \in]0; +\infty[$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | أ 2 | <input type="checkbox"/> | 0,75 ن |
| استنتج أن : $F(0) = \frac{-3}{4}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ب 3 | <input type="checkbox"/> | 0,50 ن |
| إعط جدول تغيرات الدالة F .
بين أن المعادلة $F(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0; +\infty[$. و أن $4 < \alpha < 5$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ب 4 | <input type="checkbox"/> | 0,75 ن |
| أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.
أدرس تقعر المنحنى (C) و حدد نقطة انعطافه . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | أ 4 | <input type="checkbox"/> | 0,50 ن |
| أرسم المنحنى (C) و المماس له عند نقطة الانعطاف . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ب 5 | <input type="checkbox"/> | 0,50 ن |



التمرين الأول: (3,0 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة ، و نعتبر المجموعة G المعرفة بما يلي :

$$G = \left\{ M_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

بين أن G جزء مستقر بالنسبة لضرب المصفوفات في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ **1** 0,50 ن

نعتبر المجموعة : $U = \{ z \in \mathbb{C} ; |z| = 1 \}$

بين أن (U, \times) زمرة جزئية للزمرة (\mathbb{C}^*, \times) . **2** 0,75 ن

نعتبر التطبيق φ المعرف من U نحو G بما يلي : $\varphi(e^{i\theta}) = M_\theta$

بين أن φ تشاكل تقابلي من (U, \times) نحو (G, \times) . **3** 0,75 ن

إستنتج أن (G, \times) زمرة تبادلية . **ب** 0,50 ن

أحسب $(M_\theta)^{-1}$ و $(M_\theta)^n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$ **4** 0,50 ن

التمرين الثاني: (4,0 ن)

المستوى منسوب إلى م م م م (O, \vec{u}, \vec{v}) . و لكل z من $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ نضع $\varphi(z) = i \left(\frac{z-2i}{z-i} \right)$ نعتبر النقطتين A و B ذواتا اللحين $z_A = 2i$ و $z_B = i$ على التوالي

و لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي .

بين أن : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} ; |\varphi(z)| = \frac{AM}{BM}$ **1** 0,25 ن

بين أن : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i, 2i\} ; \arg(\varphi(z)) \equiv \left(\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM} \right) + \frac{\pi}{2} \right) [2\pi]$ **ب** 0,25 ن

حدد طبيعة كل من المجموعتين E و F المعرفتين بما يلي :

$F = \{ M(z) ; \varphi(z) \in i\mathbb{R} \}$ و $E = \{ M(z) ; |\varphi(z)| = 1 \}$ **2** 0,50 ن

بين أن : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} ; \arg(\varphi(z) - i) \equiv -\arg(z - i) [2\pi]$ **1** 0,50 ن

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} ; \arg(\varphi(z) - i) \equiv -\arg(z - i) [2\pi] \\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} ; |\varphi(z) - i| = \frac{1}{|z - i|} \end{array} \right.$$

بين أنه إذا كانت النقطة $M(z)$ تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها B و شعاعها $\frac{1}{2}$ **2** 0,25 ن

فإن النقطة $M'(\varphi(z))$ تنتمي إلى دائرة يتم تحديدها .

أنشئ النقطة M' انطلاقا من النقطة M . **3** 0,25 ن

حل في \mathbb{C} المعادلة $\varphi(z) = z$. ليكن u و v الحلين حيث $\text{Re}(u) = 1$. **1** 0,50 ن

ليكن $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, u, v\}$ و نعتبر النقط $M(z)$ و $M'(\varphi(z))$ و $C(u)$ و $D(v)$.

بين أن : $\left(\frac{\varphi(z) - u}{\varphi(z) - v} \right) = - \left(\frac{z - u}{z - v} \right)$ **2** 0,25 ن

استنتج أن : $\left(\overrightarrow{M'D}, \overrightarrow{M'C} \right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MC} \right) [2\pi]$ **ب** 0,25 ن

بين أنه إذا كانت النقط M و C و D مستقيمية فإن النقط M' و M و C و D مستقيمية كذلك . **ج** 0,50 ن

و إذا كانت النقط M و C و D غير مستقيمية فإن النقط M' و M و C و D متداورة .

ضع $z = i + e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$
 حدد معيار و عمدة العدد العقدي $\varphi(z)$ بدلالة θ **3** 0,50 ن

التمرين الثالث : (2,0 ن)

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) التالية : $3x - 5y = 13$
 حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة E . **1** 0,50 ن
 حدد الحلول (x, y) للمعادلة (E) التي تحقق $\frac{x}{y} \in E$ **2** 0,50 ن
 بين أن لكل k من \mathbb{Z} لدينا : $(5k + 1) \wedge (3k - 2) = (k - 5) \wedge 13$ **3** 0,50 ن
 حل في \mathbb{Z}^2 النظام التالية : $\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ x \wedge y = 13 \end{cases}$ **4** 0,50 ن

التمرين الرابع : (4,0 ن)

لتكن φ الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي : $\varphi(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$
 أدرس قابلية اشتقاق الدالة φ على يمين الصفر . ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها . **1** 0,50 ن
 أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ و ادرس تغيرات الدالة φ . **2** 0,50 ن
 لنحل في \mathbb{R}^+ المعادلة (E) : $\varphi(x) = x$
 من أجل ذلك نعتبر الدالة العددية ψ المعرفة على \mathbb{R}_+^* بما يلي : $\psi(x) = \ln x + 2x$
 بين التكافؤ التالي : $\varphi(x) = x \Leftrightarrow \psi(x) = 0$; $(\forall x > 0)$ **3** 0,50 ن
 بين أن المعادلة $\psi(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R}_+^* . وأن α ينتمي إلى $I = \left] \frac{2}{5}, \frac{1}{2} \right[$ **ب** 0,75 ن
 بين أن $\varphi(I) \subset I$ ثم بين أن : $(\forall x \in I) ; |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{8}$ **ج** 0,50 ن
 لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = \varphi(u_n) \\ u_0 \in I \end{cases}$
 بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in I$ **4** 0,50 ن
 ثم بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{8} |u_n - \alpha|$
 استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{8}\right)^n |u_0 - \alpha|$ **ب** 0,50 ن
 ثم احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 حدد أصغر عدد صحيح طبيعي n بحيث يكون لدينا $|u_n - \alpha| < 10^{-4}$ **ج** 0,25 ن

التمرين الخامس : (7,0 ن)

الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي : **ا**
 $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x - \ln x} ; \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
 بين أن : $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*) ; \ln t \leq t - 1$ **1** 0,25 ن
 بين أن f متصلة على يمين الصفر . **2** 0,25 ن
 أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين الصفر ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها . **ب** 0,50 ن
 أحسب النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **ج** 0,25 ن
 أدرس تغيرات الدالة f على \mathbb{R}^+ **3** 0,25 ن
 ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$.
 أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفضول 1 . **4** 0,25 ن
 أرسم في نفس المعلم المستقيم (T) و المنحنى (C_f) . **ب** 0,50 ن

ليكن x عددا حقيقيا حيث $x \geq 1$. ونعتبر المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي :

$$(\forall n \geq 1) ; v_n = 1 + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^1 + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n$$

بين أن $(v_n)_{n \geq 1}$ متتالية متقاربة و حدد نهايتها . **5** 0,50 ن

الجزء الثاني : لتكن F الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}_+^* بما يلي : $F(x) = \int_1^x \left(\frac{t}{t - \ln t}\right) dt$ **II**

أدرس منحى تغيرات الدالة F . **1** 0,50 ن

حدد إشارة $F(x)$ تبعا لقيم المتغير الحقيقي x . **2** 0,50 ن

بين أن : $\forall x \in]0,1[; 0 \leq \frac{x}{x - \ln x} \leq x$ **3** 0,50 ن

استنتج أن : $\forall x \in]0,1[; \frac{x^2 - 1}{2} \leq F(x) \leq 0$ **ب** 0,25 ن

ثم استنتج أن : $\frac{-1}{2} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \leq 0$

بين أن : $f(x) \geq 1 ; \forall x \in [1, +\infty[$ ثم استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ **4** 0,50 ن

ليكن $x > 0$ أحسب التكاملين : $\int_1^x (1 + \ln t) dt$ و $\int_1^x \left(1 + \frac{\ln t}{t}\right) dt$ **5** 0,50 ن

بين أن : $\frac{t}{t - \ln t} \leq 1 + \ln t ; t \geq 1 ; (\forall t \in \mathbb{R}_+^*)$ **ب** 0,25 ن

استنتج أن : $F(x) \leq x \ln x ; \forall x \in [1; +\infty[$. **ج** 0,25 ن

بين أن : $x + \frac{(\ln x)^2}{2} - 1 \leq F(x) ; (\forall x \in [1; +\infty[)$ **د** 0,50 ن

اعط تأويلا هندسيا للتكامل $\int_1^e \left(\frac{t}{t - \ln t}\right) dt$ **و** 0,25 ن



التمرين الأول: (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى م م م م م (O, \vec{u}, \vec{v}) . ليكن a عددا عقديا و نعتبر في \mathbb{C} المعادلة

$$(E) : z^2 - az + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) . و نعتبر النقط التالية: $A(a)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

بين أن: $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. و أن: $|z_1| \cdot |z_2| = 1$. 0,75 ن

نضع $z_1 = e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي.

استنتج بدلالة θ الشكل المثلثي للعدد العقدي z_2 . 1 0,75 ن

بين أن: $a = 2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{i\pi}{6}}$ 0,50 ن

نفترض في هذا السؤال أن: $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$. و نعتبر في المستوى التحويل F

$$f(z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)z$$

المرتبطة بالتطبيق f المعرف من \mathbb{C} نحو \mathbb{C} بما يلي: حدد طبيعة و عناصر التحويل F . 2 0,50 ن

بين أن: $F(M_1) = M_2$. 0,50 ن

استنتج طبيعة الرباعي OM_1AM_2 . 0,50 ن

التمرين الثاني: (3,0 ن)

بين أن العدد 251 قاسم أولى للعدد 2008. 1 0,25 ن

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة $(E) : 2008x + 120y = 8$.

بين أن المعادلة (E) قابلة للحل في \mathbb{Z}^2 . 2 0,25 ن

حل في \mathbb{C} المعادلة (E) . 0,75 ن

نضع: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \underbrace{888 \dots 88}_{n \text{ fois}}$

بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{8}{9}(10^n - 1)$ 3 0,50 ن

بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \equiv 0 [2008] \Leftrightarrow 10^n \equiv 1 [251]$ 0,50 ن

بين أن: $(\forall k \in \mathbb{N}) ; 10^k \equiv 1 [251]$ 0,50 ن

استنتج أن العدد 2008 يقبل مضاعفا يكتب في نظمة العد العشري بالرقم 8 فقط. 0,25 ن

التمرين الثالث: (3,5 ن)

لتكن $M_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ونعتبر المجموعة E المعرفة بـ: $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} ; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

بين أن $(E, +)$ زمرة تبادلية. 1 0,50 ن

بين أن (E, \times) جزء مستقر من المجموعة $(M_2(\mathbb{R}), \times)$. 2 0,50 ن

بين أن $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية و واحدة. 3 0,50 ن

نعتبر التطبيق f المعرف من E نحو \mathbb{C} بما يلي: $f(M(a,b)) = a + b + ib$

بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من (E, \times) نحو (\mathbb{C}, \times) . 4 0,50 ن

بين أن كل مصفوفة $M(a,b)$ من $E^* = E - \{0\}$ تقبل مقلوبا في E^* و حدده . 0,50 ن

استنتج البنية الجبرية للمجموعة $(E, +, \times)$. 0,50 ن

بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; (M(0,1))^n = M\left(-2^{\frac{n+1}{2}} \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right) ; 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$ 0,50 ن

التمرين الرابع : (10 ن)

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $\varphi(x) = (2-x)e^x - 2$ I

أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ 1 I 0,50 ن

أدرس تغيرات الدالة φ ثم ضع جدول تغيراتها . 2 0,50 ن

بين أن $\varphi(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى $[1; +\infty[$ و أن $1,59 < \alpha < 1,60$. 3 0,50 ن

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $\forall x \neq 0 ; f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$; $f(0) = 0$ II

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في م م م (O, \vec{i}, \vec{j}) . حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$. 1 II 0,25 ن

أدرس اتصال الدالة f في الصفر .

بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ثم احسب النهاية التالية $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 2 0,50 ن

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في الصفر . 3 0,25 ن

بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* . و أن : $f'(x) = \frac{x \varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$ B 0,75 ن

بين أن : $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f . C 0,50 ن

أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) 4 0,25 ن

أنشئ المنحنى (C_f) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) . 5 0,50 ن

لكل x من \mathbb{R}^+ نضع : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ و $G(x) = \int_0^x (t^2 e^{-t}) dt$ III

أحسب $G(x)$ ثم احسب النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ 1 III 0,50 ن

بين أن الدالة F تزايدية على \mathbb{R}^+ . 2 0,25 ن

بين أن : $\forall t \in [\ln 2 ; +\infty[; f(t) \leq 2 t^2 e^{-t}$ 3 0,25 ن

استنتج أن الدالة F مكبورة على \mathbb{R}^+ . B 0,50 ن

نقبل أن الدالة F تقبل نهاية عند $+\infty$ و نضع : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L \in \mathbb{R}$

بين أن : $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} + \sum_{p=1}^{p=n} e^{-px}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , (\forall x \in \mathbb{R}^*)$ 1 IV 0,75 ن

بين أن : $0 \leq \int_0^x f(t) e^{-nt} dt \leq \frac{\alpha(2 - \alpha)}{n}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , (\forall x \in \mathbb{R}^+)$ B 0,50 ن

أحسب التكامل التالي : $I_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt} dt$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ C 0,50 ن

حدد النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ D 0,25 ن

بين أن : $\int_0^x f(t) e^{-nt} dt = F(x) - \sum_{p=1}^{p=n} I_p(x)$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , (\forall x \in \mathbb{R}^+)$ 2 A 0,75 ن

استنتج أن الدالة : $x \rightarrow \int_0^x f(t) e^{-nt} dt$ تقبل نهاية عند $+\infty$ لكل n من \mathbb{N}^* B 0,50 ن

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; L_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) e^{-nt} dt$: نضع

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; L - L_n = 2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \right)$: بين أن ج 0,25 ن

بين أن المتتالية $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة . د 0,25 ن

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$

بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة و أن نهايتها هي $L' = \frac{L}{2}$. هـ 0,25 ن



التمرين الأول: (3,5 ن)

في الحلقة الواحدة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ التي وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

و صفرها $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ، نعتبر المجموعة المعرفة بما يلي :

$$E = \left\{ M(a) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + \frac{1}{a} & a - \frac{1}{a} \\ a - \frac{1}{a} & a + \frac{1}{a} \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R}^* \right\}$$

نضع : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ و $k = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

أحسب $A^2 - 3A + 2I$ ثم استنتج أن A تقبل مقلوبا في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ و جب تحديده . 1 0,75 ن

أحسب J^2 و k^2 و $J \times k$ و $k \times J$. 2 0,75 ن

أحسب $M(a)$ بدلالة المصفوفتين J و k . ب 0,25 ن

بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$. ج 0,50 ن

نعتبر التطبيق f من \mathbb{R}^* نحو E نحو $f(a) = M(a)$:

بين أن f تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) . 3 0,75 ن

استنتج البنية الجبرية للمجموعة (E, \times) ثم حدد مقلوب المصفوفة $M(a)$ في (E, \times) . ب 0,50 ن

التمرين الثاني: (3,0 ن)

ليكن a و b عددين نسبيين و غير منعدمين

بين الاستلزام التالي : $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge (b(a+b)) = 1$ 1 0,50 ن

نعتبر في (\mathbb{Z}_*^2) المعادلة التالية : $(E) : x^2 + y^2 + xy - 31x = 0$.

وليكن (x, y) حلا للمعادلة (E) نضع $d = x \wedge y$.

بين أنه يوجد (a, b) من (\mathbb{Z}_*^2) بحيث $a \wedge b = 1$ و $a(31 - da) = bd(a + b)$ 2 0,50 ن

استنتج أن العدد a يقسم العدد d . ب 0,50 ن

بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي c غير منعدم بحيث $c(a^2 + b^2 + ab) = 31$ 3 0,50 ن

حل في (\mathbb{Z}_*^2) المعادلة (E) . ب 1,00 ن

التمرين الثالث: (3,5 ن)

نعتبر في مجموعة الاعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة (E) ذات الجهول z التالية :

$$(E) : z^3 + (5 + i)z^2 + (10 + 2i)z + 8 = 0$$

بين أن (E) تقبل حلا حقيقيا و جب تحديده . 1 0,25 ن

حل في \mathbb{C} المعادلة (E) . ب 0,25 ن

المستوى العقدي منسوب إلى M م م م (O, \vec{u}, \vec{v}) . و ليكن r التطبيق الذي يربط كل نقطة $M(z)$

بالنقطة $M_1(z_1)$ بحيث $z_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$. و التطبيق h الذي يربط كل نقطة $M(z)$

بالنقطة $M_2(z_2)$ بحيث $z_2 = \sqrt{2}z$.

حدد طبيعة كل من التطبيقين r و h و اعط عناصرهما المميزة . نضع $F = h \circ r$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
بين أنه إذا كانت $M'(z')$ هي صورة $M(z)$ بالتطبيق F فإن $z' = (1+i)z$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
بين أنه إذا كانت $F(M) = M'$ فإن المثلث OMM' قائم الزاوية و متساوي الساقين .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
اقترح طريقة لإنشاء النقطة M' انطلاقا من النقطة M .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
ليكن n عددا صحيحا طبيعيا ، و نعرف النقط $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بما يلي : $\begin{cases} A_{n+1} = F(A_n) \\ aff(A_0) = -1 + i \end{cases}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
ضع في المعلم (O, \vec{u}, \vec{v}) النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 و A_4 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
ما هي قيم العدد الصحيح الطبيعي n التي يكون من أجلها تكون النقط O و A_0 و A_n مستقيمية .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

التمرين الرابع : (3,0 ن)

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نعتبر التكامل التالي : $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
بين أن : $2I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
بين أن : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
استنتج النهايتين التاليتين : $\lim_{n \rightarrow \infty} (nI_n)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (I_n)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
لكل n من \mathbb{N}^* نضع : $U_n = \left(\frac{2^n}{n!}\right) I_n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
بين أن : $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
استنتج أن : $U_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
استنتج النهاية التالية : $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ج	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
بين أن : $U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
بين أن : $U_n = \frac{1}{2} \left[e^2 - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!} \right]$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
و استنتج قيمة النهاية : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!} \right)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

التمرين الخامس : (7,0 ن)

لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي : $g(x) = \frac{1}{x^2} + 1 - 4 \ln x$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ا	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
أدرس تغيرات الدالة g .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0; +\infty[$. و بين أن : $1 < \alpha < 2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R}_+^* .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ج	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و احسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R}_+^* .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ و بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{4\alpha^2(1+\alpha^2)}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
اعط معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة التي أفصولها 1 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
بين أن : $\ln x \leq x - 1$; $(\forall x > 0)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن

استنتج أن : $(\forall x > 0) ; f(x) - \frac{1}{4}(x-1) \leq (x-1) \left(\frac{4 - (1+x^2)^2}{4(1+x^2)^2} \right)$ ج 0,50 ن

أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المماس (T) . د 0,50 ن

أرسم (C) و (T) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) حيث $f(\alpha) \approx 0,04$ و $\alpha \approx 1,45$ 4 0,50 ن

و $\|\vec{j}\| = 10$ و $\|\vec{i}\| = 1$.

نعرف الدالة العددية F المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x f(t) dt$

بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$. و أن : $F'(x) = \frac{(1-x^2) \ln x}{(1+x^2)^2}$ 1 0,75 ن

بين أن : $(\forall x > 0) ; F(x) = \frac{1}{2} \left(\text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) - \text{Arctan}(x) \right) + \left(\frac{x \ln x}{1+x^2} \right)$ 2 0,50 ن

استنتج النهايتين التاليتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ أ 3 0,50 ن

ضع جدول تغيرات الدالة F . ب 0,50 ن



التمرين الأول: (3,5 ن)

- بين العدد 2003 أولى . 1 0,25 ن
- حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) التالية : $123x + 2003y = 1$: أ 2 0,75 ن
- استنتج عددا صحيحا معلوما k_0 بحيث : $123 k_0 \equiv 1 [2003]$. ب 0,25 ن
- بين التكافؤ التالي حيث k عدد نسبي : $123x \equiv 456[2003] \Leftrightarrow x \equiv 456k_0[2003]$: ج 0,50 ن
- حدد في \mathbb{Z} مجموعة حلول المعادلة التالية : $123x \equiv 456[2003]$: د 0,25 ن
- بين أنه يوجد عدد طبيعي وحيد n يحقق : $1 \leq n < 2003$ و $123n \equiv 456[2003]$. هـ 0,25 ن
- ليكن a عددا صحيحا طبيعيا بحيث $1 \leq a < 2003$. 3 0,50 ن
- بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي m بحيث : $am \equiv 1 [2003]$: أ 0,50 ن
- ليكن $b \in \mathbb{Z}$. حل في \mathbb{Z} المعادلة التالية : $ax \equiv b [2003]$: ب 0,25 ن
- استنتج أن : $(2002!)^2 \equiv 1 [2003]$: ج 0,25 ن

التمرين الثاني: (2,75 ن)

- المستوى العقدي منسوب إلى m, m, m (O, \vec{u}, \vec{v}) . لتكن M و N و P ثلاث نقط مختلفة 0,50 ن
- ألحاقها على التوالي m و n و p . 1 0,25 ن
- بين أن المثلث MNP قائم الزاوية في N إذا وفقط إذا كان : $i \left(\frac{p-n}{m-n} \right) \in \mathbb{R}^*$: 2 0,75 ن
- ليكن $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 1\}$ و نعتبر فيما يلي z و z^2 و z^4 ألحاق M و N و P على التوالي . أ 0,25 ن
- تحقق من أن النقط M و N و P مختلفة مثنى مثنى . ب 0,75 ن
- بين أن المثلث MNP قائم الزاوية في N إذا وفقط إذا كانت النقطة M تنتمي إلى المنحنى (Γ) الذي معادلته : $x^2 - y^2 + x = 0$: ج 0,75 ن
- حدد طبيعة المنحنى (Γ) و عناصره المميزة . د 0,50 ن
- أنشئ المنحنى (Γ) : 0,50 ن

التمرين الثالث: (4,0 ن)

- نعتبر المجموعة التالية : $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix} ; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$: 0,50 ن
- بين أن $(E, +)$ زمرة تبادلية . 1 0,75 ن
- بين أن : $M(a,b) \times M(c,d) = M(ac - 3bd ; ad + bc - 2bd)$: أ 0,75 ن
- استنتج أن $(E, +, \times)$ حلقة . ب 0,75 ن
- نضع $E^* = E \setminus \{M(0,0)\}$ و نعتبر التطبيق φ المعروف بما يلي : $\varphi : E^* \rightarrow \mathbb{C}^*$: 3 0,50 ن
- $M(a,b) \rightarrow (a - b) + i b\sqrt{2}$. 4 0,75 ن
- بين أن E^* جزء مستقر في (E, \times) . أ 0,75 ن
- بين أن φ تشاكل تقابلي من (E^*, \times) نحو (\mathbb{C}^*, \times) . ب 0,75 ن
- بين أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي . 4 0,75 ن

التمرين الرابع : (9,75 ن)

$g(x) = 1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$: كما يلي : <u>الجزء الأول</u>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	I	
أدرس تغيرات الدالة g على \mathbb{R}^* .	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R}^* .	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
$f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$; $\forall x \neq 0$: بما يلي : <u>الجزء الثاني</u>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	II	
و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
بين أن الدالة f متصلة في الصفر.	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
أدرس اشتقاق الدالة f في الصفر ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة.	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
بين أن f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* وأن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
اعط جدول تغيرات الدالة f .	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
بين أن المستقيم $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و بجوار $-\infty$.	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
أنشئ (C_f) في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$.	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، بين أن المعادلة $f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا α_n في \mathbb{R}_+^* .	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n > n$. و استنتج النهاية $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)$	<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
<u>الجزء الثالث</u> : تعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[1, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_1^{x^2} f(t) dt$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	III	
باستعمال مبرهنة المتوسط بين أن : $F(x) = (x^2 - 1)f(c)$; $(\exists c \in [1, x^2])$; $(\forall x \geq 1)$	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
بين أن : $(x^2 - 1)f(1) \leq F(x) \leq (x^2 - 1)f(x^2)$; $(\forall x \geq 1)$	<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
و استنتج النهاية التالية : $\lim F(x)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
حدد النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{F(x)}{x}\right)$ و استنتج الفرع اللانهائي للمنحنى (C_F) بجوار $+\infty$	<input type="checkbox"/>	ج	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
حدد الدالة المشتقة للدالة F و اعط جدول تغيراتها .	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
اعط معادلة نصف المماس للمنحنى (C_F) عند النقطة التي أفصولها 1 .	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
أنشئ المنحنى (C_F) .	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
<u>الجزء الرابع</u> : تعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{f(t)}{t^3}\right) dt$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	IV	
بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعاً .	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
بين أن : $u_n = \int_1^n \left(1 - \frac{e^t}{1+e^t}\right) dt$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
استنتج u_n بدلالة n ثم حدد النهاية $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$.	<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>	0,50 ن



التمرين الأول: (3,5 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 ، نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة

واحدية وحدتها المصفوفة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. وأن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ فضاء متجهي حقيقي .

نعتبر المجموعتين التاليتين : $A = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} e^a & ae^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R} \right\}$

$B = \left\{ N_b = \begin{pmatrix} 1 & \ln b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; b \in \mathbb{R}_+^* \right\}$

تحقق أن : $I \in A$ و $I \in B$ **1** 0,25 ن

بين أن : $\forall (M_a, M_b) \in A^2 ; M_a \times M_b = M_{a+b}$ **2** 0,25 ن

بين أن (A, \times) زمرة تبادلية . **ب** 0,50 ن

نعتبر المجموعة التالية : $E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} e^a & ae^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{Z} \right\}$

بين أن (E, \times) زمرة جزئية للزمرة (A, \times) **ج** 0,50 ن

لكل $M_a \in A$ نضع $(M_a)^0 = I$ و $(M_a)^{-n} = ((M_a)^{-1})^n$

و $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (M_a)^{n+1} = (M_a)^n \times M_a$

حدد بدلالة a و k صيغة $(M_a)^k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ **د** 0,50 ن

بين أن B جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ **3** 0,25 ن

بين أن (\mathbb{R}_+^*, \times) و (B, \times) متساكلتان تقابليا . ثم استنتج البنية الجبرية للمجموعة (B, \times) .

هل المجموعة $A \cup B$ مستقرة بالنسبة للضرب \times في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ؟ و علل الجواب . **4** 0,25 ن

التمرين الثاني: (2,5 ن)

ليكن p عددا أوليا بحيث $p \geq 5$ و $p \neq 2011$. نعتبر في المجموعة $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة التالية : $(E) : px + y^{p-1} = 2011$

تحقق أن العدد 2011 عدد أولي . **1** 0,25 ن

نفترض أن (x, y) حل للمعادلة (E) .

بين أن العدد p لا يقسم العدد y . **2** 0,50 ن

استنتج أن p يقسم العدد 2010 ثم حدد قيم العدد p . **ب** 0,50 ن

حدد الزوج (x, y) في حالة $p = 67$. **ج** 0,75 ن

حل في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة (E) في الحالة $p = 5$. **3** 0,50 ن

التمرين الثالث: (3,5 ن)

ليكن m عددا عقديا غير منعدم ، و نعتبر في \mathbb{C} المعادلة التالية :

$(E) : z^2 - (3m - 2i)z + 2m^2 - 4mi = 0$

حل في \mathbb{C} المعادلة (E) . **1** 0,50 ن

نأخذ في هذا السؤال $m = (1 + i)$ و ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث $|z_1| < |z_2|$.

أكتب كلا من z_1 و z_2 على الشكل المثلي . **2** 0,50 ن

تحقق من أن $(-z_1)$ هو جذر مكعب للعدد z_2 ، ثم استنتج على الشكل الجبري الجذرين

المكعبين الآخرين للعدد z_2 . **ب** 0,50 ن

- المستوى العقدي (P) منسوب إلى m, m, m م (O, \vec{u}, \vec{v}) . لتكن A و B و C النقط التي أحاقها على التوالي: i و $2m$ و $m - 2i$. و نفترض أن العدد m ليس تخيليا صرفا .
بين أن النقط A و B و C غير مستقيمة .
خارج المثلث ABC ، ننشئ النقطة D بحيث يكون المثلث BCD متساوي الساقين و قائم الزاوية في D . و ليكن d لحق النقطة D .
بين أن : $d = \frac{3m - im + 2 - 2i}{2}$ أو $d = \frac{3m + im - 2 - 2i}{2}$
حدد m لكي يكون الرباعي $ABDC$ مربعا .

التمرين الرابع: (11 ن)

- نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بما يلي :
و ليكن (C) منحناها في m, m, m (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 $f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$

الجزء الأول:

- أحسب النهايتين التاليتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ و استنتج الفروع اللانهائية .
أدرس تغيرات الدالة f و ضع جدول تغيراتها .
بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين 0 و $\alpha > 1$. و استنتج إشارة $f(x)$ على $]-1, +\infty[$.
أنشئ المنحنى (C)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 4 .

- بين أن المعادلة $f(x) = \frac{1}{n}$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $]0, 1[$.
بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 4}$ تناقصية قطعا . و استنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها .

الجزء الثاني:

- نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :
تحقق أن الدالة φ فردية .
أدرس اتصال الدالة φ و قابلية اشتقاقها في الصفر .
بين أن : $\varphi'(t) = \frac{1}{t^2} f(t^2)$; $(\forall t \in \mathbb{R}^*)$
استنتج جدول تغيرات الدالة φ و بين أن : $\varphi(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$

- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :
 $g(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$
بين أن g دالة زوجية .

- بين أن g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و احسب $g'(x)$ لكل x من \mathbb{R} .
ضع جدول تغيرات الدالة g .

- احسب التكامل التالي : $I = \int_1^x \left(\frac{2 \ln t}{t} \right) dt$

- استنتج أن : $g(x) - g(1) = (\ln x)^2 + \int_1^x \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt$; $(\forall x \geq 1)$

- بين أن : $\ln(1+x) \leq x$; $(\forall x \geq 0)$

- استنتج أن : $0 \leq \int_1^x \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \leq \frac{1}{2}$; $(\forall x \geq 1)$

- أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ استنتج طبيعة الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$.

الجزء الثالث: نعتبر المتتالية $(S_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{k}\right)$ III

بين أن : $\ln(1+k) - \ln k < \frac{1}{k}$ $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$; **1** 0,50 ن

استنتج أن : $2 \ln(k+2) - 3 \ln(1+k) + \ln k < f\left(\frac{1}{k}\right)$ $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$; **2** 0,50 ن

و أن : $2 \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) - \ln\left(\frac{1+k}{k}\right) < f\left(\frac{1}{k}\right)$ $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$;

استنتج أن : $\ln\left(\frac{(n+2)^2}{4(n+1)}\right) < S_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ثم احسب النهاية $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n)$ **3** 0,50 ن

الجزء الرابع: ليكن x عنصرا من المجال $]0,1[$. **IV**

بين أن : $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{1+x}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; **1** 0,25 ن

بين أن : $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; **2** 0,25 ن

استنتج أن : $f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \left(\frac{2k-1}{k}\right) x^k + \frac{2(-1)^{n+1} x^{n+2}}{1+x} + (-1)^{n+2} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$ **3** 0,25 ن

بين أن : $0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq x^{n+2}$ **4** 0,50 ن

استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t}\right) dt = 0$ **ب** 0,25 ن

بين أن : $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\frac{2k-1}{k}\right) x^k\right)$ $\forall x \in]0,1[$; **ج** 0,50 ن



التمرين الأول: (3,5 ن)

- $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 ، نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة
- واحدية وحدتها المصفوفة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .
- نعتبر المجموعة E التالية : $E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x + y \end{pmatrix} ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
- نضع $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. تحقق أن $J \in E$ وأن $I \in E$ **1** 0,25 ن
- بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ **ب** 0,25 ن
- تحقق أن : $J^2 = J - I$. **2** 0,25 ن
- استنتج أن E جزء مستقر من المجموعة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ **ب** 0,25 ن
- بين أن $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية وواحدية . **3** 0,50 ن
- لكل عددين حقيقيين x و y ، بين التكافؤ التالي : $x = y = 0 \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2$ **4** 0,25 ن
- ليكن $(x, y) \in \mathbb{R}^{2*}$ ونضع $\Delta = x^2 + yx + y^2$. **أ** 0,25 ن
- أحسب الجداء التالي : $M(x, y) \times M\left(\frac{x+y}{\Delta} ; \frac{-y}{\Delta}\right)$ **ب** 0,50 ن
- استنتج أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي . **ج** 0,50 ن
- نضع $F = (\mathbb{R}_*)^2$ ونزود F بقانون التركيب الداخلي \top المعرف بما يلي :
- $\forall (x, y) \in F ; \forall (a, b) \in F ; (x, y) \top (a, b) = (ax - by ; ay + bx + by)$
- و نعتبر التطبيق φ المعرف من F نحو E بما يلي : $\varphi(x, y) = M(x, y)$
- بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من (F, \top) نحو (E, \times) . **5** 0,50 ن
- استنتج البنية الجبرية للمجموعة (F, \top) . **ب** 0,25 ن

التمرين الثاني: (6,5 ن)

- المستوى منسوب إلى m, m, m, o . ليكن m عنصرا من \mathbb{C}^* ونعتبر في \mathbb{C} المعادلة (E) ذات المجهول z التالية : $z^2 - (2 - \sqrt{3} + i)mz + 2(i - \sqrt{3})m^2 = 0$
- بين أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta = (2 + \sqrt{3} - i)^2 m^2$. **1** 0,50 ن
- حل في \mathbb{C} المعادلة (E) . **ب** 0,50 ن
- ليكن z_1 و z_2 حل (E) حيث $\arg(z_1) \equiv \arg(m) [2\pi]$. أكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على شكله الأسّي **ج** 0,50 ن
- نعتبر التطبيق F الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث $z' = e^{\frac{5i\pi}{6}} z$.
- حدد طبيعة التطبيق F و عناصره المميزة . **أ** 0,75 ن
- حدد صورة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1 + i)$ و شعاعها 2 بالتطبيق F . **ب** 0,50 ن
- لكل عدد صحيح طبيعي n نربط النقطة $M_n(z_n)$ بحيث $\begin{cases} M_{n+1} = F(M_n) ; (\forall n \in \mathbb{N}) \\ aff(M_0) = i = z_0 \end{cases}$
- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6}\right)}$ **3** 0,50 ن
- بين أن : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 ; M_n = M_p \Leftrightarrow n \equiv p [12]$ **ب** 0,75 ن

حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) التالية : $12x - 5y = 3$ (E)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
استنتج مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي من أجلها تكون النقط M_n منتمية إلى نصف المحور الحقيقي الموجب .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
نعتبر في \mathbb{Z} النظمة (S) التالية : $(S) : \begin{cases} x \equiv 0 [12] \\ x \equiv 3 [5] \end{cases}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
ليكن (k_0, l_0) حلا خاصا للمعادلة (E) .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
بين أن العدد $x_0 = 12k_0 = 5l_0 + 3$ حل خاص للنظمة (S) .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
بين أن x حل للنظمة (S) إذا و فقط إذا كان $x = x_0 [60]$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
حل في \mathbb{Z} النظمة (S) .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
حدد المجموعة التالية : $R_n = \{ n \in \mathbb{N} ; M_n = M_0 \text{ et } n \equiv 3 [5] \}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن

التمرين الثالث : (10 ن)

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f_n(x) = (x-1)^n \ln x$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
و ليكن (C_n) المنحنى الممثل لكل دالة f_n في M م م م (O, \vec{i}, \vec{j}) .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
<u>الجزء الأول</u> : نضع : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , (\forall x > 0) ; g_n(x) = n \ln x + 1 - \frac{1}{x}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1
أدرس تغيرات الدالة g_n على المجال $]0, +\infty[$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
أحسب $g_n(1)$ و استنتج إشارة الكمية $(x-1)g_n(x)$ على المجال $]0, +\infty[$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
بين أن : $(\forall x > 0) ; f'_n(x) = (x-1)^{n-1} g_n(x)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2
أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $]0, +\infty[$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_n) .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,25 ن
أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
أنشئ (C_1) و (C_2) في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3
أحسب مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنيين (C_1) و (C_2)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4
و المستقيمين ذوا المعادلتين $x = 1$ و $x = e$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
<u>الجزء الثاني</u> : نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0,1[\cup]1; +\infty[$ بما يلي :	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	II
$\begin{cases} F(x) = \int_x^{x^2} \left(\frac{f_1(t)}{(t-1)^4} \right) dt ; & x > 0 \\ & x \neq 1 \\ F(0) = 0 \end{cases}$				
بين أن : $\forall x \in]0,1[; 2 \ln x \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{(t-1)^3} \right) dt \leq F(x) \leq \ln x \int_x^{x^2} \frac{1}{(t-1)^3} dt$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1
أحسب التكامل التالي : $\int_x^{x^2} \frac{1}{(t-1)^3} dt$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2
استنتج أن : $\forall x \in]0,1[; \frac{(x^2 + 2x) \ln x}{(x^2 - 1)^2} \leq F(x) \leq \frac{(x^2 + 2x) \ln x}{2(x^2 - 1)^2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ب
أدرس اتصال الدالة F على يمين الصفر .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ج
أحسب النهاية التالية $\lim_{x \rightarrow 1} F(x)$ و اعط تأويلا هندسيا لها .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	د
أدرس اشتقاق الدالة F على يمين الصفر . ثم أول النتيجة هندسيا .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	هـ
بين أن : $(\forall x > 1) ; \frac{(x^2 + 2x) \ln x}{2(x^2 - 1)^2} \leq F(x) \leq \frac{(x^2 + 2x) \ln x}{(x^2 - 1)^2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3
استنتج النهايتين التاليتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ب
أدرس اشتقاق الدالة F على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1, +\infty[$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4
إعط جدول تغيرات الدالة F . (لاحظ أن : $(\forall x > 0) ; x^3 + 3x^2 - x + 1 \geq 0$)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ب
أرسم منحنى الدالة F في M م م م (O, \vec{i}, \vec{j}) .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	5

$I_n = \int_1^2 f_n(t) dt$ $J_n = \int_1^2 \frac{(t-1)^n}{t} dt$: الجزء الثالث : لكل n من \mathbb{N}^* نضع

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; (n+1) I_n = \ln 2 - J_{n+1}$: بين أن **1** 0,25 ن

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \int_1^2 \frac{(t-1)^{n+1}}{t^2} dt = (n+1) J_n - \frac{1}{2}$: بين أن **2** 0,25 ن

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$: استنتج أن **ب** 0,50 ن

$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) I_n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$: أحسب النهايات التالية **ج** 0,50 ن



التمرين الأول: (5,5 ن)

المستوى العقدي (P) منسوب إلى م م م م (O, \vec{u} , \vec{v}). نعتبر النقطة A ذات اللق $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$
نربط كل نقطة M ذات اللق $z = x + iy$ حيث $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ بالنقطة M' ذات اللق

$$E = \{ M \in (P) ; \sqrt{3} MA = 2MM' \}$$

بين أن: $E = \{ M(x, y) \in (P) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } x^2 - 3y^2 = 1 \}$ 1 0,50 ن

نضع: $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{3}}$ و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في م م م (O, \vec{u} , \vec{v}).

حدد مجموعة تعريف الدالة f و تحقق أن f دالة زوجية. أ 2 0,50 ن

أدرس اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة ذات الأفصول 1. ب 0,50 ن

حدد مقارب المنحنى (C_f) بجوار $+\infty$. ج 0,50 ن

بين أن: $E = (C_f) \cup (C_{-f})$ ثم أنشئ المجموعة (E). د 0,75 ن

لكل نقطتين $M(a + ib)$ و $M(c + id)$ حيث a و b و c و d أعداد حقيقية، نضع:

$$M(a + ib) \top M(c + id) = M(ac + 3bd + i(ad + bc))$$

بين أن القانون \top تجميعي. أ 3 1,00 ن

بين أن (E, \top) جزء مستقر من (P, \top) . ب 0,75 ن

بين أن (E, \top) زمرة، هل هي تبادلية؟ ج 1,00 ن

التمرين الثاني: (4,5 ن)

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة التالية: $(E) : 109x - 226y = 1$
حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 109 و 226. و استنتج أن (E) قابلة للحل في \mathbb{Z}^2 .

بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة الأزواج $(68 + 109k ; 141 + 226k)$ حيث k عدد نسبي. أ 1 0,50 ن

استنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم وحيد d أصغر من أو يساوي 226 و عدد صحيح طبيعي غير منعدم وحيد e بحيث: $109d = 1 + 226e$ (يجب تحديد قيمتي d و e) ب 0,50 ن

بين أن العدد 227 عدد أولي. ج 0,75 ن

نضع: $A = \{0; 1; 2; \dots; 226\}$. د 2 0,50 ن

نعتبر التطبيقين f و g المعرفين من A نحو A بما يلي:

$f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{109} على العدد 227.

$g(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{141} على العدد 227.

تحقق أن: $g(f(0)) = 0$ أ 3 0,50 ن

بين أن: $a^{226} \equiv 1 [227] \forall a \in A \setminus \{0\}$ ب 0,50 ن

بين أن: $f(g(a)) = a$ و $g(f(a)) = a$ ج 0,75 ن

ماذا يمكن أن نستنتج بخصوص الدالتين f و g. د 0,50 ن

التمرين الثالث : (3,0 ن)

- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم p نضع : $I_p = \int_1^e x^2 (\ln x)^p dx$
- أحسب التكامل I_1 . **1** 0,50 ن
- بين أن : $I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{p+1}{3}\right) I_p$; $(\forall p \in \mathbb{N}^*)$ **ب** 0,50 ن
- استنتج قيمتي التكاملين I_2 و I_3 . **ج** 0,50 ن
- بين أن المتتالية $(I_p)_{p \geq 1}$ تناقصية . **2** 0,50 ن
- بين أن المتتالية $(I_p)_{p \geq 1}$ متقاربة . **ب** 0,50 ن
- بين أن : $\lim_{p \rightarrow +\infty} I_p = 0$ **ج** 0,50 ن

التمرين الرابع : (7,0 ن)

- لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-1; +\infty[$ بما يلي : **ا**
- $g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x) \ln(1+x)$
- أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$ **1** 0,50 ن
- اعط جدول تغيرات الدالة g . **2** 0,50 ن
- بين أنه يوجد عنصر وحيد α من $]0; +\infty[$ بحيث $g(\alpha) = 0$ و أن $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. **3** 0,50 ن
- حدد إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$. **4** 0,50 ن
- الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بما يلي : **II**
- $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$
- و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى M م م (O, \vec{i}, \vec{j}) . (2 cm)
- أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ **1** 1,00 ن
- لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.
- بين أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]-1; +\infty[$ ثم اعط جدول تغيرات الدالة f . **2** 0,50 ن
- بين أن : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ **ب** 0,50 ن
- أنشئ المنحنى (C) . و نأخذ : $\alpha \approx 0,7$ و $f(\alpha) \approx 0,4$ **3** 1,00 ن
- الجزء الثالث : نعتبر التكامل التالي : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$ **III**
- أحسب التكامل I . (يمكن وضع : $t = \frac{\pi}{4} - x$) **1** 1,00 ن
- أحسب بالوحدة cm^2 مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين ذوا المعادلتين $x = 1$ و $x = 0$ (يمكنك وضع $t = \text{Arctan } x$) **2** 1,00 ن



نعتبر المجال $G = [0,1[$.

التمرين الأول: (3,5 ن)

ليكن $*$ التطبيق المعرف من $G \times G$ نحو \mathbb{R} بما يلي: $a * b = a + b - E(a + b)$

حيث $E(x)$ هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .

بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G .

بين أن $*$ تبادلي و تجميعي في المجموعة G .

بين أن $*$ يقبل عنصرا محايدا في G و يجب تحديده.

بين أن كل عنصر a من G يقبل ماثلا a' بالنسبة للقانون $*$ (ينبغي تحديده)

ليكن $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ، حل في المجموعة G المعادلة التالية: $(F) : \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{n}$

<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	0,75 ن
<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	0,50 ن
<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	1,00 ن

التمرين الثاني: (4,0 ن)

يتكون هذا التمرين من جزئين مستقلين.

الجزء الأول: نعتبر في \mathbb{C} المعادلة: $(E_\theta) : z^2 - 2iz - (1 + e^{2i\theta}) = 0$;

حيث θ بارامتر حقيقي من المجال $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

ليكن $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ، بين القاعدتين التاليتين: $e^{ix} - e^{iy} = 2i \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$ و $e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$

حل في \mathbb{C} المعادلة (E_θ) ثم اكتب الحلين z_1 و z_2 على الشكل المثلي.

لتكن A و B النقطتين اللتين لحقاهما على التوالي z_1 و z_2 .

بين أن النقط O و A و B غير مستقيمة و أن المثلث OAB قائم الزاوية.

ما هي قيمة البارامتر الحقيقي θ التي من أجلها يكون المثلث OAB متساوي الساقين.

الجزء الثاني: نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي a و $b + i$

حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ و ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

و النقطة B' هي صورة B بالدوران r .

إعط الكتابة العقدية للدوران r ثم احسب $aff(B')$ بدلالة a و b .

بين التكافؤ التالي: $B' \in (Oy) \Leftrightarrow a + b = \sqrt{3}$

ثم عبر في هذه الحالة عن $aff(B')$ بدلالة a .

نفترض فيما يلي أن $a = \sqrt{3}$ و $b = 0$.

و لتكن C و D النقطتين ذواتا اللحين $c = -i$ و $d = 2 + \sqrt{3}(1 - 2i)$ على التوالي.

ما هي طبيعة كل من المثلثين ABC و ACD ؟

نضع $E = r(D)$ و لتكن F صورة D بالإزاحة ذات المتجهة \vec{AC} ، حدد لحقي النقطتين E

و F . ثم بين أن المثلث BEF متساوي الأضلاع.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	I	0,50 ن
<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>		0,50 ن
<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>		0,50 ن
<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	أ	0,50 ن
<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>		0,50 ن
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	II	
<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>		0,50 ن
<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>		0,50 ن
<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	أ	0,50 ن
<input type="checkbox"/>	ب	<input type="checkbox"/>		0,50 ن

التمرين الثالث : (2,5 ن)

- نعتبر في المجموعة \mathbb{Z} المعادلة (E) التالية : $ax \equiv 1 [p]$ حيث a عنصر من المجموعة $A_p = \{1, 2, \dots, (p-1)\}$ و $p \geq 3$ عدد أولي .
 بين أن العدد a^{p-2} حل للمعادلة (E) . **1** **أ** 0,50 ن
- ليكن r باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{p-1} على العدد p . بين أن $r \in A_p$ و أن r هو الحل الوحيد للمعادلة (E) في المجموعة A_p .
 فيما يلي نعتبر أن : $p = 31$
 حدد قيمتي r اللتان من أجلهما $a = 2$ ثم $a = 3$. **2** **أ** 0,50 ن
- حل في \mathbb{Z} المعادلتين التاليتين : $(F_1) : 2x \equiv 1 [31]$
 $(F_2) : 3x \equiv 1 [31]$ **ب** 0,50 ن
- استنتج مجموعة حلول المعادلة $(F) : 6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 [31]$ في المجموعة \mathbb{Z} . **ج** 0,50 ن

التمرين الرابع : (10 ن)

- الجزء الأول :** لتكن h الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $h(x) = e^x - (x + 1)$ **1** 0,50 ن
- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x h(t) dt$ **1** 0,50 ن
- حدد منحنى تغيرات الدالة h على كل من المجالين $[0, +\infty[$ و $]-\infty, 0]$. **2** 0,50 ن
- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \frac{1}{2} \leq \frac{e^x - (x + 1)}{x^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x}$ **3** 0,50 ن
- و بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; 0 \leq \int_0^x h(t) dt \leq x h(x)$ **3** 0,50 ن
- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_-^*) ; \frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x} \leq \frac{e^x - (x + 1)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$ **4** 0,50 ن
- و بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_-^*) ; x h(x) \leq \int_0^x h(t) dt \leq 0$ **4** 0,50 ن
- أحسب النهاية : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{h(x)}{x} \right)$, ثم استنتج النهاية : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - (x + 1)}{x^2} \right)$ **5** 0,50 ن
- الجزء الثاني :** لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $\forall x \neq 0 ; f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$; $f(0) = 1$ **II** 0,25 ن
- بين أن الدالة f متصلة على \mathbb{R} . **1** 0,25 ن
- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$. **2** 0,50 ن
- بين أن f قابلة للاشتقاق في الصفر . **3** 0,50 ن
- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$ حيث : $\varphi(x) = (1 - x)e^x - 1$ **4** 0,50 ن
- أدرس تغيرات الدالة φ على \mathbb{R} . و استنتج إشارتها على \mathbb{R}^* . **5** 0,50 ن
- ضع جدول تغيرات الدالة f . **6** 0,25 ن
- أرسم المنحنى (C_f) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) مبرزاً المماس في النقطة ذات الأفضول 0 . **7** 0,50 ن

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

الجزء الثالث : لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R} ينبغي تحديده . **1** 0,50 ن

بين أن : $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2x e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$: **2** 0,50 ن

بين أن : $e^{2x} - 2x e^x - 1 \geq 0 ; (\forall x \in \mathbb{R}^+)$ ثم استنتج أن : $-\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$: **ب** 0,50 ن

بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$: **3** 0,50 ن

استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 - \alpha)$ و حدد النهاية التالية $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$: **ب** 0,50 ن

الجزء الرابع : لتكن F الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$ **IV**

بين أن : $0 \leq F(x) \leq x f(x) ; (\forall x \geq 0)$ ثم استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ **1** 0,50 ن

بين أن : $F(x) \leq x f(x) ; (\forall x \leq 0)$ ثم استنتج النهايتين : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{x}$ **2** 0,50 ن

بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و أن : $\forall x \in \mathbb{R}^* ; F'(x) = \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1}$; **3** 0,50 ن

$$F'(0) = 1$$

ضع جدول تغيرات الدالة F ثم ارسم المنحنى (C_F) في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$. **4** 0,50 ن

نعطي : $\ln 3 \approx 1,1$ و $F(\ln 3) \approx 0,44$.



اختبار مادة الرياضيات
الشعبة: رياضيات
المعلم: مامل: 7
المدة: أربع ساعات ونصف

امتحان بكالوريا
التعليم الثانوي
دورة جوان 2014

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول :

التمرين الأول : (5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط : $A(2; 1; -1)$ و $B(-1; 2; 4)$ و $C(0; -2; 3)$ و $D(1; 1; -2)$ و المستوي (P) المعرف بالمعادلة الديكارتية : $2x - y + 2z + 1 = 0$ المطلوب : أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية :

- (1) النقط A و B و C تعين مستويا.
- (2) المستقيم (AC) محتوي في المستوي (P) .
- (3) $x - 2y - z - 1 = 0$ هي معادلة المستوي (ACD) .
- (4) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (C) .
- (5) المسافة بين النقط D و المستوي (P) تساوي $\frac{3}{2}$.
- (6) النقط $E(-2; -1; 1)$ هي المسقط العمودي للنقط C على (P) .
- (7) سطح الكرة ذات المركز D و نصف القطر $\frac{\sqrt{6}}{2}$ هو مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\vec{AM} \cdot \vec{CM} = 0$

التمرين الثاني : (5 نقاط)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة التالية : $(z - 1 - 2i)(z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3}) = 0$
- (2) A, B, C, D نقط في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس (O, \vec{u}, \vec{v}) لاحقاتها على الترتيب : $z_A = 1 + 2i, z_B = 1 + \sqrt{3} + i, z_C = 1 + \sqrt{3} - i, z_D = 1 - 2i$.
- (أ) بين أن : $AB = CD$ و (AD) يوازي (BC) .
- (ب) تحقق أن : $\frac{z_B + z_D}{2} \neq \frac{z_B + z_C}{2}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.
- (3) (أ) بين أن : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3} e^{i\pi}$ و استنتج أن D هي صورة A بتشابه مباشر مركزه B يطلب تعيين نسبته و زاويته.
- (ب) بين أن المثلث ADB قائم و أن النقط A, B, C, D تنتمي إلى دائرة يطلب تحديد مركزها و نصف قطرها.
- (ج) استنتج إنشاء الرباعي $ABCD$.

التمرين الثالث : (4 نقاط)

- (1) نعتبر المعادلة $(E) : 2013x - 1962y = 54$. حيث x و y عدنان صحيحان.
 - (أ) أحسب $PGCD(2013; 1962)$.
 - (ب) استنتج أن المعادلة E تقبل حولا.
 - (ج) بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن : $x \equiv 0 [6]$.
 - (د) استنتج حلا خاصا $(x_0; y_0)$ حيث $74 < x_0 < 80$ ثم حل المعادلة (E) .
- (2) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x; y)$ حل للمعادلة (E) .
 - (أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
 - (ب) عين قيم العددين الطبيعيين a و b حيث $671a - 654b = 18$ و $PGCD(a, b) = 18$

التمرين الرابع : (6 نقاط)

- (I) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = (2 - x)e^x - 1$
- (1) أدرس تغيرات الدالة g .
- (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ في \mathbb{R} حلان α و β حيث $-1,2 < \alpha < -1,1$ و $1,8 < \beta < 1,9$.
- (3) استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .
- (II) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$
- (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- (1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ و فسر النتيجة هندسيا.
- (2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- (3) بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ و استنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.
- (4) أحسب $f(1)$ ثم ارسم المنحنى (C_f) .
- (5) أ) λ عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1 . أحسب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث $a(\lambda) = \int_1^\lambda (f(x) - 1) dx$.
- ب) أحسب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$.

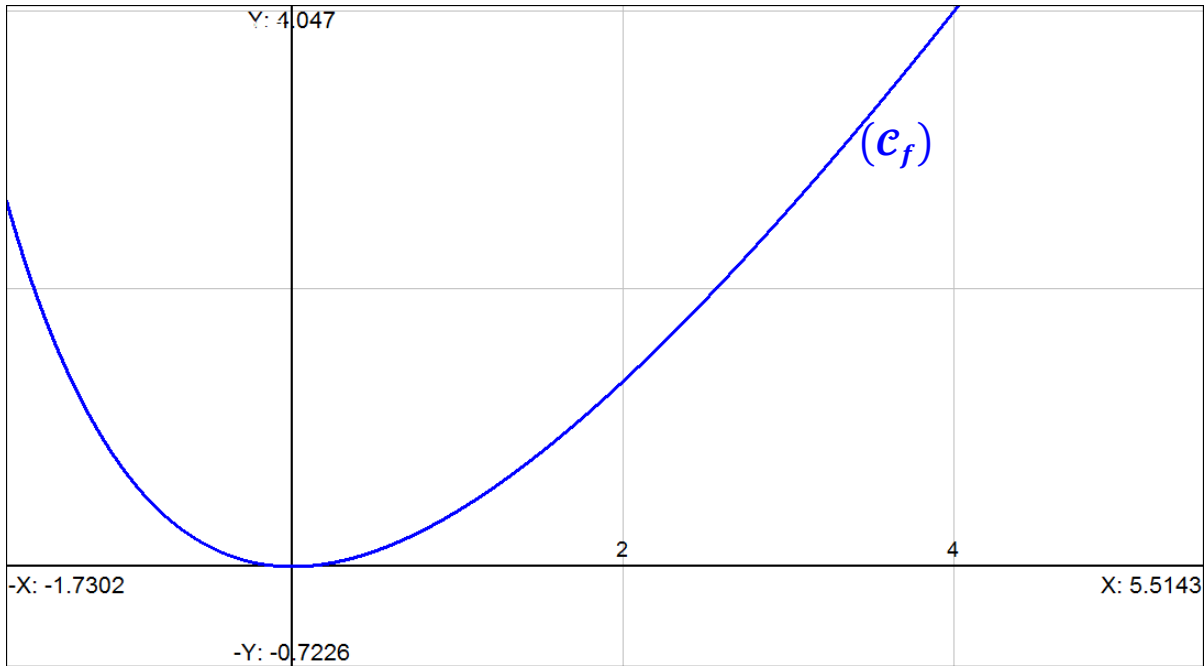
الموضوع الثاني :

التمرين الأول : (5 نقاط)

- المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس (O, \vec{u}, \vec{v}) . A و B النقطتان اللتان لاحقتاهما على الترتيب :
- $a = -2 + 6i$ و $b = -1 + 2i$.
- (1) أكتب العدد المركب $1 + i$ على شكل أسّي.
- (2) S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث $z' = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} z + 2$.
- أ) D النقطة ذات اللاحقة d حيث $d = 2i$. جد لاحقة النقطة D' صورة D بالتحويل S . ماذا تستنتج ؟
- ب) بين أن : $z' - d = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} (z - d)$ و استنتج طبيعة و عناصر التحويل S .
- (3) أ) (Δ) المستقيم ذو المعادلة $3x + 5y = 11$. تحقق أن النقطة $M_0(-3; 4)$ تنتمي إلى (Δ) ثم عين نقط (Δ) التي إحداثياتها أعداد صحيحة.
- ب) M'_0 صورة M_0 بالتحويل S . بين أن المستقيمين (BM'_0) و (BA) متعامدان .
- (4) x و y عدنان صحيحان من المجال $[-5; 5]$ ، عين مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوى بحيث يكون المستقيمان (BA) و (BM') متعامدان . حيث M' هي صورة M بالتحويل S .

التمرين الثاني : (4,5 نقاط)

- الدالة العددية f معرفة على المجال $[0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$
- المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) كما هو مبين في الشكل أدناه
- (1) بين أن الدالة f متزايدة تماما .
- (2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (Δ) المستقيم الذي معادلته : $y = x$.
- أ) باستعمال المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ، مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها .
- ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .
- (3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 3$.
- ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة و استنتج أنها متقاربة .
- (4) أ) أدرس إشارة العدد $7u_{n+1} - 6u_n$ ، و استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$.
- ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 3 \left(\frac{6}{7}\right)^n$.
- ج) أحسب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.



التمرين الثالث : (5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1; 1; 3)$ و $\vec{u}(1, 2, -2)$ شعاع توجيه له .

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 3 \end{cases} : (\Delta')$$

(1) حدد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (Δ) و (Δ') .

(2) بين أن (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .

(3) (P) المستوي الذي يشمل (Δ') و يوازي (Δ) . بين أن معادلة المستوي (P) هي : $2x + y + 2z - 3 = 0$

(4) $M(1 + t; 1 + 2t; 3 - 2t)$ نقطة كيفية من المستقيم (Δ) حيث $t \in \mathbb{R}$.

أحسب d المسافة بين M و المستوي P .

(5) أ) عين إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) ، ثم عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ'') الذي يشمل A' و يوازي (Δ) .

ب) بين أن (Δ') و (Δ'') يتقاطعان في النقطة $B(1; 3; -1)$.

(6) أ) f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(t) = BM^2$. بين أن : $f(t) = 9t^2 - 24t + 20$

ب) بين أن f تقبل قيمة حدية صغرى $f(t_0)$ يطلب تعيين t_0 و $f(t_0)$.

ج) تحقق أن : $d = \sqrt{f(t_0)}$

التمرين الرابع : (5,5 نقاط)

(1) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = (1 + 2 \ln x)(-1 + \ln x)$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

أ) أدرس تغيرات الدالة f .

ب) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e (حيث e أساس اللوغاريتم النيبيري) .

ج) عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم ارسم (C_f) على المجال $]0; e^2]$.

(2) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = 1 - \ln x$

(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ) أدرس تغيرات الدالة g .

ب) عين الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) ثم أرسم (C_g) على المجال $]0; e^2]$.

(3) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$

أ) أحسب $h'(x)$ و استنتج دالة أصلية للدالة $(\ln x)^2$ على المجال $]0; +\infty[$.

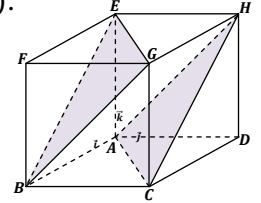
ب) أحسب العدد : $\int_{\frac{1}{e}}^e (f(x) - g(x)) dx$



Le sujet original comporte 4 pages, la page annexe 4/4 est à rendre avec la copie

Exercice 1) : (4 points) :

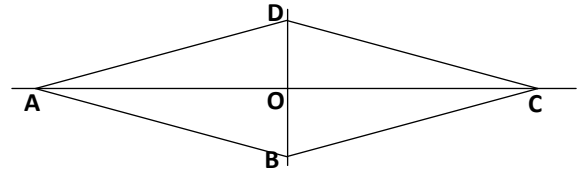
L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $ABCDEFGH$ le cube tel que $\vec{AB} = 6\vec{i}$, $\vec{AD} = 6\vec{j}$ et $\vec{AE} = 6\vec{k}$. On désigne par P le plan (ACH) et par Q le plan (EGB) .



- 1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{AC} \wedge \vec{AH}$.
b) En déduire une équation du plan P
c) Montrer que les plans P et Q sont parallèles et donner une équation du plan Q
- 2) soit S la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z = 0$
a) Déterminer le rayon de S et les coordonnées de son centre I
b) Soit J le projeté orthogonal de A sur le plan Q , montrer que $[AJ]$ est un diamètre de S
c) Montrer que la sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q .
- 3) Soit t la translation de vecteur $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$
a) Soit A' et J' les images respectives de A et J par t . Déterminer les coordonnées de A' et J'
b) Déterminer S' l'image de la sphère S par t
c) Montrer que S' est tangente aux deux plans P et Q et déterminer leurs points de contact

Exercice 2) : (5 points) :

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un losange de centre O tel que $(\vec{OA}, \vec{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $AC = 3BD$.



- 1) Soit f la similitude directe qui envoie A en B et C en D .
a) Déterminer le rapport et l'angle de f
b) Montrer que O est le centre de f .
- 2) a) Soit D' l'image de D par f . Montrer que D' est l'orthocentre du triangle ABD et que $OA = 9OD'$
b) Soit B' l'image de B par f . Montrer que $BB'DD'$ est un losange.
- 3) Soit $g = f \circ S_{(AC)}$
a) Déterminer la nature de g
b) Déterminer les images des points O, A, B, C et D par g
c) Déterminer l'axe (Δ) de g
d) La droite (Δ) coupe les droites (AB) , (BD') , (DB') et (CD) respectivement en M, N, P et Q .
Montrer que $MQ = 3NP$.

Exercice 3) : (4 points) :

- 1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1 \pmod{10}$.
a) Montrer que $a^9 + a^8 + \dots + a + 1 \equiv 0 \pmod{10}$.
b) En déduire que $a^{10} \equiv 1 \pmod{10^2}$. (On pourra utiliser $a^{10} - 1 = (a - 1)(a^9 + \dots + a + 1)$)
- 2) Soit b un entier.
a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.
b) En déduire que $b^4 \equiv 1 \pmod{10}$ si et seulement si b est premier avec 10.
- 3) Soit b un entier premier avec 10.
a) Montrer que $b^{40} \equiv 1 \pmod{10^2}$.
b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42} .

Exercice 4) : (7 points) :

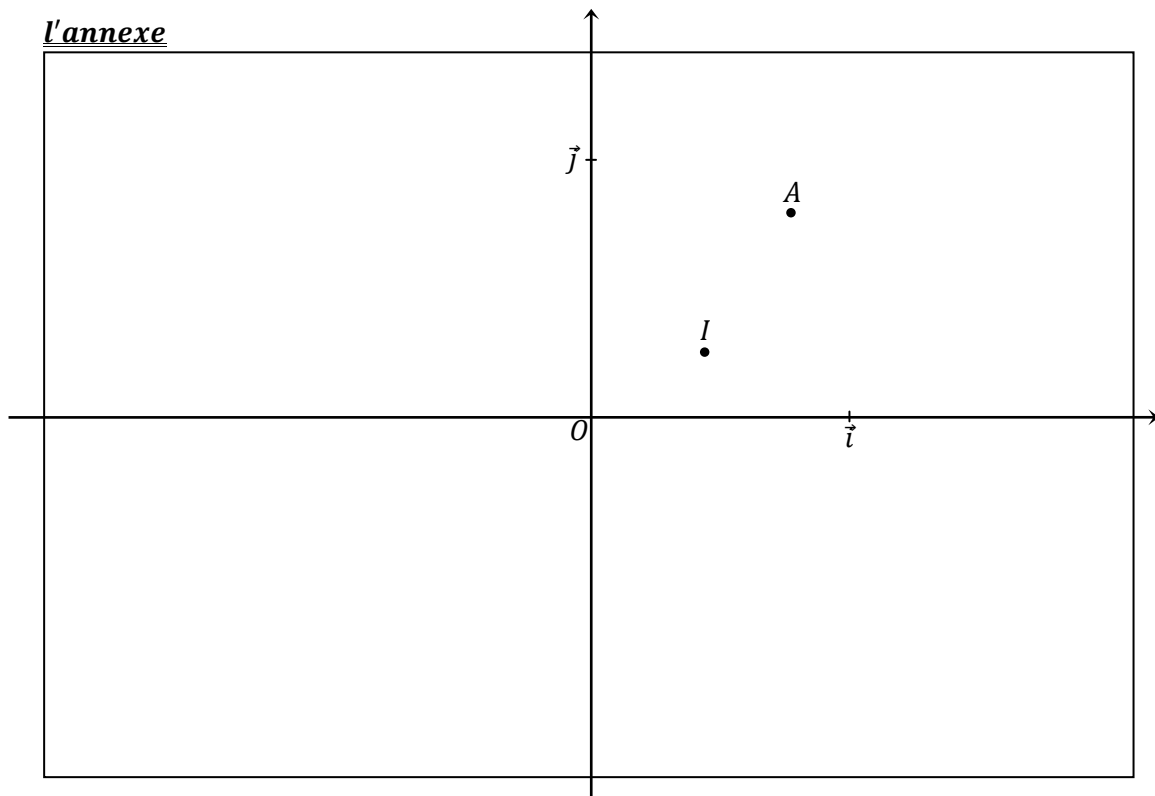
Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \ln(1 + \tan x)$ et soit (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow (\frac{-\pi}{4})^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$.
- b) Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$.
- c) Dresser le tableau de variations de f .
- 2) a) vérifier que les points $O, A(\frac{\pi}{4}, \ln 2)$ et $I(\frac{\pi}{8}, \frac{\ln 2}{2})$ sont des points de (\mathcal{C}) . ($\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$)
- b) Montrer que $f(\frac{\pi}{4} - x) = \ln 2 - f(x)$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$
(On rappelle que $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$)
- c) Justifier alors le point I est un centre de symétrie de la courbe (\mathcal{C}) .

Dans l'annexe ci-jointe on a placé les points I et A dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 3) Tracer la courbe (\mathcal{C}) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) en précisant sa tangente au point O .
- 4) On désigne par \mathcal{S}_1 la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}) , la droite (OA) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{8}$. et on désigne par \mathcal{S}_2 la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}) , la droite (OA) et les droites d'équations $x = \frac{\pi}{8}$ et $x = \frac{\pi}{4}$.
 - a) Justifier que les surfaces \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 ont la même aire
 - b) Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$
- 5) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la réciproque de f .
 - b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour x appartenant à J
 - c) Donner la valeur de $\int_0^{\ln 2} \left(\frac{e^x}{1 + (e^x - 1)^2} \right) dx$

l'annexe



أجوبة امتحان الدورة العادية 2003

التمرين الأول

1 1 1 1 1

ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E)
إذن: $x^2(x^2 + 7) = y(2x + y)$

بما أن: $x = \delta a$ و $y = \delta b$

فإن: $(\delta a)^2((\delta a)^2 + 7) = (\delta b)(2\delta a + \delta b)$

يعني: $(*) \delta^2(a^2(\delta^2 a^2 + 7)) = \delta^2(b(2a + b))$
نختزل بالعدد الغير المنعدم δ^2 نجد: $a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a + b)$

التمرين الأول

1 1 1 1 1

لدينا حسب المعطيات: $x \wedge y = \delta$

إذن $\delta a \wedge \delta b =$ (لأن $x = \delta a$ و $y = \delta b$)

نقسم طرفي هذه المتساوية على العدد الغير المنعدم δ نجد: $a \wedge b = 1$
ومنه: $a^2 \wedge b = 1$

من خلال النتيجة (*) نستنتج أن b يقسم الجداء $a^2(\delta^2 a^2 + 7)$
إذن حسب Gauss نستنتج أن $b / (\delta^2 a^2 + 7)$ (لأن $a^2 \wedge b = 1$)
إذن يوجد عدد نسبي k حيث $(\delta^2 a^2 + 7) = kb$

نعوض في المتساوية (*) بالتعبير $(\delta^2 a^2 + 7) = kb$ نجد:
 $kb a^2 = b(2a + b)$

نختزل بعد ذلك بالعدد الغير المنعدم b نجد: $k a^2 = (2a + b)$

التمرين الأول

1 1 1 1 1

نطلق من الكتابة: $k a^2 = (2a + b)$

يعني $a(ka - 2) = b$. إذن العدد a يقسم العدد b .

يعني أن العدد a يقسم الجداء $b \times 1$

وبما أن $a \wedge b = 1$ فإنه حسب Gauss نستنتج أن a يقسم العدد 1.
و نعلم أن العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الذي يقسم 1 هو 1 نفسه.

إذن: $a = 1$

التمرين الأول

1 1 1 1 1

بتعويض a بالعدد 1 في المتساوية (*) نجد: $\delta^2 + 7 = b(2 + b)$

إذن: $\delta^2 + 7 = b^2 + 2b$

يعني: $\delta^2 + 7 + 1 = \delta^2 + 2b + 1$

يعني: $\delta^2 + 8 = (b + 1)^2$

التمرين الأول

2 1 1 1 1

لنحل في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة: $x^2(x^2 + 7) = y(2x + y)$ (E)

ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E) و δ القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y
إذن حسب النتائج التي تم التوصل إليها من خلال هذا التمرين نستنتج أن:

$x = \delta$ و $(b + 1)^2 = \delta^2 + 8$

إذن: $(b + 1)^2 = x^2 + 8$

يعني: $(b + 1)^2 - x^2 = 8$

يعني أن: $(b + 1 - x)(b + 1 + x) = 8$ (2)

بما أن x و b عنصران من \mathbb{N}^*

فإن $(b + 1 + x)$ عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

ومنه $(b + 1 - x)$ عدد صحيح طبيعي كذلك.

إذن الحالات التي تتحقق فيها المتساوية (2) هي:

$$\begin{cases} (b + 1 - x) = 2 \\ (b + 1 + x) = 4 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} (b + 1 - x) = 4 \\ (b + 1 + x) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b + 1 - x) = 1 \\ (b + 1 + x) = 8 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} (b + 1 - x) = 8 \\ (b + 1 + x) = 1 \end{cases}$$

نحل هذه النظم الأربعة و نلاحظ أنه في حالة واحدة فقط يكون الحلان

صحيحان طبيعياً و هي الحالة $\begin{cases} b + 1 - x = 2 \\ b + 1 + x = 4 \end{cases}$ التي تعطي: $\begin{cases} b = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

و بما أن $y = b\delta = bx$ فإن $y = 2$

و بالتالي المعادلة تقبل حلاً وحيداً في $(\mathbb{N}^*)^2$ و هو الزوج (1,2).

التمرين الثاني

1 1 1 1 1

لدينا المنحنى (E) هو مجموعة النقط $M(x, y)$

حيث $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$

نلاحظ في البداية أن: $\forall x \in [-4; 4]; \sqrt{16 - x^2} \geq 0$

إذن: $(E) = \left\{ M(x, y) / y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}; y \geq 0 \right\}$

$= \left\{ M(x, y) / y^2 = \frac{9}{16}(16 - x^2); y \geq 0 \right\}$

$= \left\{ M(x, y); y^2 + \frac{9}{16}x^2 = 9; y \geq 0 \right\}$

$= \left\{ M(x, y); \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1; y \geq 0 \right\}$

إذن المنحنى (E) هو النصف العلوي للاهليلج الذي مركزه O و رؤوسه

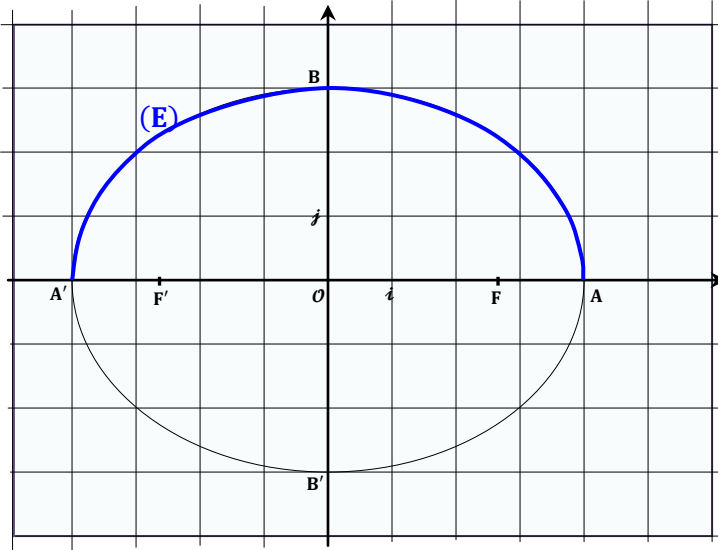
$A(4; 0)$ و $A'(-4; 0)$ و $B(0; 3)$

و الرأس $B'(0; -3)$ لا ينتمي إلى (E).

بؤرتنا هذا الاهليلج هما $F(\sqrt{7}, 0)$ و $F'(-\sqrt{7}, 0)$.

التمرين الثاني

1 1 1 1 1



التمرين الثاني

2 1 1 1 1

لنحسب التكامل التالي: $I(x_1) = \frac{3}{4} \int_{x_1}^4 \sqrt{16 - x^2} dx$

نضع: $x = 4 \cos t$ حيث $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ إذن $dx = -4 \sin t dt$

إذا كان $x = x_1$ فإن $t = t_1$ لأن $x_1 = 4 \cos t_1$

إذا كان $x = 4$ فإن $t = 0$ لأن $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

إذن التكامل $I(x_1)$ يصبح:

$$\begin{aligned} I(x_1) &= \frac{3}{4} \int_{t_1}^0 (4 \sin t)(-4 \sin t) dt \\ &= -12 \int_{t_1}^0 \sin^2 t dt \end{aligned}$$

التمرين الثاني

2

$$S(x_1) = \frac{S}{2} \Leftrightarrow 6t_1 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{\pi}{4}$$

التمرين الثاني

2

لدينا $x_1 = 4 \cos(t_1)$ و $y_1 = 3 \sin(t_1)$

إذن : $\overrightarrow{OM_1} = 4 \cos(t_1) \vec{i} + 3 \sin(t_1) \vec{j}$

من أجل $t_1 = \frac{\pi}{4}$ نحصل على $\overrightarrow{OM_1} = 2\sqrt{2} \vec{i} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \vec{j}$

و نعلم أن $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ و $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$

إذن : $\overrightarrow{OM_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OB}$

إذن النقطة M_1 معرفة بالزوج $(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$ في المعلم $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

التمرين الثالث

1

نختار مصفوفتين $M(a, b)$ و $M(c, d)$ من المجموعة E

و نبين أن مجموعهما هو مصفوفة من E .

$$M(a, b) + M(c, d) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a+c) + (b+d) & -(b+d) \\ (b+d) & (a+c) \end{pmatrix}$$

$$= M((a+c); (b+d)) \in E$$

إذن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ و بنفس الطريقة لدينا :

$$M(a, b) \times M(c, d) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c+d & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (ac-bd) + (bc+ad+bd) & -(bc+ad+bd) \\ (bc+ad+bd) & (ac-bd) \end{pmatrix}$$

$$= M((ac-bd); (bc+ad+bd)) \in E$$

إذن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

التمرين الثالث

2

لنبين أن $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية و **واحدية**.

\times يقبل عنصرا محايدا في E

$(E, +)$ زمرة تبادلية

\times تبادلي في E

\times تجميعي و \times توزيعي بالنسبة لـ $+$

لدينا E جزء مستقر من الزمرة التبادلية $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$

إذن $+$ قانون تركيب داخلي في E

بما أن $+$ تبادلي و تجميعي في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن $+$ تبادلي و تجميعي كذلك في E

و بما أن $M(0,0)$ هو العنصر المحايد لـ $+$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن $M(0,0)$ هو العنصر المحايد لـ $+$ في E

و لدينا : $M(a, b) + M(-a, -b) = M(0,0)$

و كذلك : $M(-a, -b) + M(a, b) = M(0,0)$

إذن كل مصفوفة $M(a, b)$ من E تقبل مائلة $M(-a, -b)$

من E بالنسبة للقانون $+$ و بالتالي $(E, +)$ زمرة تبادلية

من جهة أخرى لدينا $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة

و E جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

إذن \times تجميعي و توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E

لأن \times تجميعي و توزيعي بالنسبة لـ $+$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

و لدينا كذلك $M(a, c) \times M(1,0) = M(a, c)$

و كذلك : $M(1,0) \times M(a, c) = M(a, c)$

إذن المصفوفة $M(1,0)$ هي العنصر المحايد للضرب \times في E

نستعين بقاعدتي Euler في إخطاط الدوال المثلثية :

$$\begin{cases} \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \end{cases}$$

و ذلك للحصول على : $\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t)$

$$I(x_1) = -12 \int_{t_1}^0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t) \right) dt$$

$$= -12 \left(\left[\frac{t}{2} \right]_{t_1}^0 - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_{t_1}^0 \right)$$

$$= -12 \left(\frac{-t_1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{-\sin(2t_1)}{2} \right) \right)$$

$$= 6t_1 - 3 \sin(2t_1)$$

التمرين الثاني

2

لدينا M_1 نقطة من المنحنى (E) و أفصولها x_1

إذن أرتوبها y_1 يحقق : $y_1 = \frac{3}{4} \sqrt{16 - x_1^2}$

و نعلم كذلك أن $x_1 = 4 \cos(t_1)$ إذن نحصل على :

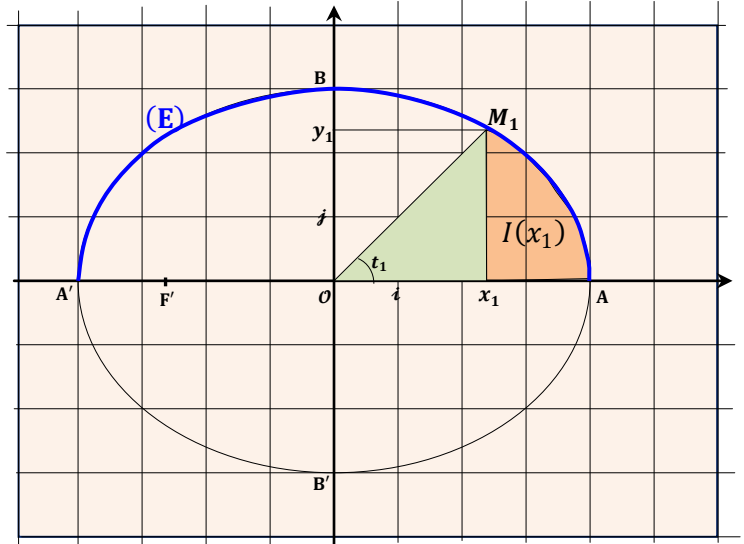
$$y_1 = \frac{3}{4} \sqrt{16 - (4 \cos(t_1))^2} = \frac{3}{4} \sqrt{16(1 - \cos^2(t_1))}$$

$$= \frac{3}{4} \sqrt{16 \sin^2(t_1)} = \frac{3}{4} \cdot 4 \sin(t_1) = 3 \sin(t_1)$$

التمرين الثاني

2

نستعين أثناء الحساب بالشكل التالي :



$$S(x_1) = S(Ox_1M_1) + I(x_1)$$

$$= \frac{x_1 \times y_1}{2} + 6t_1 - 3 \sin(2t_1)$$

$$= \frac{4 \cos(t_1) \times 3 \sin(t_1)}{2} + 6t_1 - 3 \sin(2t_1)$$

$$= 6 \cos(t_1) \sin(t_1) + 6t_1 - 3 \sin(2t_1)$$

$$= 3 \sin(2t_1) + 6t_1 - 3 \sin(2t_1)$$

$$= 6t_1$$

التمرين الثاني

2

$$S(x_1) = 6t_1 \Rightarrow S = S(0) = \frac{6\pi}{2} = 3\pi$$

و كل عنصر من $E \setminus \{M(0,0)\}$ يقبل ممثلاً (مقلوبا) في $E \setminus \{M(0,0)\}$ إذن زمرة $(E \setminus \{M(0,0)\}; \times)$ ونعلم حسب نتائج الأسئلة السابقة أن $(E, +)$ زمرة تبادلية . وكذلك \times تبادلي و توزيعي بالنسبة لـ $+$ في $E \setminus \{M(0,0)\}$. نستنتج إذن من هذه النتائج أن $(E, +, \times)$ **جسم تبادلي** .

- \times تبادلي في $E \setminus \{M(0,0)\}$
- زمرة تبادلية $(E, +)$
- زمرة $(E \setminus \{M(0,0)\}, \times)$
- \times توزيعي على $+$

التمرين الثالث

1 II

ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى \mathbb{R} . هذا يعني أن : $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$; $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ لكي يكون $(1, \sigma)$ أساس الفضاء المتجهي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. يكفي أن تكون الأسرة $(1, \sigma)$ مولدة للفضاء $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ و أن تكون حرة .
 ليكن $z = x + iy$ عددا عقديا و نضع $z = m_1 + m_2\sigma$.
 إذن : $z = x + iy = m_1 + m_2(\sigma_1 + i\sigma_2)$
 يعني : $\begin{cases} x = m_1 + m_2\sigma_1 \\ y = m_2\sigma_2 \end{cases}$ و منه :
 $\begin{cases} m_1 = (x - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}y) \in \mathbb{R} \\ m_2 = (\frac{y}{\sigma_2}) \in \mathbb{R} \end{cases}$
 إذن : $(\forall z \in \mathbb{C}, (\exists (m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2) ; z = m_1 + m_2\sigma)$ و هذا يعني أن الأسرة $(1, \sigma)$ مولدة للفضاء $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
 لتكن $x + \sigma y = 0$ تاليفة خطية معتمدة للعدد 1 و σ إذن $x + \sigma y = 0$ يعني : $x + (\sigma_1 + i\sigma_2)y = 0$ و منه : $x + \sigma_1 y = 0$ و $\sigma_2 y = 0$.
 يعني : $y = 0$ و $x = 0$ و هذا يعني أن الأسرة $(1, \sigma)$ حرة .
 و بالتالي $(1, \sigma)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

التمرين الثالث

2 II

لكي يكون التطبيق ψ تشاكلا تقابليا من $(E, +)$ نحو $(\mathbb{C}, +)$.
 1) : $\forall (M(a, b); M(c, d)) \in E^2 ; \psi(M(a, b) + M(c, d)) = \psi(M(a, b)) + \psi(M(c, d))$
 2) : $\forall z \in \mathbb{C} ; \exists ! M(x, y) \in E : \psi(M(x, y)) = z$
 لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصفوفتين من E .
 لدينا : $\psi(M(a, b) + M(c, d)) = \psi(M(a + c; b + d))$
 $= (a + c) + \sigma(b + d)$
 $= (a + \sigma b) + (c + \sigma d)$
 $= \psi(M(a, b)) + \psi(M(c, d))$
 إذن ψ تشاكل من $(E, +)$ نحو $(\mathbb{C}, +)$.
 ليكن $z = a + \sigma b$ عنصرا من \mathbb{C} .
 لنحل المعادلة $\varphi(M(x, y)) = a + \sigma b$ ذات المجهول $M(x, y)$ في E لدينا : $\psi(M(x, y)) = a + \sigma b$
 يعني : $x + \sigma y = a + \sigma b$
 بما أن $(1, \sigma)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ فإن كل عدد عقدي يُكتب بكيفية وحيدة على شكل تاليفة خطية للعدد 1 و σ .
 نستنتج أن $x = a$ و $y = b$.
 أي : $(\forall a + \sigma b \in \mathbb{C}, (\exists ! M(x, y) \in E) : \psi(M(x, y)) = a + \sigma b)$
 إذن ψ تقابل من $(E, +)$ نحو $(\mathbb{C}, +)$.
 و بالتالي ψ تشاكل تقابلي من $(E, +)$ نحو $(\mathbb{C}, +)$.

و لدينا كذلك : $M(a, b) \times M(c, d) = M((ac - bd); (bc + ad + bd))$

$$= M(c, d) \times M(a, b)$$

إذن \times تبادلي في المجموعة E .

خلاصة : لقد توصلنا إلى النتائج التالية :

- زمرة تبادلية $(E, +)$
 - \times قانون تجميعي في E
 - \times توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E
 - \times يقبل عنصرا محايدا $M(1, 0)$ في E
 - \times تبادلي في E
- و بالتالي $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية و واحدة .

التمرين الثالث

3 I

ليكن x و y عددين حقيقيين حيث $x^2 + xy + y^2 = 0$ نضيف إلى طرفي هذه المتساوية في حالتين $-xy$ و xy لنحصل على النظمة التالية :
 $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - xy = -xy \\ x^2 + xy + y^2 + xy = xy \end{cases}$
 هذه النظمة بعد تنظيمها نحصل على :
 $\begin{cases} x^2 + y^2 = -xy \geq 0 \\ (x + y)^2 = xy \geq 0 \end{cases}$
 نستنتج إذن أن الكمية xy سالبة و موجبة في آن واحد .
 إذن $xy = 0$ و منه $x^2 + y^2 = 0$.
 هذه الكتابة الأخيرة يعني أن (x, y) نقطة من الدائرة (C) التي مركزها O و شعاعها 0 .
 يعني بكل بساطة : $x = y = 0$.
 عكسيا : إذا كان $x = y = 0$ فإن : $x^2 + xy + y^2 = 0$.
 و بالتالي نستنتج التكافؤ التالي :
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x^2 + xy + y^2) \Leftrightarrow (x = y = 0)$

التمرين الثالث

3 I ب

لتكن $M(a, b)$ مصفوفة من E .
 إذن : $\det(M(a, b)) = \begin{vmatrix} a + b & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + ab + b^2$
 و بذلك تكون $M(a, b)$ قابلة للقلب إذا كان $a^2 + ab + b^2 \neq 0$.
 العناصر (a, b) التي من أجلها $a^2 + ab + b^2 = 0$ هي $(a, b) = (0, 0)$.
 إذن لكي يكون $a^2 + ab + b^2 \neq 0$ يكفي أن يكون $a \neq b$ أو $a \neq 0$ أو $b \neq 0$.
 نستنتج أن جميع عناصر المجموعة $E \setminus \{M(0, 0)\}$ قابلة للقلب .
 و لدينا : $(M(a, b))^{-1} = \frac{1}{\det(M(a, b))} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a + b \end{pmatrix}$
 $= \frac{1}{a^2 + ab + b^2} \begin{pmatrix} a + b & -(-b) \\ (-b) & a + b \end{pmatrix}$
 $= \frac{1}{a^2 + ab + b^2} M((a + b); -b)$

التمرين الثالث

3 I ج

تكون الحلقة $(E, +, \times)$ جسم تبادلي إذا تحققت الشروط التالية :

- (1) زمرة تبادلية $(E, +)$
- (2) زمرة $(E \setminus \{M(0, 0)\}, \times)$
- (3) القانون \times توزيعي بالنسبة لـ $+$

نعتبر المجموعة $(E \setminus \{M(0, 0)\}; \times)$.
 لدينا \times قانون تركيب داخلي في $E \setminus \{M(0, 0)\}$.
 لأن E جزء مستقر من الزمرة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
 و لدينا $M(1, 0)$ هو العنصر المحايد لـ \times في $E \setminus \{M(0, 0)\}$.

التمرين الرابع

2 I

لدينا $\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = \frac{4(1 - 2 \ln x)}{x^3}$

- إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1 - 2 \ln x)$.
 - إذا كان $x = \sqrt{e}$ فإن $f'(x) = 0$.
 - إذا كان $x > \sqrt{e}$ فإن $f'(x) < 0$.
 - إذا كان $x < \sqrt{e}$ فإن $f'(x) > 0$.
- نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0	\sqrt{e}	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		+	-
f	$-\infty$	$\frac{2}{e} - \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

التمرين الرابع

3 I

- لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f :
 دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $]1, \sqrt{e}[$.
 إذن f تقابل من المجال $]1, \sqrt{e}[$ نحو المجال $]f(1), f(\sqrt{e})[$.
 أي f تقابل من $]1, \sqrt{e}[$ نحو $]0, 2[; -0,5 ;$
 وبما أن $0 \in]-0,5 ; 0, 2[$ فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً α
 في المجال $]1, \sqrt{e}[$ بالتقابل f .
 أي : $\exists ! \alpha \in]1, \sqrt{e}[; f(\alpha) = 0$ (1)
 وبفس الطريقة : f متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $]\sqrt{e}, +\infty[$.
 إذن f تقابل من أي مجال J يوجد ضمن $]\sqrt{e}, +\infty[$ نحو صورته $f(J)$.
 أي أن f تقابل من $]\sqrt{e}, 3[$ نحو $]0, 2[; -0,01 ;$
 وبما أن $0 \in]-0,01 ; 0, 2[$ فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً β
 في المجال $]\sqrt{e}, 3[$ بالتقابل f .
 أي : $\exists ! \beta \in]\sqrt{e}, 3[; f(\beta) = 0$ (2)
 من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين α و β
 حيث $1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3$.

التمرين الرابع

4 I

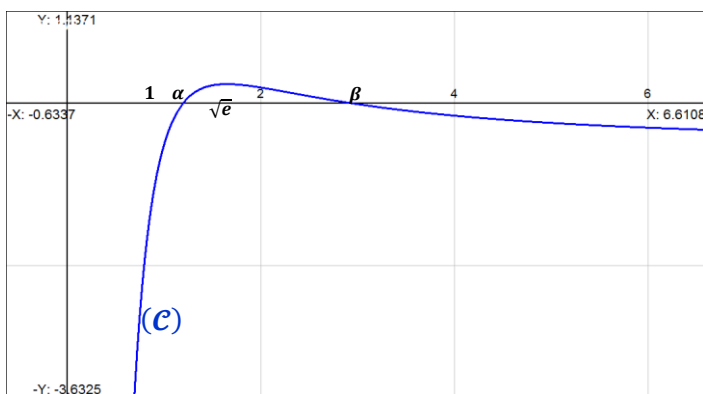
معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الأضلاع 1
 تُكتب على شكل : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$$= 4(x - 1) + \left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$= 4x - \frac{9}{2}$$
 و بالتالي : $(T) : y = 4x - \frac{9}{2}$

التمرين الرابع

5 I



التمرين الثالث

3 II

لنحل في \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - z + 1 = 0$
 بعد حساب المميز $\Delta = (i\sqrt{3})^2$ نجد :
 إذن هذه المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين .

$$z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

$$z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

التمرين الثالث

4 II

من أجل : $\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا : $\sigma^2 + 1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$

$$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma$$

إذن : $\sigma^2 = (\sigma - 1)$

لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصوفتين من E .

$$\psi(M(a, b) \times M(c, d)) = \psi(M(ac - bd ; bc + ad + bd))$$

$$= (ac - bd) + \sigma(bc + ad + bd)$$

من جهة أخرى لدينا :

$$\psi(M(a, b)) \times \psi(M(c, d)) = (a + \sigma b) \times (c + \sigma d)$$

$$= ac + ad\sigma + bc\sigma + bd\sigma^2$$

$$= ac + ad\sigma + bc\sigma + bd(\sigma - 1)$$

$$= ac + ad\sigma + bc\sigma + bd\sigma - bd$$

$$= (ac - bd) + \sigma(bc + ad + bd)$$

إذن : $\psi(M(a, b) \times M(c, d)) = \psi(M(a, b)) \times \psi(M(c, d))$
 و بالتالي ψ تشاكل من (E, \times) نحو (\mathbb{C}, \times) .

التمرين الرابع

1 I

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{4}{x}\right) \left(\frac{\ln x}{x}\right) - \frac{1}{2} = -\infty$

إذن محور الأرتاب مقارب عمودي لـ (C) على يمين 0.

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x}\right) \left(\frac{\ln x}{x}\right) - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$

إذن المستقيم $y = \frac{-1}{2}$ مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

التمرين الرابع

2 I

f دالة قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$
 لأنها فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0, +\infty[$.
 ليكن x عنصراً من المجال $]0, +\infty[$.
 لدينا : $f'(x) = 4\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{4(x - 2x \ln x)}{x^4} = \frac{4(1 - 2 \ln x)}{x^3}$

إذا كان : $x > e^{\frac{5}{6}}$. فإن : $6 \ln x - 5 > 0$. ومنه : $f_n''(x) > 0$
 إذا كان : $x < e^{\frac{5}{6}}$. فإن : $6 \ln x - 5 < 0$. ومنه : $f_n''(x) < 0$
 نلاحظ أن $f_n''(x)$ تنعدم في النقطة ذات الأفصول $e^{\frac{5}{6}}$
 و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطة .
 إذن (C_n) يقبل نقطة انعطاف وهي $(e^{\frac{5}{6}} ; \frac{5n}{6} e^{-\frac{5}{6}} - \frac{1}{2})$.

التمرين الرابع

لدينا : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln x}{x^2}$
 إذا كان : $x = 0$. فإن : $f_{n+1}(x) = f_n(x)$
 إذا كان : $x > 0$. فإن : $f_{n+1}(x) > f_n(x)$
 إذا كان : $x < 0$. فإن : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

التمرين الرابع

x	0	1	$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	-	0	+
الوضع النسبي (C_{n+1}) و (C_n)	(C_n) يوجد فرق (C_{n+1})	(C_{n+1}) و (C_n) يتقاطعان	(C_n) يوجد فرق (C_{n+1})

التمرين الرابع

لدينا f_n دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $]0, \sqrt{e}[$.
 إذن f_n تقابل من أي مجال I يوجد ضمن $]0, \sqrt{e}[$ نحو صورته $f_n(I)$.
 ومنه f_n تقابل من $]1, \sqrt{e}[$ نحو $] -0,5 ; 0,2[$.
 وبما أن $0 \in] -0,5 ; 0,2[$ فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً u_n
 من المجال $]1, \sqrt{e}[$.
 يعني : $\exists ! u_n \in]1, \sqrt{e}[; f_n(u_n) = 0$ (1)
 و بنفس الطريقة لدينا f_n متصلة و تناقصية قطعاً على $]\sqrt{e}, +\infty[$.
 إذن f_n تقابل من أي مجال J يوجد ضمن $]\sqrt{e}, +\infty[$ نحو صورته $f_n(J)$.
 ومنه f_n تقابل من $]\sqrt{e}, n[$ نحو $] -0,2 ; \frac{1}{e}[$.
 وبما أن : $0 \in] -0,2 ; \frac{1}{e}[$ لأن $0 \in] -0,2 ; \frac{1}{e}[$.
 فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً v_n من المجال $]\sqrt{e}, n[$.
 يعني : $\exists ! v_n > \sqrt{e} ; f_n(v_n) = 0$ (2)
 من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط
 حلين u_n و v_n حيث $1 < u_n < \sqrt{e} < v_n$.

التمرين الرابع

لدينا : $\sqrt{e} > u_n > 1$ (إذن حسب III) .
 نستنتج أن $f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n)$.
 و نعلم أن : $f_{n+1}(u_{n+1}) = f_n(u_n) = 0$.
 إذن : $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$.
 و بما أن f_{n+1} دالة تزايدية قطعاً على $]1, \sqrt{e}[$.
 فإن دالتها العكسية تزايدية تزايدية قطعاً كذلك .
 و منه : $f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(u_n)) > f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(u_{n+1}))$.
 يعني : $u_n > u_{n+1}$; $(\forall n \geq 4)$.
 و بالتالي $(u_n)_{n \geq 4}$ متتالية تناقصية قطعاً .

التمرين الرابع

$$t \geq 0 \Rightarrow -t^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 - t^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow (1-t)(1+t) \leq 1$$

$$\Rightarrow (1-t) \leq \frac{1}{1+t} ; \text{avec } (1+t) \neq 0$$

$$t \geq 0 \Rightarrow 1+t \geq 1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+t} \leq 1 ; \text{avec } (1+t) \neq 0$$

$$(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\forall t \in [0, +\infty[; (1-t) \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

التمرين الرابع

ليكن a عنصراً من المجال $[0, +\infty[$.

$$t \geq 0 \Rightarrow (1-t) \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_0^a (1-t) dt \leq \int_0^a \left(\frac{1}{1+t}\right) dt \leq \int_0^a 1 dt$$

car ces fonctions sont continues et $0 < a$

$$\Rightarrow \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^a \leq [\ln|1+t|]_0^a \leq [t]_0^a$$

$$\Rightarrow \left(a - \frac{a^2}{2}\right) \leq \ln(1+a) \leq a$$

التمرين الرابع

لدينا f_n دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.
 لأنها عبارة عن فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0, +\infty[$.
 ليكن x عنصراً من المجال $]0, +\infty[$.
 لدينا : $f_n'(x) = n \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{n(1-2 \ln x)}{x^2}$
 بما أن : $\forall x > 0 ; \frac{n}{x^3} \geq 0$.
 فإن إشارة $f_n'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-2 \ln x)$.
 نستنتج إذن الجدول التالي :

x	0	\sqrt{e}	$+\infty$
$f_n'(x)$	+	0	-
f_n	$-\infty$	$\frac{n}{2e} - \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

التمرين الرابع

دراسة التقعر و نقط الإنعطاف يستدعي حساب المشتقة الثانية لـ f_n .

$$f_n''(x) = \frac{x^3 \left(\frac{-2n}{x}\right) - 3x^2 n(1-2 \ln x)}{x^6} = \frac{n(6 \ln x - 5)}{x^4}$$
 إذن $f_n''(x)$ تنعدم إذا كان $6 \ln x - 5 = 0$.
 يعني : $\ln x = \frac{5}{6}$ أي : $x = e^{\frac{5}{6}}$.

we have : $\left(\frac{1}{2n}\right) \leq u_n - 1 \leq \left(\frac{e}{n}\right)$
 $\swarrow \quad \searrow$
 $n^\infty \quad n^\infty$
 $0 \quad 0$

Therefore : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - 1) = 0$

which means : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 1$

$n \geq 4 \Rightarrow \frac{5n}{6} e^{-\frac{5}{3}} \geq \frac{20}{6} e^{-\frac{5}{3}} \approx 0,63 > 0,5$
 $\Rightarrow \frac{5n}{6} e^{-\frac{5}{3}} \geq 0,5$
 $\Rightarrow \frac{5n}{6} e^{-\frac{5}{3}} - \frac{1}{2} \geq 0$
 $\Rightarrow f_n \left(e^{\frac{5}{6}} \right) \geq f_n(v_n)$
 $\Rightarrow e^{\frac{5}{6}} \leq v_n ; \text{ car } f_n \text{ est } \searrow \text{ sur }]\sqrt{e}, +\infty[$

$f_n(v_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{n \ln(v_n)}{(v_n)^2} = \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow \ln(v_n) = \frac{(v_n)^2}{2n} \quad (*)$

$v_n > e^{\frac{5}{6}} \Rightarrow \ln(v_n) > \frac{5}{6}$
 $\Rightarrow \frac{(v_n)^2}{2n} > \frac{5}{6} ; \text{ d'après } (*)$
 $\Rightarrow (v_n)^2 > \frac{10n}{6}$
 $\Rightarrow v_n > \sqrt{\frac{10n}{6}}$
 $\Rightarrow v_n > \left(\sqrt{\frac{10n}{6}} \right)$
 $\swarrow \quad \searrow$
 $n^\infty \quad +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = +\infty$

$\forall a \geq 0 ; a - \frac{a^2}{2} \leq \ln(1+a) \leq a$: لدينا
 $u_n > 1 \Rightarrow u_n - 1 > 0$
 $\Rightarrow (u_n - 1) - \frac{(u_n - 1)^2}{2} \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1)$
 $\Rightarrow \frac{2(u_n - 1) - (u_n - 1)^2}{2} \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1)$
 $\Rightarrow \frac{(u_n - 1)(3 - u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1) \quad (*)$

$f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{n \ln(u_n)}{(u_n)^2} = \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow \ln(u_n) = \frac{(u_n)^2}{2n}$

$(*) \Rightarrow \ln(u_n) \leq u_n - 1$
 $\Rightarrow \frac{(u_n)^2}{2n} \leq u_n - 1 \quad (7)$

$(*) \Rightarrow \frac{(u_n - 1)(3 - u_n)}{2} \leq \ln(u_n)$
 $\Rightarrow \frac{(u_n - 1)(3 - u_n)}{2} \leq \frac{(u_n)^2}{2n}$
 $\Rightarrow (u_n - 1) \leq \frac{2(u_n)^2}{2n(3 - u_n)}$
 $\Rightarrow (u_n - 1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3 - u_n)} \quad (8)$

$(7) \text{ et } (8) \Rightarrow \frac{(u_n)^2}{2n} \leq (u_n - 1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3 - u_n)} \quad (9)$

$u_n < \sqrt{e} \Rightarrow \frac{(u_n)^2}{2n} \leq \frac{e}{2n} \quad (10)$

$u_n < \sqrt{e} \Rightarrow 3 - u_n > 3 - \sqrt{e}$
 $\Rightarrow \frac{1}{3 - u_n} < \frac{1}{3 - \sqrt{e}} < 1$
 $\Rightarrow \frac{1}{3 - u_n} < 1 \quad (11)$

$(10) \times (11) \Rightarrow \frac{(u_n)^2}{n(3 - u_n)} < \frac{e}{n} \quad (12)$

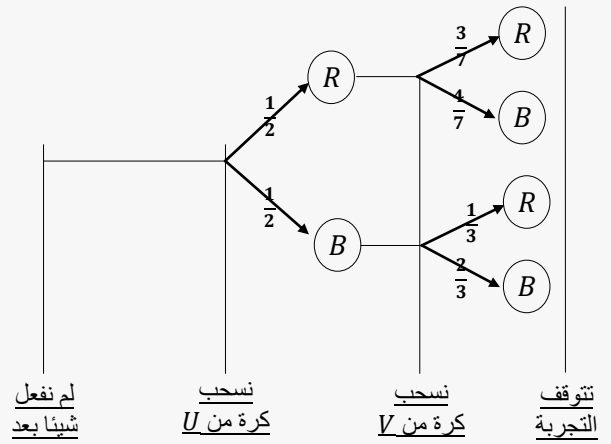
(9) et (10) et (12)

$\Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{(u_n)^2}{2n} \leq (u_n - 1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3 - u_n)} \leq \frac{e}{n}$
 $\Rightarrow (\forall n \geq 4) ; \frac{1}{2n} \leq u_n - 1 \leq \frac{e}{n}$

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2003

التمرين الأول

نحول معطيات التمرين إلى شجرة الاحتمالات التالية :



من خلال هذه الشجرة لدينا : $p(R_1) = p(B_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

التمرين الأول

$$p_{B_1}(B_2) = \frac{p(B_1 \cap B_2)}{p(B_1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$p_{R_1}(B_2) = \frac{p(R_1 \cap B_2)}{p(R_1)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{7}$$

التمرين الأول

$$\begin{aligned} p(B_2) &= p(R_1 \cap B_2) + p(B_1 \cap B_2) \\ &= p(R_1) \times p_{R_1}(B_2) + p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) \\ &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{13}{21} \end{aligned}$$

التمرين الأول

الطريقة الأولى : استعمال تقنية الحدث المؤكد .

$$\begin{aligned} p(B_2) + p(R_2) &= 1 \Leftrightarrow p(R_2) = 1 - p(B_2) \\ &\Leftrightarrow p(R_2) = 1 - \frac{13}{21} = \frac{8}{21} \end{aligned}$$

الطريقة الثانية : استعمال الشجرة .

$$\begin{aligned} p(R_2) &= p(R_1 \cap R_2) + p(B_1 \cap R_2) \\ &= p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) + p(B_1) \times p_{B_1}(R_2) \\ &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{21} \end{aligned}$$

التمرين الثاني

It's an easy calculus, just do it

التمرين الثاني

$$\begin{aligned} \Delta' &= p^2 - 16 = (3 \cos \theta + 5i \sin \theta)^2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} z_1 = p + (3 \cos \theta + 5i \sin \theta) = 2e^{-i\theta} \\ z_2 = p - (3 \cos \theta + 5i \sin \theta) = 8e^{i\theta} \end{cases} \end{aligned}$$

التمرين الثاني

ليكن θ عنصرا من $[0, 2\pi[$. $aff(M_1) = 2e^{-i\theta} = x + iy$

$$\Leftrightarrow 2 \cos(-\theta) + 2i \sin(-\theta) = x + iy$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos \theta = x \\ -2 \sin \theta = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (2 \cos \theta)^2 + (-2 \sin \theta)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow M_1(x, y) \in \mathcal{C}(0; 2)$$

التمرين الثاني

$[M_1 M_2]$ منتصف $P \Leftrightarrow aff(P) = \frac{aff(M_1) + aff(M_2)}{2}$

$$\Leftrightarrow aff(P) = \frac{2e^{-i\theta} + 8e^{i\theta}}{2}$$

$$\Leftrightarrow aff(P) = 5 \cos \theta + 3i \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow aff(P) = p = x + iy ; \begin{cases} x = 5 \cos \theta \\ y = 3 \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow p^2 - (3 \cos \theta + 5i \sin \theta)^2 = 16$$

$$\Rightarrow (x + iy)^2 - \left(\frac{3x}{5} + \frac{5i}{3}y\right)^2 = 16$$

$$\Rightarrow \frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{9}y^2 = 16$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

عندما يتغير العدد θ في المجال $[0, 2\pi[$ فإن النقطة P تتغير على الإهليلج

(Γ) الذي مركزه O ورؤوسه $A(5, 0)$ و $A'(-5, 0)$ و $B(0, 3)$

و $B'(0, -3)$. وبؤراته $F(4, 0)$ و $F'(-4, 0)$.

التمرين الثاني

ليكن a و b عنصريين من $\mathbb{C} \setminus \{4\}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{b+4}{b-4}\right) &= -\left(\frac{a+4}{a-4}\right) \Leftrightarrow (b+4)(4-a) = (b-4)(a+4) \\ &\Leftrightarrow 2ab = 32 \\ &\Leftrightarrow ab = 16 \end{aligned}$$

التمرين الثاني

لدينا $z_2 = 8e^{i\theta} \neq 4$ و $z_1 = 2e^{-i\theta} \neq 4$

إذن : $z_1 z_2 = 16e^{i\theta} e^{-i\theta} = 16$

و منه حسب (3 أ) : $\left(\frac{z_2+4}{z_2-4}\right) = -\left(\frac{z_1+4}{z_1-4}\right)$

التمرين الثاني

$$\left(\frac{z_2+4}{z_2-4}\right) = -\left(\frac{z_1+4}{z_1-4}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{4-z_1}{-4-z_1}\right) = -\left(\frac{4-z_2}{-4-z_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_F - z_1}{z_{F'} - z_1}\right) = -\left(\frac{z_F - z_2}{z_{F'} - z_2}\right)$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_F - z_1}{z_{F'} - z_1}\right) \equiv \pi + \arg\left(\frac{z_F - z_2}{z_{F'} - z_2}\right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \overline{(M_1 \vec{F}, M_1 \vec{F}')} \equiv \pi + \overline{(M_2 \vec{F}, M_2 \vec{F}')} [2\pi]$$

التمرين الثالث

ب 2

لتكن $M(a, b)$ مصفوفة من E .

$$\begin{aligned} (M(a, b))^{-1} &= \frac{1}{\det(M(a, b))} \begin{pmatrix} a & -b\sqrt{2} \\ -b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 - 2b^2} \begin{pmatrix} a & -b\sqrt{2} \\ -b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1} \begin{pmatrix} a & -b\sqrt{2} \\ -b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} \\ &= M(a, -b) \in E \end{aligned}$$

و بالتالي مقلوب كل مصفوفة $M(a, b)$ هو المصفوفة $M(a, -b)$.
أو بتعبير آخر : $(M(a, b))^{-1} = M(a, -b)$

التمرين الثالث

ج 2

من خلال الأسئلة السابقة حصلنا على أن \times قانون تركيب داخلي في المجموعة E لأن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
وبما أن \times تجميعي في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. فإن \times تجميعي كذلك في E
و بما أن المصفوفة $I = M(1, 0)$ هي العنصر المحايد لـ \times في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
فإن $I = M(1, 0)$ هي العنصر المحايد لـ \times في E .
و ذلك لأن العنصر المحايد إن وجد فإنه يكون دائما وحيدا.
و توصلنا كذلك إلى أن كل مصفوفة $M(a, b)$ لها ممتثلة في E
و هي المصفوفة $M(a, -b)$.
إذن نستنتج من هذه الأشياء أن (E, \times) زمرة
و نضيف على أن \times تبادلي في E .
و بالتالي (E, \times) زمرة تبادلية.

التمرين الثالث

أ 3

ليكن X عنصر من G .
إذن يوجد m من \mathbb{N} حيث $X = A^m$.
نعتبر العبارة (P_n) التالية : $A^n \in E$.
و لنبرهن على صحة هذه العبارة بالترجع.
من أجل $n = 0$ لدينا $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(1, 0) \in E$
إذن العبارة (P_0) صحيحة.
ليكن n عنصرا من \mathbb{N} و نفترض أن (P_n) صحيحة.
إذن $A^n \in E$ و $A \in E$.
و بما أن \times قانون تركيب داخلي في E .
فإن : $A^{n+1} \in E$ يعني $A^n \times A \in E$.
و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة.
لقد حصلنا على الوضعية الترجعية التالية :
 $\{ (P_0) \text{ est vraie} \}$
 $\{ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N} \}$

إذن حسب مبدأ التراجع : $(P_n) \text{ est toujours vraie}$.
يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; A^n \in E$.
من أجل المصفوفة $X = A^m \in E$ نجد $X = A^m \in E$
و بالتالي نحصل على استلزام ثمين و هو :
 $X \in G \Rightarrow X \in E$
و من هذا الاستلزام نستنتج أن : $G \subseteq E$.

التمرين الثالث

ب 3

لكي نبين أن : $H = \{ B^n ; n \in \mathbb{N} \}$
يكفي أن نبين : $(A^n)^{-1} = B^n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.
نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(A^n)^{-1} = B^n$.
من أجل $n = 0$ لدينا : $(A^0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = I = B^0$
إذن العبارة (P_0) صحيحة.

التمرين الثاني

أ 4

لدينا : $P(5 \cos \theta ; 3 \sin \theta)$.
إذن معادلة المماس (T) للمنحن (Γ) في النقطة P هي :
 $(T) : \frac{5x \cos \theta}{5^2} + \frac{3y \sin \theta}{3^2} = 1$
 $(T) : 3x \cos \theta + 5y \sin \theta = 15$

التمرين الثاني

ب 4

لدينا : $(T) : 3x \cos \theta + 5y \sin \theta = 15$
إذن : $(T) : y = \left(\frac{-3 \cos \theta}{5 \sin \theta} \right) x + \left(\frac{3}{\sin \theta} \right)$
إذن ميل المستقيم (T) هو $\left(\frac{-3 \cos \theta}{5 \sin \theta} \right)$. (1)
لنحسب الآن m ميل المستقيم $(M_1 M_2)$.
لدينا : $M_2 \begin{pmatrix} 8 \cos \theta \\ 8 \sin \theta \end{pmatrix}$ و $M_1 \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ -2 \sin \theta \end{pmatrix}$.
إذن : $m = \frac{8 \sin \theta - (-2 \sin \theta)}{8 \cos \theta - 2 \cos \theta} = \frac{5 \sin \theta}{3 \cos \theta}$
إذن ميل المستقيم $(M_1 M_2)$ هو $\left(\frac{5 \sin \theta}{3 \cos \theta} \right)$ (2)
من (1) و (2) نستنتج أن (T) و $(M_1 M_2)$ متعامدان.
لأن جداء ميليهما يساوي (-1) .
يعني : $\left(\frac{-3 \cos \theta}{5 \sin \theta} \right) \times \left(\frac{5 \sin \theta}{3 \cos \theta} \right) = -1$

التمرين الثالث

1

نضع : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$.
نلاحظ أن : $3^2 - 2 \times 2^2 = 1$
إذن : $A = M(3, 2) \in E$

التمرين الثالث

أ 2

لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصفوفتين من E .
$$\begin{aligned} M(a, b) \times M(c, d) &= \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d\sqrt{2} \\ d\sqrt{2} & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac + 2bd & (bc + ad)\sqrt{2} \\ (bc + ad)\sqrt{2} & ac + 2bd \end{pmatrix} \\ &= M((ac + 2bd) ; (ad + bc)) \quad (*) \end{aligned}$$

و لدينا من جهة أخرى :
$$\begin{aligned} (ac + 2bd) - 2(bc + ad)^2 &= (ac)^2 + 4(bd)^2 - 2(bc)^2 - 2(ad)^2 \\ &= c^2 \underbrace{(a^2 - 2b^2)}_{=1} + 2d^2 \underbrace{(2b^2 - a^2)}_{=1} \\ &= c^2 + 2d^2 = 1 \end{aligned}$$

إذن : $M(ac + 2bd ; bc + ad) \in E$.
يعني : $\forall M(a, b), M(c, d) \in E ; M(a, b) \times M(c, d) \in E$.
و بالتالي E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
و لدينا حسب النتيجة (*) :
$$\begin{aligned} M(a, b) \times M(c, d) &= M(ac + 2bd ; ad + bc) \\ &= M(ca + 2db ; cb + da) \\ &= M(c, d) \times M(a, b) \end{aligned}$$

إذن القانون \times تبادلي في E .

التمرين الرابع

1 1

لدينا : $g_n(x) = x + e^{-nx}$
 إذن g_n دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها مجموع دالتين اعتياديتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} .

لدينا : $g'_n(x) = 1 - n e^{-nx} = e^{-nx} (e^{nx} - n)$
 بما أن : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) ; e^{-nx} > 0$
 فإن إشارة $g'_n(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(e^{nx} - n)$
 إذا كان : $x = \frac{\ln n}{n}$: فإن : $g'_n(x) = 0$
 إذا كان : $x > \frac{\ln n}{n}$: فإن : $g'_n(x) > 0$
 إذا كان : $x < \frac{\ln n}{n}$: فإن : $g'_n(x) < 0$
 وأضيف النهايتين عند محداث مجموعة تعريف الدالة g_n .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-nx}) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^{-nx}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{nx}{n} \left(1 + \frac{n}{nx e^{nx}}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} t \left(1 + \frac{n}{te^t}\right) \right) = \frac{1}{n} ((-\infty)(1 + (-\infty))) = +\infty$$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

x	$-\infty$	$\frac{\ln n}{n}$	$+\infty$
$g'_n(x)$	-	0	+
g_n	$+\infty$	$g_n\left(\frac{\ln n}{n}\right)$	$+\infty$

التمرين الرابع

1 1

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة g_n
 دالة متصلة على \mathbb{R} بأكمله.

و الدالة g_n تناقصية على المجال $]-\infty, \frac{\ln n}{n}[$
 و الدالة g_n تزايدية على المجال $]\frac{\ln n}{n}, +\infty[$

إذن g_n تقبل مطرافا عند $u_n = \frac{\ln n}{n}$ و هذا المطراف عبارة عن قيمة

دنوية معرفة بما يلي : $g_n(u_n) = g_n\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \frac{1 + \ln n}{n}$

التمرين الرابع

2 1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^{-nx}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{n}{nx e^{nx}}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} t \left(1 + \frac{n}{te^t}\right) \right) = \frac{1}{n} ((-\infty)(1 + (-\infty))) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-nx}) = +\infty + 0 = +\infty$$

www.bestcours.net

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و نفترض أن $(A^n)^{-1} = B^n$
 لدينا : $(A^{n+1})^{-1} = (A^n \times A)^{-1} = A^{-1} \times (A^n)^{-1}$
 $= B \times B^n = B^n \times B = B^{n+1}$

إذن : $(A^{n+1})^{-1} = B^{n+1}$ أي أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

نحصل إذن على الوضعية التالية : (P_0) est vraie
 $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N}$

إذن حسب مبدأ التراجع : (P_n) est toujours vraie

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) : (A^n)^{-1} = B^n$

و بالتالي : $H = \{B^n ; n \in \mathbb{N}\}$

التمرين الثالث

3

في البداية يجب أن نبين الخاصية التالية :

(#) $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 ; A^m \times B^n \in G \cup H$
 ليكن m و n عددان صحيحان طبيعيين. و نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان $m \geq n$.

لدينا : $A^m \times B^n = A^{m-n} \times (A \times B)^n$
 $= A^{m-n} \times I^n$
 $= A^{m-n} \in G \subset G \cup H$

إذن : $\forall (m \geq n) ; A^m \times B^n \in G \cup H$

الحالة الثانية : إذا كان $m \leq n$.

لدينا : $A^m \times B^n = (A \times B)^m \times B^{n-m}$
 $= I^m \times B^{n-m}$
 $= B^{n-m} \in H \subset G \cup H$

إذن : $\forall (m \leq n) ; A^m \times B^n \in G \cup H$

و بالتالي : (#) $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 ; A^m \times B^n \in G \cup H$

نستغل إذن هذه الخاصية الثمينة للإجابة على السؤال (ج) :

لدينا $G \cup H$ جزء غير فارغ من المجموعة E .

لأن H و G جزءان غير فارغان من E .

لتكن X و Y مصفوفتين من الاتحاد $G \cup H$ و نفصل بين أربع حالات :

الحالة الأولى : إذا كان $X \in G$ و $Y \in G$.

إذن : $\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2 ; X = A^m$ et $Y = A^n$

و منه : $X \times Y^{-1} = A^m \times (A^n)^{-1}$

أي : $X \times Y^{-1} = A^m \times B^n \in G \cup H$

إذن : $\forall (X, Y) \in G^2 ; X \times Y^{-1} \in G \cup H$

الحالة الثانية : إذا كان $X \in H$ و $Y \in H$.

إذن : $\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2 ; X = B^m$ et $Y = B^n$

و منه : $X \times Y^{-1} = B^m \times (B^n)^{-1}$

يعني : $X \times Y^{-1} = B^m \times A^n \in G \cup H$

إذن : $\forall (X, Y) \in H^2 ; X \times Y^{-1} \in G \cup H$

الحالة الثالثة : إذا كان $X \in G$ و $Y \in H$.

إذن : $\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2 ; X = A^m$ et $Y = B^n$

و منه : $X \times Y^{-1} = A^m \times (B^n)^{-1}$

أي : $X \times Y^{-1} = A^m \times A^n = A^{m+n} \in G \subset G \cup H$

إذن : $(\forall X \in G), (\forall Y \in H) ; X \times Y^{-1} \in G \cup H$

الحالة الرابعة : إذا كان $X \in H$ و $Y \in G$.

إذن : $\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2 ; X = B^m$ et $Y = A^n$

و منه : $X \times Y^{-1} = B^m \times (A^n)^{-1}$

أي : $X \times Y^{-1} = B^m \times B^n = B^{m+n} \in H \subset G \cup H$

إذن : $(\forall X \in H), (\forall Y \in G) ; X \times Y^{-1} \in G \cup H$

خلاصة القول : نستنتج من جميع هذه الحالات الأربع أن :

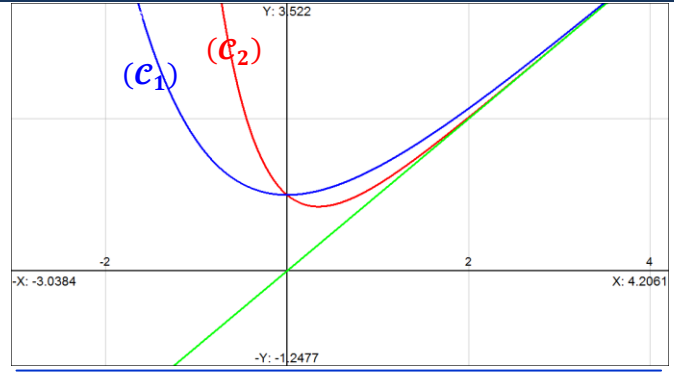
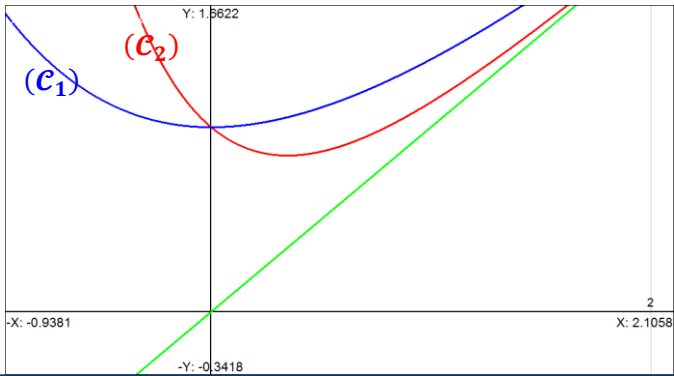
$$\forall (X, Y) \in (G \cup H)^2 ; X \times Y^{-1} \in G \cup H$$

إذن حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية .

نستنتج أن $(G \cup H, \times)$ زمرة جزئية من الزمرة الأم (E, \times) .

التمرين الرابع

3 I



التمرين الرابع

4 I

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int_0^x \frac{t}{u(t)} \cdot \frac{e^{-2t}}{v'(t)} dt \\
 &= [u(t) \cdot v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t) \cdot v(t) dt \\
 &= \left[t \cdot \left(\frac{e^{-2t}}{-2} \right) \right]_0^x - \int_0^x 1 \cdot \left(\frac{e^{-2t}}{-2} \right) dt \\
 &= \left[\frac{-t e^{-2t}}{2} \right]_0^x + \frac{1}{2} \left[\frac{-e^{-2t}}{2} \right]_0^x \\
 &= \frac{-x e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{-e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{-e^{-2x}}{4} (2x + 1 - e^{2x}) \\
 I(x) &= \frac{-e^{-2x}}{4} (2x + 1 - e^{2x}) \quad \text{إذن}
 \end{aligned}$$

التمرين الرابع

4 I

لدينا: $\forall x \in [0, \ln 2]; h_2(x) = x + e^{-2x}$
 إذن h_2 متصلة على المجال $[0, \ln 2]$.

وكذلك: $\forall x \in [0, \ln 2]; h_2(x) = x + e^{-2x}$

إذن حجم مجسم الدوران الذي يُولده دوران التمثيل المبياني لـ h_2 حول محور الأفاصيل هو:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^{\ln 2} (h_2(x))^2 dx = \pi \int_0^{\ln 2} (x + e^{-2x})^2 dx \\
 &= \pi \int_0^{\ln 2} (x^2 + e^{-4x} + 2x e^{-2x}) dx \\
 &= \pi \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\ln 2} + \left[\frac{-e^{-4x}}{4} \right]_0^{\ln 2} + 2 \times I(\ln 2) \right) \\
 &= \pi \left(\frac{(\ln 2)^3}{3} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{39}{64} \right)
 \end{aligned}$$

التمرين الرابع

2 I

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n}{nx e^{nx}} \right) = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g_n(x) - 1x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-nx} = 0$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_n(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (g_n(x) - 1x) = 0 \end{cases}$$

إذن نحن أمام الوضعية التالية:

يعني أن المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_n) بجوار $(+\infty)$.

من جهة أخرى لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{n}{nx e^{nx}} \right) = 1 + (-\infty) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g_n(x)}{x} = -\infty \end{cases}$$

إذن نحن أمام الوضعية التالية:

إذن (C_n) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتايب.

التمرين الرابع

3 I

لدراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) ندرس إشارة الفرق $g_1(x) - g_2(x)$.

$$\begin{aligned}
 g_1(x) - g_2(x) &= (x + e^{-x}) - (x + e^{-2x}) \\
 &= (e^{-x} - e^{-2x}) \\
 &= e^{-x} (1 - e^{-x})
 \end{aligned}$$

لدينا:

بما أن: $\forall x \in \mathbb{R} : e^{-x} > 0$

فإن إشارة الفرق $g_1(x) - g_2(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $(1 - e^{-x})$ ونفصل هنا بين ثلاث حالات ممكنة:

الحالة الأولى: إذا كان $x = 0$.

فإن $(1 - e^{-x}) = 0$ ومنه $g_1(x) = g_2(x)$.

إذن (C_1) و (C_2) يتقاطعان في النقطة $(0, 1)$.

الحالة الثانية: إذا كان $x > 0$.

فإن $(1 - e^{-x}) > 0$ ومنه $g_1(x) > g_2(x)$.

إذن المنحنى (C_1) يوجد فوق المنحنى (C_2) .

الحالة الثالثة: إذا كان $x < 0$.

فإن $(1 - e^{-x}) < 0$ ومنه $g_1(x) < g_2(x)$.

إذن المنحنى (C_1) يوجد أسفل المنحنى (C_2) .

خلاصة:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_1(x) - g_2(x)$	-	0	+
الوضع النسبي لـ (C_1) و (C_2)	(C_2) يوجد فوق (C_1)	$(0, 1)$ نقطتا تقاطع	(C_1) يوجد فوق (C_2)

- لدينا : $f_1(\alpha_1) = 0$. إذن : $(\alpha_1 + e^{\alpha_1}) = 0$.
 ومنه : $e^{\alpha_1} = -\alpha_1$. و نفضلُ بين حالتين :
 الحالة الأولى : إذا كان $(x - \alpha_1) > 0$.
 فإن : $x > \alpha_1$. ومنه : $e^x > e^{\alpha_1}$.
 يعني : $e^x > -\alpha_1$. إذن : $(e^x + \alpha_1) > 0$.
 الحالة الثانية : إذا كان $(x - \alpha_1) < 0$.
 فإن : $x < \alpha_1$. ومنه : $e^x < e^{\alpha_1}$.
 يعني : $e^x < -\alpha_1$. إذن : $(e^x + \alpha_1) < 0$.
 نستنتج إذن من هاتين الحالتين أن الكميّتين $(x - \alpha_1)$ و $(e^x + \alpha_1)$ لهما نفس الإشارة دائما .

$$\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x \Rightarrow \varphi'(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$x \leq \frac{-1}{2} \Rightarrow e^x \leq e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\Rightarrow e^x - \frac{1}{\sqrt{e}} \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right] ; \varphi'(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ est } \searrow \text{ sur } \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right]$$

- نعلم أن الدالة Exp قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .
 إذن نستطيع تطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية على أي مجال يوجد ضمن \mathbb{R} .
 من أجل ذلك ، نختار المجال الذي طرفاه α_1 و x حيث $x < \frac{-1}{2}$
 إذن يوجد c محصور بين α_1 و x . و يُحقق :

$$\frac{e^x - e^{\alpha_1}}{x - \alpha_1} = e^c \Leftrightarrow \frac{e^x + \alpha_1}{x - \alpha_1} = e^c$$

و بما أن $(e^x + \alpha_1)$ و $(x - \alpha_1)$ لهما نفس الإشارة فإن الخارج $\frac{e^x + \alpha_1}{x - \alpha_1}$ موجب دائما .

$$\left| \frac{e^x + \alpha_1}{x - \alpha_1} \right| = |e^c| = e^c : \text{ إذن}$$

ومنه : $|e^x + \alpha_1| = e^c |x - \alpha_1|$ (1)

من جهة أخرى لدينا : $c \in]\alpha_1 ; x[$

يعني : $c < x < \frac{-1}{2}$. ومنه : $e^c < \frac{1}{\sqrt{e}}$.

نضرب طرفي آخر متفاوتة في العدد الموجب $|x - \alpha_1|$

$$(2) \quad e^c |x - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\forall x \in \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[; |e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|$$

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $-\frac{1}{\sqrt{e}} \leq \beta_n \leq \frac{-1}{2}$

من أجل $n = 0$ لدينا : $-\frac{1}{\sqrt{e}} \leq \beta_0 = \frac{-1}{2} \leq \frac{-1}{2}$

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و نفترض أن : $-\frac{1}{\sqrt{e}} \leq \beta_n \leq \frac{-1}{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n = \frac{\ln n}{n} \text{ ————— : على ما يلي (ب) خلال السؤال (1)} \\ v_n = g_n(u_n) = \left(\frac{1 + \ln n}{n} \right) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right) = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \ln n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n} \right) = 0 \end{array} \right.$$

و بالتالي $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متاليتان متقاربتان و توولان معا إلى الصفر .

لدينا : $f_n(x) = x + e^{nx}$.
 إذن f_n قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} بأكمله و ذلك لأنها مجموع الدالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} . و لدينا :
 $f'_n(x) = (x + e^{nx})' = 1 + n e^{nx} > 0$
 و هذا يعني أن الدالة f_n تزايدية قطعاً على \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	
f_n	$-\infty$	$+\infty$

لدينا f_n دالة متصلة و تزايدية قطعاً على \mathbb{R} .
 إذن f_n تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} .
 و بما أن 0 عدد حقيقي فإنه يمتلك سابقاً واحداً α_n في \mathbb{R} بالتقابل f_n .
 أو بتعبير آخر : $f_n(\alpha_n) = 0$; $(\exists! \alpha_n \in \mathbb{R})$.
 أو بتعبير أخير نقول أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في \mathbb{R} و هو α_n .

بما أن f_n تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} .
 فإن f_n تقابل من أي مجال I يوجد ضمن \mathbb{R} نحو صورته $f_n(I)$.
 نختار المجال $\left] -\ln 2 ; \frac{-1}{2} \right[$ و نختار $n = 1$.
 إذن f_1 تقابل من $\left] -\ln 2 ; \frac{-1}{2} \right[$ نحو $\left] \frac{-1}{2} - \ln 2 ; \frac{-1}{2} + e^{-\frac{1}{2}} \right[$.
 و باستعمال القيم المقربة للتبسيط نقول :
 f_1 تقابل من $\left] -\ln 2 ; \frac{-1}{2} \right[$ نحو $] -0,2 ; 0,1[$.
 و بما أن $] -0,2 ; 0,1[\ni 0$ فإن 0 يمتلك سابقاً واحداً α_1 من المجال $\left] -\ln 2 ; \frac{-1}{2} \right[$.
 يعني : $\exists! \alpha_1 \in \left] -\ln 2 ; \frac{-1}{2} \right[; f_1(\alpha_1) = 0$

$$|\beta_n - \alpha_1| < \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

أو بتعبير آخر نحصل على الوضعية التالية :

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} \leq (\beta_n - \alpha_1) < \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

و حتي الوضعية التالية صحيحة كذلك :

$$0 \leq |\beta_n - \alpha_1| < \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

من أي وضعية من الوضعيات المتكافئة الثلاثة نستنتج حسب مصاديق

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n - \alpha_1) = 0 \text{ تقارب المتتاليات أن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n) = \alpha_1 \text{ وبالتالي :}$$

$$-e^{-\frac{1}{2}} \leq -e^{\beta_n} \leq -e^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} \text{ : ومنه : } e^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} \leq e^{\beta_n} \leq e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{ ومنه : } -\frac{1}{\sqrt{e}} \leq -e^{\beta_n} \leq -e^{-\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

$$-e^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} \approx -0,54 < -\frac{1}{2} \text{ بالاستعانة بالآلة الحاسبة نجد :}$$

$$\text{ إذن : } \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_{n+1} \leq \frac{-1}{2} \text{ : أي , } \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq -e^{\beta_n} \leq \frac{-1}{2}$$

و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

و بذلك نحصل على الوضعية الترجيعية التالية : (P_0) est vraie
 $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N}$

إذن حسب مبدأ التراجع : (P_n) est toujours vraie

$$\text{ يعني : } \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_n \leq \frac{-1}{2} \text{ ; } (\forall n \in \mathbb{N})$$

ما يهمنا في هذا التأطير هو الشق (*) $\beta_n \leq \frac{-1}{2}$ و ذلك من أجل تطبيق نتيجة السؤال (ب) .
 لدينا حسب نتيجة السؤال (ب) :

$$\left(\forall x \leq \frac{-1}{2} \right) ; |e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|$$

إذن من أجل $x = \beta_n$ المنتمي إلى المجال $]-\infty, \frac{-1}{2}]$ حسب (*)

$$\begin{aligned} x = \beta_n \Rightarrow |e^{\beta_n} + \alpha_1| &\leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1| \text{ نستنتج ما يلي :} \\ \Rightarrow |-e^{\beta_n} - \alpha_1| &= |e^{\beta_n} + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1| \\ \Rightarrow |\beta_{n+1} - \alpha_1| &\leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1| \quad (\blacksquare) \\ \Rightarrow |\beta_n - \alpha_1| &\leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_{n-1} - \alpha_1| \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 |\beta_{n-2} - \alpha_1| \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^3 |\beta_{n-3} - \alpha_1| \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n |\beta_{n-n} - \alpha_1| \end{aligned}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left| \frac{-1}{2} - \alpha_1 \right|$$

$$\text{ يعني : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left| \frac{1}{2} + \alpha_1 \right|$$

التمرين الرابع

ب 5 II

$$\alpha_1 \in \left] -\ln 2 ; \frac{-1}{2} \right[\Rightarrow -\ln 2 < \alpha_1 < \frac{-1}{2} \text{ لدينا :}$$

$$\Rightarrow -0,6 < \alpha_1 < -0,5$$

$$\Rightarrow -0,1 < \left(\frac{1}{2} + \alpha_1\right) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{e}} < \left(\frac{1}{2} + \alpha_1\right) < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2} + \alpha_1 \right| < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left| \frac{1}{2} + \alpha_1 \right| < \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$\Rightarrow |\beta_n - \alpha_1| < \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}$$

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}$ متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الموجب $\frac{1}{\sqrt{e}}$

$$\text{ و هو عدد أصغر من 1 . إذن : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} = 0$$

أجوبة امتحان الدورة العادية 2004

التمرين الأول

1

$$\begin{aligned} n \text{ عدد فردي} &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) ; n = 2k + 1 \\ &\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) ; n^2 = (2k + 1)^2 \\ &\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) ; n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) ; n^2 = 4k(k + 1) + 1 \end{aligned}$$

k و $(k + 1)$ عددان صحيحان طبيعيين و متتابعان . إذن أحدهما فردي و الآخر زوجي . و هذا يعني أن الجداء $k(k + 1)$ عدد زوجي دائما .

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N}) ; n^2 = 4(2m) + 1 \\ &\Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N}) ; n^2 = 8m + 1 \\ &\Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N}) ; n^2 - 1 = 8m \\ &\Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N}) ; n^2 \equiv 1 [8] \end{aligned}$$

التمرين الأول

1

ليكن n عددا زوجيا . إذن : $n = 2k$; $(\exists k \in \mathbb{N})$.
العدد الصحيح الطبيعي k يُمكن أن يكون فرديا أو زوجيا .

الحالة الأولى : إذا كان k عددا زوجيا .

إذن يوجد p من \mathbb{N} بحيث $k = 2p$.

و منه $n = 4p$ يعني $n^2 = 16p^2 = 8(2p^2)$.

إذن 8 قاسم للعدد n^2 . أي $n^2 \equiv 0 [8]$.

الحالة الثانية : إذا كان k عددا فرديا .

إذن يوجد q من \mathbb{N} بحيث $k = 2q + 1$.

و منه $n = 4q + 2$ يعني $n^2 = 8(2q^2 + 2q) + 4$.

إذن 8 قاسم للعدد $(n^2 - 4)$. أي $n^2 \equiv 4 [8]$.

الخلاصة : إذا كان n عددا زوجيا فإن $n^2 \equiv 0 [8]$ أو $n^2 \equiv 4 [8]$.

التمرين الأول

2

أذكركم في البداية بأن مجموع ثلاثة أعداد فردية هو عدد فردي و أن مُربع أي عدد فردي يكون دائما عددا فرديا .

نفترض أن العدد $(a^2 + b^2 + c^2)$ مربع كامل .

إذن : $(\exists d \in \mathbb{N}) ; a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ (1)

بما أن a و b و c أعداد فردية ، فإن العدد $(a^2 + b^2 + c^2)$ فردي

$$\begin{cases} a^2 \equiv 1 [8] \\ b^2 \equiv 1 [8] \\ c^2 \equiv 1 [8] \end{cases} \quad \text{إذن حسب نتيجة السؤال (1) (أ) :}$$

عند المرور إلى المجموع نجد : $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 3 [8]$ (2)

لدينا d و d^2 عددان فرديان .

إذن حسب نتيجة السؤال (1) (أ) نكتب : $d^2 \equiv 1 [8]$ (3)

من النتائج (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $3 \equiv 1 [8]$.

يعني أن العدد 8 يقسم العدد 2 . و هذا مستحيل .

إذن ما افترضناه كان خاطئا .

و بالتالي $(a^2 + b^2 + c^2)$ ليس مربعا كاملا .

التمرين الأول

2

$$\begin{cases} a^2 \equiv 1 [8] \\ b^2 \equiv 1 [8] \\ c^2 \equiv 1 [8] \end{cases} \quad \text{لدينا } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ أعداد فردية .}$$

و منه نستنتج أن : $(a^2 + b^2 + c^2) \equiv 3 [8]$ (4)

و بما أن a و b و c أعداد فردية فإن $(a + b + c)$ عدد فردي كذلك .

و منه حسب نتيجة السؤال (1) (أ) : $(a + b + c)^2 \equiv 1 [8]$ (5)

من (4) و (5) : $(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \equiv 1 - 3 [8]$.

يعني : $(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \equiv -2 [8]$.

و نعلم أن : $-2 \equiv 6 [8]$.

إذن : $(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \equiv 6 [8]$.

و منه : $2(ab + ac + bc) \equiv 6 [8]$ (*)

لأن : $(a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + ac + bc)$.

التمرين الأول

2

نفترض أن العدد $2(ab + ac + bc)$ مربع كامل .

إذن : $(\exists m \in \mathbb{N}) ; 2(ab + ac + bc) = m^2$.

و لدينا $2(ab + ac + bc)$ عدد زوجي .

إذن m^2 و m عددان زوجيان كذلك .

إذن حسب نتيجة (1) (ب) نستنتج أن : $m^2 \equiv 0 [8]$ أو $m^2 \equiv 4 [8]$.

في **الحالة الأولى :** إذا كان $m^2 \equiv 0 [8]$.

لدينا حسب نتيجة السؤال (2) (ب) : $m^2 \equiv 6 [8]$.

إذن : $6 \equiv 0 [8]$. و هذا تناقض لأن 8 لا يقسم 6 .

و بالتالي $2(ab + bc + ac)$ ليس مربعا كاملا .

في **الحالة الثانية :** إذا كان $m^2 \equiv 4 [8]$.

لدينا حسب نتيجة السؤال (2) (ب) : $m^2 \equiv 6 [8]$.

إذن $6 \equiv 4 [8]$. و هذا مستحيل لأن 8 لا يقسم العدد 2 .

و بالتالي $2(ab + bc + ac)$ ليس مربعا كاملا .

التمرين الأول

2

نفترض أن العدد $(ab + bc + ac)$ مربع كامل .

إذن : $(\exists m \in \mathbb{N}) ; (ab + bc + ac) = m^2$.

و لدينا a و b و c أعداد فردية .

إذن $(ab + bc + ac)$ عدد فردي كذلك .

و منه m^2 و m عددان فرديان كذلك .

و منه حسب نتيجة السؤال (1) (أ) نكتب : $m^2 \equiv 1 [8]$.

أي : $(ab + bc + ac) \equiv 1 [8]$.

و منه : $2(ab + bc + ac) \equiv 2 [8]$.

لكن $2(ab + bc + ac) \equiv 6 [8]$ و ذلك حسب النتيجة (*) .

إذن : $6 \equiv 2 [8]$.

يعني أن العدد 8 يقسم العدد 4 . (تناقض)

إذن ما افترضناه كان خاطئا .

و بالتالي $(ab + bc + ac)$ ليس مربعا كاملا .

التمرين الثاني

1

لتكن M_a و M_b مصفوفتين من E .

$$\begin{aligned} M_a \times M_b &= \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}(a - \frac{1}{a}) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}(b - \frac{1}{b}) \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab & \frac{a}{\sqrt{3}}(b - \frac{1}{b}) + \frac{1}{b\sqrt{3}}(a - \frac{1}{a}) \\ 0 & \frac{1}{ab} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab & \frac{1}{\sqrt{3}}(ab - \frac{1}{ab}) \\ 0 & \frac{1}{ab} \end{pmatrix} = M_{ab} \in E \end{aligned}$$

بما أن M_a و M_b مصفوفتين من E .

فإن : $a \neq 0$ و $b \neq 0$. و منه : $ab \neq 0$.

و بالتالي : $M_a \times M_b = M_{ab}$.

نحن الآن مُسلحون بأربع خاصيات مهمة و هي :

$$\begin{cases} M_a \times M_b = M_{ab} & (1) \\ N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}} & (2) \\ M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}} & (3) \\ N_b \times M_a = N_{ab} & (4) \end{cases}$$

باستعمال هذه الخاصيات الأربع الثمينة نبين بكل بساطة على أن \times قانون تركيب داخلي في المجموعة $G = E \cup F$. و سوف نستعمل البرهان بفصل الحالات . لتكن X و Y مصفوفتين من G .

الحالة الأولى : إذا كان $X \in E$ و $Y \in E$.

إذن حسب الخاصية رقم (1) نكتب : $X \times Y \in E \subset G$

الحالة الثانية : إذا كان $X \in F$ و $Y \in F$.

إذن حسب الخاصية رقم (2) نكتب : $X \times Y \in E \subset G$

الحالة الثالثة : إذا كان $X \in E$ و $Y \in F$.

إذن حسب الخاصية رقم (3) نكتب : $X \times Y \in F \subset G$

الحالة الرابعة : إذا كان $X \in F$ و $Y \in E$.

إذن حسب الخاصية رقم (4) نكتب : $X \times Y \in F \subset G$

الخلاصة : $\forall (X, Y) \in G^2 ; X \times Y \in G$

إذن \times قانون تركيب داخلي في G .

البحث عن العنصر المحايد لـ \times في المجموعة G .

نعلم أن المصفوفة هي العنصر المحايد للضرب \times في E . و ذلك حسب نتيجة السؤال (1 ج) .

و نعلم أن العنصر المحايد إذ وُجد يكون دائما وحيدا . يكفي إذن أن نبين أن :

$$(\forall A \in G) ; A \times M_1 = M_1 \times A = A$$

لتكن A مصفوفة من المجموعة $G = E \cup F$ و نُفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : $A \in E$:

$$\text{إذن : } A = M_a \quad ; \quad (\exists ! a \in \mathbb{R}^*)$$

و لدينا حسب الخاصية (1) : $M_1 \times M_a = M_a$ و $M_a \times M_1 = M_a$

$$\text{إذن : } A \times M_1 = M_1 \times A = A \quad ; \quad (\forall A \in E)$$

الحالة الثانية : $A \in F$:

$$\text{إذن : } A = N_a \quad ; \quad (\exists ! a \in \mathbb{R}^*)$$

و منه حسب الخاصية رقم (4) : $N_a \times M_1 = N_{a \times 1} = N_a$

و نستنتج كذلك حسب الخاصية رقم (3) : $M_1 \times N_a = N_a$

$$\text{إذن : } A \times M_1 = M_1 \times A = A \quad ; \quad (\forall A \in F)$$

الخلاصة : $A \times M_1 = M_1 \times A = A$; $(\forall A \in G)$

و بالتالي : المصفوفة M_1 هي العنصر المحايد للقانون \times في المجموعة G

• دراسة تماثل عناصر المجموعة G بالنسبة للقانون \times .

لدينا (E, \times) زمرة تبادلية و تماثل كل عنصر M_a في E هو العنصر

$M_{\frac{1}{a}}$ بالقانون \times .

تتكون المجموعة G من اتحاد مجموعتين و هما E و F . لنبحث إذن عن

مماثلات عناصر F .

لتكن N_a مصفوفة من المجموعة F .

$$\text{إذن حسب الخاصية رقم (2) : } N_a \times N_a = M_{\frac{a}{a}} = M_1$$

إذن كل عنصر N_a من F يتمثل مع نفسه .

و بالتالي جميع عناصر G تمتلك مماثلات من E و من F

أي أن كل عنصر من G يمتلك مماثلا من G بالقانون \times .

خلاصة السؤال (ب) : المجموعة (G, \times) زمرة لأن \times قانون تركيب

داخلي في G و يقبل عنصرا محايدا وحيدا و هو المصفوفة M_1 . و كل

مصفوفة من G تقبل مماثلا وحيدة من G بالقانون \times .

التمرين الثاني

1 ب

ليكن a و b عددين حقيقيين غير منعدمين .

لدينا : $\varphi : (\mathbb{R}^*, \times) \rightarrow (E, \times)$

$$a \rightarrow \varphi(a) = M_a$$

و لدينا : $\varphi(a \times b) = M_{ab} = M_a \times M_b = \varphi(a) \times \varphi(b)$

إذن φ تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) .

و لدينا : $y = \varphi(a) = M_a \quad ; \quad (\exists ! a \in \mathbb{R}^*) \quad ; \quad (\forall y \in E)$

إذن φ تقابل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) .

و بالتالي : φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) .

التمرين الثاني

1 ج

بما أن φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) ، فإنه نستطيع

استنتاج البنية الجبرية للمجموعة (E, \times) انطلاقا من البنية الجبرية

للمجموعة (\mathbb{R}^*, \times) . و ذلك عبر التشاكل التقابلي φ .

لدينا (\mathbb{R}^*, \times) زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد 1

و كل عنصر a يقبل $\frac{1}{a}$ كمائل .

إذن (E, \times) زمرة تبادلية كذلك عنصرها المحايد هو المصفوفة $\varphi(1)$

و كل مصفوفة M_a تقبل مصفوفة مائلة و هي المصفوفة $\varphi\left(\frac{1}{a}\right)$.

$$\text{and we got : } \begin{cases} \varphi(1) = M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\ \varphi\left(\frac{1}{a}\right) = M_{\frac{1}{a}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a} - a\right) \\ 0 & a \end{pmatrix} \end{cases}$$

التمرين الثاني

2 أ

لتكن N_b و N_a مصفوفتين من F .

$$\begin{aligned} N_a \times N_b &= \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b - \frac{1}{b}\right) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab - b\left(a - \frac{1}{a}\right) & \frac{a}{\sqrt{3}}\left(b - \frac{1}{b}\right) - \frac{b}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ -ab\sqrt{3} + ab\sqrt{3} & -a\left(b - \frac{1}{b}\right) + ab \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{b}{a} - \frac{1}{\frac{b}{a}}\right) \\ 0 & \frac{1}{\frac{b}{a}} \end{pmatrix} = M_{\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

$$\text{إذن : } \forall (N_a, N_b) \in F^2 ; N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}$$

التمرين الثاني

2 ب

نضع : $G = E \cup F$.

لنبرهن في البداية على الخاصيتين التاليتين :

$$\begin{cases} \forall (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2 ; M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}} \\ \forall (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2 ; N_b \times M_a = N_{ab} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M_a \times N_b &= \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b - \frac{1}{b}\right) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab - \frac{1}{ab}\right) \\ -ab\sqrt{3} & -ab \end{pmatrix} \\ &= N_{ab} \end{aligned}$$

التمرين الثالث

2

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 = (1 - 2x)^2 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 - 4x + 4x^2 \\
 &\Leftrightarrow -3x^2 + 4x + y^2 = 1 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}y^2 = \frac{-1}{3} \\
 &\Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}y^2 = \frac{-1}{3} + \frac{4}{9} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1
 \end{aligned}$$

إن $M(z')$ تنتمي إلى الهذلول الذي مركزه $C\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ ورأساه هما

$S_1(1,0)$ و $S_2\left(\frac{1}{3}, 0\right)$. و مقاربا هما المستقيمان (Δ) و (Δ')

$$\begin{cases}
 (\Delta) : y = \sqrt{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\
 (\Delta') : y = -\sqrt{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}
 \end{cases}$$

المعرفان بما يلي:

التمرين الرابع

1 I

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} -\left(\frac{e^u}{u}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{-x}}{x}\right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} -\left(\frac{e^u}{u}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{-x}}{x}\right) = \lim_{u \rightarrow 0^-} -\left(\frac{e^u}{u}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x}\right) = \lim_{u \rightarrow -\infty} -\left(\frac{e^u}{u}\right) = -0^- = 0$$

التمرين الرابع

2 I

ليكن x عنصرا من \mathbb{R}^* .

لدينا : $f'(x) = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$

بما أن $\frac{-e^{-x}}{x^2} < 0$ فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $(x+1)$ و نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
f	$-\infty$	$-e$	$+\infty$	0

التمرين الرابع

3 I

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

إن محور الأرتيب مقارب عمودي لـ (C)

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

إن محور الافاصل مقارب أفقي بجوار (C)

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

إن (C) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأرتيب موجه نحو الأسفل.

التمرين الثالث

1

لنحل في \mathbb{C} المعادلة $z^2 + z + 1 = 0$.

نحسب $\Delta = (i\sqrt{3})^2$ نجد :

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = j \\
 z_2 &= \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j
 \end{aligned}$$

التمرين الثالث

2

$$\begin{aligned}
 z = e^{i\theta} &\Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1 \\
 &\Rightarrow z(1+z+\bar{z}) = z+z^2+z\bar{z} \\
 &\Rightarrow z(1+z+\bar{z}) = z+z^2+1
 \end{aligned}$$

التمرين الثالث

2

لدينا z' معرف لأنه إذا كان $\theta \neq \pm \frac{2\pi}{3}$ فإن $z^2 + z + 1 \neq 0$ و لدينا حسب السؤال أ) :

$$(1+z+z^2) = z(1+z+\bar{z})$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{1}{1+z+z^2} = \frac{1}{z(1+z+\bar{z})}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = \left| \frac{1}{z(1+z+\bar{z})} \right| \\ \arg(z') \equiv \arg\left(\frac{1}{z(1+z+\bar{z})}\right) [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = \left| \frac{1}{z} \right| \cdot \left| \frac{1}{1+z+\bar{z}} \right| = 1 \cdot \left(\frac{1}{1+2\cos\theta} \right) \\ \arg(z') \equiv \arg\left(\frac{1}{z}\right) + \arg\left(\frac{1}{1+z+\bar{z}}\right) [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = \left(\frac{1}{1+2\cos\theta} \right) \\ \arg(z') \equiv -\arg(z) + 0 [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = \left(\frac{1}{1+2\cos\theta} \right) \\ \arg(z') \equiv -\theta [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{1+2\cos\theta} \right) e^{-i\theta}$$

التمرين الثالث

2

$$z' = x + iy = \left(\frac{1}{1+2\cos\theta} \right) e^{-i\theta}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\cos(-\theta)}{1+2\cos(-\theta)} \\ y = \frac{\sin(-\theta)}{1+2\cos(-\theta)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{\cos^2(-\theta) + \sin^2(-\theta)}{(1+2\cos\theta)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{1+2\cos\theta} \right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{1+2\cos\theta - 2\cos\theta}{1+2\cos\theta} \right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \left(1 - 2\left(\frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \right) \right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (1-2x)^2$$

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$

نريد إثبات صحة هذه العبارة باستعمال التراجع.

من أجل $n = 0$ لدينا : $0 < u_0 = 1 \leq \frac{1}{0+1}$

إذن العبارة (P_0) صحيحة.

ليكن n عنصرا من \mathbb{N} . و نفترض أن (P_n) صحيحة.

$$\begin{aligned} (P_n) \text{ est vraie} &\Rightarrow u_n \leq \frac{1}{n+1} \\ &\Rightarrow n u_n + u_n \leq 1 \\ &\Rightarrow n u_n + (2u_n - u_n) \leq 1 \\ &\Rightarrow n u_n + 2 u_n \leq 1 + u_n \\ &\Rightarrow (n+2)u_n \leq (1+u_n) \\ &\Rightarrow \frac{(n+2)u_n}{(1+u_n)} \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{u_n}{(1+u_n)} \leq \frac{1}{(n+2)} \quad (*) \end{aligned}$$

و لدينا حسب الافتراض : $u_n \geq 0$

(**) $(u_n)^2 f(u_n) \leq \frac{u_n}{1+u_n}$: (إذن حسب نتيجة السؤال 2)

(*) et (**)

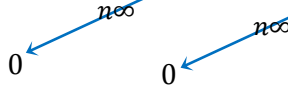
$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0 < (u_n)^2 f(u_n) \leq \frac{1}{n+2} \\ &\Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)+1} \\ &\Rightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie} \end{aligned}$$

{ (P_0) est vraie } ————— : لقد حصلنا على الأشياء التالية :
 $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N}$

إذن حسب مبدأ التراجع : (P_n) est toujours vraie :

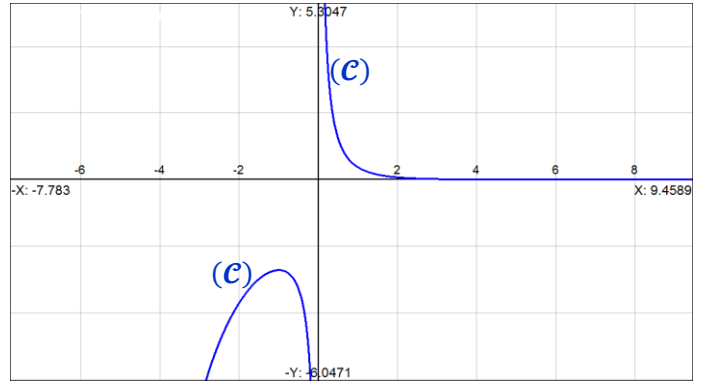
يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$

بما أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \frac{1}{(n+1)}$



فإنه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0$

$$\begin{aligned} k \in \mathbb{N} &\Rightarrow u_k = u_{k-1} e^{-u_{k-1}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{u_k} = \frac{e^{u_{k-1}}}{u_{k-1}} \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \ln\left(\frac{e^{u_{k-1}}}{u_{k-1}}\right) \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \ln(e^{u_{k-1}}) - \ln(u_{k-1}) \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \sum_{k=1}^n u_{k-1} - \sum_{k=1}^n \ln(u_{k-1}) \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_k) \end{aligned}$$



نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $\varphi(x) = e^x - x - 1$
 φ دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وذلك لأنها مجموع دوال قابلة للاشتقاق

على \mathbb{R} . و لدينا : $\varphi'(x) = e^x - 1$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) ;

- إذا كان $x = 0$: فإن $\varphi'(x) = 0$.
- إذا كان $x > 0$: فإن $\varphi'(x) > 0$.
- إذا كان $x < 0$: فإن $\varphi'(x) < 0$.

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x - 1) = +\infty$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$

نستنتج جدول التغيرات التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
φ	$+\infty$	0	$+\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن 0 قيمة دنوية للدالة φ على \mathbb{R} .

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) \geq 0$

أي : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x - x - 1 \geq 0$

أي : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq x + 1$

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} &\Rightarrow e^x \geq x + 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{x+1} \\ &\Rightarrow e^{-x} \leq \frac{1}{x+1} \\ &\Rightarrow x e^{-x} \leq \frac{x}{x+1} ; \text{avec } x > 0 \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{x} e^{-x} \leq \frac{x}{x+1} ; \text{avec } x > 0 \\ &\Rightarrow x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1} ; \text{avec } x > 0 \end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall x > 0) ; x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1}$

التمرين الرابع

2 III

$$-3x^2 \leq F(x) - \ln 4 \leq 0$$

$$\Rightarrow -3x \leq \frac{F(x) - \ln 4}{x} \leq 0 ; \text{ car } x > 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{-3x}_{x \rightarrow 0^+} \leq \left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \right) \leq \underbrace{0}_{x \rightarrow 0^+}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \right) = 0$$

و بالتالي F دالة قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر

و العدد المشتق على اليمين هو $F'_d(0) = 0$.

و منه F دالة متصلة على اليمين في الصفر لأن الاشتقاق يستلزم الاتصال.

التمرين الرابع

3 III

$$t \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{t} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t} ; e^{-t} > 0$$

$$\Rightarrow f(t) \leq e^{-t}$$

التمرين الرابع

3 III

$$t \geq 1 \Rightarrow 0 \leq f(t) \leq e^{-t}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_{x^2}^{4x^2} f(t) dt \leq \int_{x^2}^{4x^2} e^{-t} dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq F(x) \leq (e^{-x^2} - e^{-4x^2})$$

$$\Rightarrow 0 \leq F(x) \leq e^{-x^2}(1 - e^{-3x^2})$$

$$\Rightarrow \underbrace{0}_{x \rightarrow +\infty} \leq F(x) \leq \underbrace{e^{-x^2}(1 - e^{-3x^2})}_{x \rightarrow +\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

التمرين الرابع

4 III

لدينا f دالة متصلة على المجال $]0; +\infty[$. إذن فهي تقبل عدة دوال

أصلية على هذا المجال. و بالخصوص تقبل دالة أصلية φ معرفة بما يلي:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \int_a^x f(t) dt ; a > 0 \\ \varphi'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t) dt = \int_{x^2}^a f(t) dt + \int_a^{4x^2} f(t) dt$$

$$= \int_a^{4x^2} f(t) dt - \int_a^{x^2} f(t) dt$$

$$= \varphi(4x^2) - \varphi(x^2)$$

$$\Rightarrow F'(x) = 8x \varphi'(4x^2) - 2x \varphi'(x^2)$$

$$= 8x f(4x^2) - 2x f(x^2)$$

$$= \frac{8x e^{-4x^2}}{4x^2} - \frac{2x e^{-x^2}}{x^2}$$

$$= \frac{2 e^{-x^2}(e^{-3x^2} - 1)}{x}$$

$$\Rightarrow (\forall x > 0) ; F'(x) = \frac{2 e^{-x^2}(e^{-3x^2} - 1)}{x}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = v_n - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_k) - \underbrace{\ln(u_0)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_k) \right) = v_n$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\ln\left(\frac{1}{u_k}\right) + \ln(u_k) \right) = v_n$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln 1 = v_n$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + 0 = v_n$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n}\right) = v_n$$

التمرين الرابع

4 II

$$\ln\left(\frac{1}{u_n}\right) = v_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{u_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = +\infty$$

التمرين الرابع

1 III

$$\int_{x^2}^{4x^2} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_{x^2}^{4x^2} = \ln(4x^2) - \ln(x^2) = \ln 4$$

التمرين الرابع

1 III

لدينا حسب نتيجة السؤال (1/II) : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq x + 1$: إذن من أجل العدد الحقيقي $(-x)$ نحصل على : $e^{-x} \geq -x + 1$

يعني : (1) $e^{-x} - 1 \geq -x$

و لدينا : $x > 0 \Rightarrow -x < 0$

$$\Rightarrow e^{-x} < 1$$

$$\Rightarrow e^{-x} - 1 < 0 \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall x > 0) ; -x \leq e^{-x} - 1 \leq 0$

التمرين الرابع

2 III

ليكن x عددا حقيقيا موجبا . $t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow -t \leq e^{-t} - 1 \leq 0$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{e^{-t}}{t} - \frac{1}{t} \leq 0$$

$$\Rightarrow - \int_{x^2}^{4x^2} 1 dt \leq \int_{x^2}^{4x^2} \left(\frac{e^{-t}}{t} \right) dt - \int_{x^2}^{4x^2} \left(\frac{1}{t} \right) dt \leq \int_{x^2}^{4x^2} 0 dt$$

On a introduit l'intégrale car ces fonctions sont toutes continues et que $x^2 \leq 4x^2$

$$\Rightarrow -[t]_{x^2}^{4x^2} \leq F(x) - [\ln|t|]_{x^2}^{4x^2} \leq [constante]_{x^2}^{4x^2}$$

$$\Rightarrow -3x^2 \leq F(x) - \ln 4 \leq 0$$

التمرين الرابع

ب 5 III

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x} - e^{-4x}) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} (1 - e^{-3x}) \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{(3xe^{-x})}_{0} \cdot \underbrace{\left(\frac{e^{-3x} - e^0}{-3x - 0}\right)}_1 \cdot \underbrace{(x \ln x)}_0 = 0$$

التمرين الرابع

ج 5 III

لدينا : $G(x) = F(\sqrt{x}) - e^{-4x}(\ln 4 + \ln x) + e^{-x} \ln x$
 $= F(\sqrt{x}) + (e^{-x} - e^{-4x}) \ln x - e^{-4x} \ln x$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(\sqrt{x}) + \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x} - e^{-4x}) \ln x - \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-4x} \ln x$
 $= \ln 4 + 0 - \ln 4 = 0$

و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = 0$

التمرين الرابع

ب 4 III

لدينا : $(\forall x > 0) ; F'(x) = \frac{2e^{-x^2}(e^{-3x^2} - 1)}{x}$

ونلاحظ أن : $(\forall x > 0) ; \frac{2e^{-x^2}}{x} > 0$

إذن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $(e^{-3x^2} - 1)$.

$x > 0 \Rightarrow -3x^2 < 0$
 $\Rightarrow e^{-3x^2} < 1$
 $\Rightarrow (e^{-3x^2} - 1) < 0$
 $\Rightarrow F'(x) < 0$

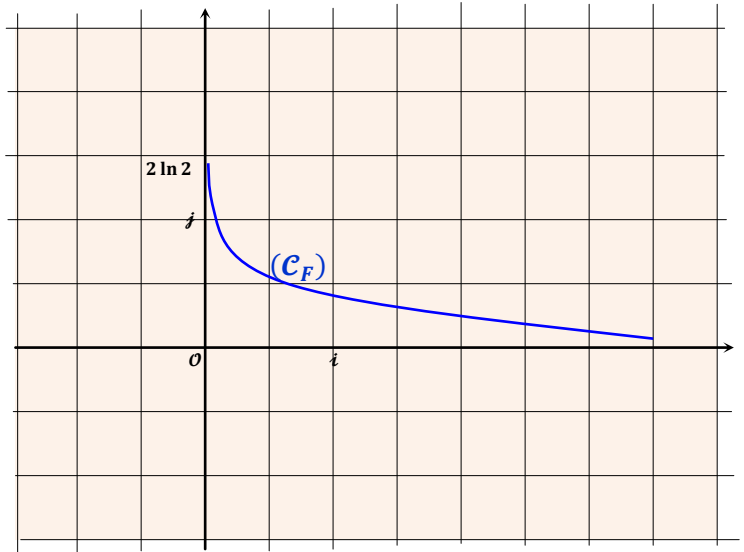
إذن : $(\forall x > 0) ; F'(x) < 0$

و هذا يعني أن الدالة F تناقصية قطعا على المجال $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$F'(x)$		-
F	$2 \ln 2$	0

التمرين الرابع

ج 4 III



التمرين الرابع

أ 5 III

$$G(x) = \int_x^{4x} \underbrace{e^{-t}}_{v'(t)} \cdot \underbrace{\ln t}_{u(t)} dt$$

$$= [u(t) \cdot v(t)]_x^{4x} - \int_x^{4x} v(t) \cdot u'(t) dt$$

$$= [(\ln t)(-e^{-t})]_x^{4x} - \int_x^{4x} (-e^{-t}) \cdot \left(\frac{1}{t}\right) dt$$

$$= e^{-x} \ln x - e^{-4x} \ln(4x) + \int_{(\sqrt{x})^2}^{4(\sqrt{x})^2} \left(\frac{e^{-t}}{t}\right) dt$$

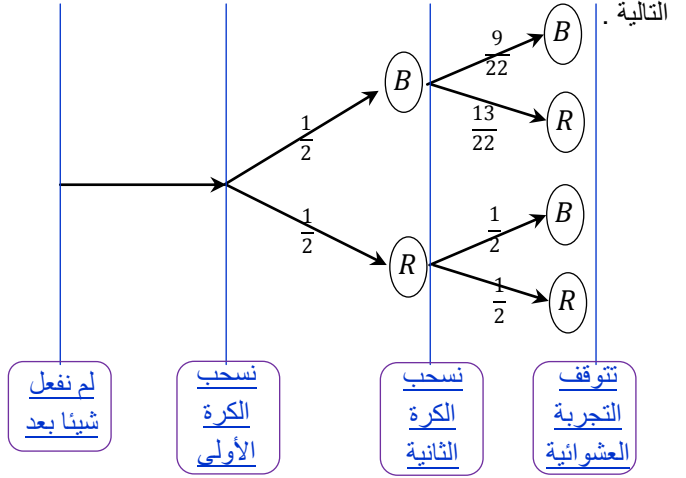
$$= e^{-x} \ln x - e^{-4x} \ln(4x) + F(\sqrt{x})$$

و بالتالي : $G(x) = e^{-x} \ln x - e^{-4x} \ln(4x) + F(\sqrt{x})$

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2004

التمرين الأول

من خلال معطيات التمرين نُحول التجربة العشوائية إلى شجرة الاحتمالات التالية .



من خلال هذه الشجرة لدينا : $p(R \cap R) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

التمرين الأول

من خلال هذه الشجرة لدينا : $p(B \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{22} = \frac{9}{44}$

التمرين الأول

من خلال هذه الشجرة لدينا : $p(B \cap R) + p(R \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{13}{22} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{11}$

التمرين الأول

من خلال هذه الشجرة لدينا :

$$p_{B_2}(B_1) = \frac{p(B_1 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{9}{22}}{\frac{1}{2} \times \frac{9}{22} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

التمرين الثاني

نلاحظ في البداية أن الزوج (1,1) حل خاص للمعادلة (E) .

و ذلك لأن : $3 \times 1 - 2 \times 1 = 1$ (1)

ليكن (x,y) الحل العام للمعادلة (E) .

إذن : $3x - 2y = 1$ (2)

ننجز عملية الفرق بين المتساويتين (1) و (2) نحصل على :

$$3(x - 1) - 2(y - 1) = 0$$

يعني : $3(x - 1) = 2(y - 1)$ (⊗)

من هذه النتيجة ⊗ نستنتج أن $3/2(y - 1)$.

إذن حسب Gauss : $3/(y - 1)$ لأن $3 \wedge 2 = 1$

إذن : $y - 1 = 3k$; $(\exists k \in \mathbb{Z})$

يعني : $y = 3k + 1$; $(\exists k \in \mathbb{Z})$

نعوض y بالتعبير (3k + 1) في ⊗ نجد : $3(x - 1) = 2(3k + 1)$

إذن : $x = 2k + 1$

نستنتج إذن أن الزوج $(2k + 1; 3k + 1)$ حل للمعادلة (E) .

عكسيا لدينا : $3(2k + 1) - 2(3k + 1) = 1$; $(\forall k \in \mathbb{Z})$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) تُكتب على شكل :

$$S = \{ (2k + 1; 3k + 1) ; k \in \mathbb{Z} \}$$

التمرين الثاني

لدينا : $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1$
 $= 42n + 9 - 42n - 8 = 1$
 إذن $(14n + 3; 21n + 4)$ حل للمعادلة (E) .

التمرين الثاني

بما أن : $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1$
 فإنه حسب ميرهنة Bezout نستنتج أن : $(14n + 3) \wedge (21n + 4) = 1$

التمرين الثاني

نضع : $(21n + 4) \wedge (2n + 1) = d$
 أذكر في البداية بمبدأ خوارزمية أقليدس :

$$\frac{a}{d} \mid \frac{b}{c} \Rightarrow a \wedge b = b \wedge d$$

لدينا : $\frac{(21n + 14)}{(n - 6)} \mid \frac{(2n + 1)}{10}$ و $\frac{(2n + 1)}{13} \mid \frac{(n - 6)}{2}$

من هاتين الأقليديتين نستنتج أن :

$$(21n + 4) \wedge (2n + 1) = (2n + 1) \wedge (n - 6) = (n - 6) \wedge 13$$

يعني : $d = (n - 6) \wedge 13$ (■)

و منه نستنتج أن d قاسم للعدد 13 .

علما أن 13 عدد أولي، إذن $d = 13$ أو $d = 1$.

التمرين الثاني

إذا كان $d = 13$ فإنه حسب النتيجة (■) نستنتج أن 13 قاسم للعديد من 13 و $(n - 6)$. يعني : $n \equiv 6 [13]$.

التمرين الثاني

$$\begin{cases} A = P(n) = 21n^2 - 17n - 4 \\ B = Q(n) = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3 \end{cases}$$

نضع : نلاحظ أن : $P(1) = Q(1) = 0$.

إذن 1 جذر مشترك للحدوديتين $P(n)$ و $Q(n)$ في \mathbb{Z} .

و منه نستنتج أن $P(n)$ و $Q(n)$ تقبلان القسمة على الحدودية $(n - 1)$.

التمرين الثاني

بالإستعانة بالقسمة الأقليدية لـ A و B على $(n - 1)$ نحصل على :

$$\begin{cases} A = (n - 1)(21n + 4) \\ B = (n - 1)(28n^2 + 20n + 3) \end{cases}$$

بعد تعميل ثلاثية الحدود $(28n^2 + 20n + 3)$ نحصل على :

$$B = (n - 1)(2n + 1)(14n + 3)$$

و في ما يلي سوف نستعمل خاصية مهمة في الحسابيات و هي :

$$c \wedge a = 1 \Rightarrow (\forall b \in \mathbb{Z}) ; a \wedge b = a \wedge (bc)$$

نضع : $P = (21n + 4) \wedge (2n + 1)(14n + 3)$:

لدينا حسب نتيجة السؤال (2) ب) : $(14n + 3) \wedge (21n + 4) = 1$:

إذن حسب الخاصية المذكورة نستنتج أن :

$$(21n + 4) \wedge (2n + 1) = (21n + 4) \wedge (2n + 1)(14n + 3)$$

و منه : $(21n + 4) \wedge (2n + 1) = p$

و منه حسب نتيجة السؤال (3) أ) : $p = 1$ أو $p = 13$.

الحالة الأولى : إذا كان $p = 13$.

لدينا حسب (3) ب) : $n \equiv 6 [13]$.

و لدينا : $(21n + 4) \wedge (2n + 1)(14n + 3) = 13$.

إذن : $(n - 1)(21n + 4) \wedge (n - 1)(2n + 1)(14n + 3) = 13(n - 1)$

$$\mid = 13(n - 1)$$

يعني : $A \wedge B = 13(n - 1)$

التمرين الثالث

3

لدينا $u = z - a$ إذن $\bar{u} = \bar{z} - \bar{a}$

$$\begin{cases} z^2 - \bar{z}^2 = a^2 - \bar{a}^2 \\ (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2 \\ (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (z - a)(z + a) = (\bar{z} - \bar{a})(\bar{z} + \bar{a}) \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(u + 2a) = \bar{u}(\bar{u} + 2\bar{a}) \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(u + 2a) = \frac{4a\bar{a}}{u} \left(\frac{4a\bar{a}}{u} + 2\bar{a} \right) \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 2au - \left(\frac{4a\bar{a}}{u} \right)^2 - 2\bar{a} \left(\frac{4a\bar{a}}{u} \right) = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^4 + 2au^3 - 16a^2\bar{a}^2 - 8a\bar{a}^2u = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u^4 - 8a\bar{a}^2u) + (2au^3 - 16a^2\bar{a}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(u^3 - 8a\bar{a}^2) + 2a(u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S') : \begin{cases} (u + 2a)(u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

التمرين الثالث

3

لنحل النظام (S') حيث $a = re^{i\theta}$

من خلال المعادلة الثانية من النظام (S') نستنتج أن:

$$(u + 2a)(u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (u + 2a) = 0 \text{ أو } (u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow u = -2a \text{ أو } u^3 = 8a\bar{a}^2$$

$$\Leftrightarrow u = -2re^{i\theta} \text{ أو } u^3 = 8r^3e^{-i\theta}$$

حلول المعادلة $r^3 = 8r^3e^{-i\theta}$ هي الجذور النونية من الدرجة الثالثة

للعدد العقدي $8r^3e^{-i\theta}$ والتي تُكتب بصفة عامة على شكل

$$u_k = \left[\sqrt[3]{8r^3}; \frac{-\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right]; k \in \{0, 1, 2\}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} u_0 = \left[2r; \frac{-\theta}{3} \right] = 2r e^{-\frac{i\theta}{3}} \\ u_1 = \left[2r; \frac{-\theta + 2\pi}{3} \right] = 2r e^{\frac{(-\theta + 2\pi)i}{3}} \\ u_2 = \left[2r; \frac{-\theta + 4\pi}{3} \right] = 2r e^{\frac{(-\theta + 4\pi)i}{3}} \end{cases}$$

يمكن تحديد z_0 و z_1 و z_2 انطلاقاً من قيم u_0 و u_1 و u_2

وذلك باستعمال العلاقة $z = u + a$

التمرين الثالث

3

نضع $z_0(A)$ و $z_1(B)$ و $z_2(C)$

نريد أن نبرهن أن المثلث ABC متساوي الأضلاع.

$$\begin{aligned} \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} &= \frac{2r - 2rj}{2rj - 2rj} = \frac{1 - j}{j - j} = \frac{1 - j}{-\sqrt{3}i} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{-\frac{i\pi}{3}} \end{aligned}$$

الحالة الثانية: إذا كان $p = 1$ فإن $n \neq 6$ [13]

ولدينا: $(21n + 4) \wedge (2n + 1)(14n + 3) = 1$

إذن: $(n - 1)(21n + 4) \wedge (n - 1)(2n + 1)(14n + 3) = (n - 1)$

ومنه: $A \wedge B = (n - 1)$

الخلاصة: $(\forall n \geq 2); A \wedge B = \begin{cases} 13(n - 1); & \text{si } n \equiv 6 [13] \\ (n - 1); & \text{si } n \not\equiv 6 [13] \end{cases}$

التمرين الثالث

1

نضع: $z = x + iy$. لدينا: $z^2 - \bar{z}^2 = a^2 - \bar{a}^2$

$$\Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z}) = (a - \bar{a})(a + \bar{a})$$

$$\Leftrightarrow (2iy)(2x) = (2i\beta)(2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow xy = \alpha\beta$$

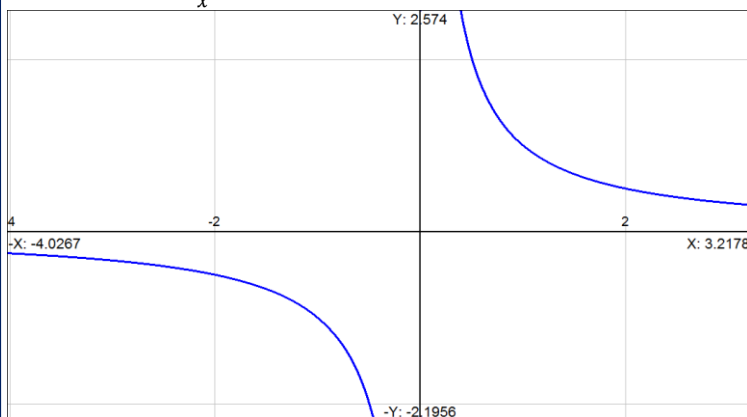
$$\Leftrightarrow y = \frac{\alpha\beta}{x}; x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{هذلول (H)}$$

التمرين الثالث

1

في حالة $a = (1 + i)$ لدينا (H) هذلول معادلته $y = \frac{1}{x}$



التمرين الثالث

2

نضع: $z = x + iy$. لدينا: $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4a\bar{a}$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - (z\bar{a} + a\bar{z}) + a\bar{a} = 4a\bar{a}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2) - (2ax + 2\beta y) + (\alpha^2 + \beta^2) = (2|a|)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2ax + \alpha^2) - (y^2 + 2\beta y + \beta^2) = (2|a|)^2$$

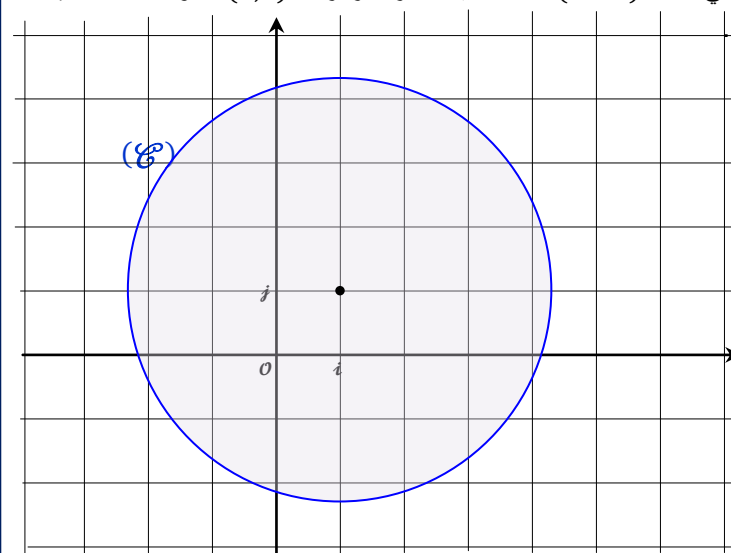
$$\Leftrightarrow (x - \alpha)^2 - (y - \beta)^2 = (2|a|)^2$$

$$\Leftrightarrow 2|a| \text{ دائرة مركزها } C(\alpha, \beta) \text{ و شعاعها } |a|$$

التمرين الثالث

2

في حالة $a = (1 + i)$ لدينا دائرة مركزها $C(1, 1)$ و شعاعها $2\sqrt{2}$



- إذا كان $x = \frac{1}{\ln 2}$ فإن $f'(x) = 0$.
 إذا كان $x > \frac{1}{\ln 2}$ فإن $f'(x) < 0$.
 إذا كان $x < \frac{1}{\ln 2}$ فإن $f'(x) > 0$.
 نستنتج إذن جدول تغيرات كما يلي :

x	$-\infty$	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f		$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$	-2

التمرين الرابع

ج 2 I

- لدينا f دالة متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $]-\infty; \frac{1}{\ln 2}]$.
 إذن f تقابل من المجال $]-\infty; \frac{1}{\ln 2}]$ نحو المجال $]-\infty; \frac{1}{10}]$ ولدينا :
 $f\left(]-\infty; \frac{1}{\ln 2}]\right) =]-\infty; \frac{4}{e \ln 2} - 2] \approx]-\infty; \frac{1}{10}]$ و بما أن : $0 \in]-\infty; \frac{1}{10}]$.
 فإن 0 يمتلك سابقاً وحيداً بالتقابل f في المجال $]-\infty; \frac{1}{\ln 2}]$.
 ولدينا : $f(1) = 4e^{-\ln 2} - 2$ و $1 \in]-\infty; \frac{1}{\ln 2}]$.
 ولدينا كذلك حسب جدول تغيرات الدالة f .
 f دالة متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $[\frac{1}{\ln 2}; +\infty[$.
 إذن f تقابل من المجال $[\frac{1}{\ln 2}; +\infty[$ نحو صورته $]-2; \frac{1}{10}]$ مع العلم أن :
 $\frac{4}{e \ln 2} - 2 \approx \frac{1}{10}$ و بما أن : $0 \in]-\infty; \frac{1}{10}]$ فإن 0 يمتلك سابقاً وحيداً بالتقابل f في المجال $[\frac{1}{\ln 2}; +\infty[$.
 ولدينا $f(2) = 0$ و $2 \in [\frac{1}{\ln 2}; +\infty[$.
خلاصة : العددين 1 و 2 هما الحلان الوحيدان للمعادلة $f(x) = 0$.

التمرين الرابع

أ 3 I

- دراسة الدالة $g(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$:
 لدينا g دالة معرفة على المجال $]0; +\infty[$.
 ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(2x)}{x}\right) = 0$.
 إذن محور الأرتاب مقارب أفقي لـ (Γ) بجوار $+\infty$.
 g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و مشتقتها معرفة بما يلي :
 $g'(x) = \frac{1 - \ln(2x)}{x^2}$.
 إذا كان : $x = \frac{e}{2}$ فإن $g'(x) = 0$.
 إذا كان : $x > \frac{e}{2}$ فإن $g'(x) < 0$.
 إذا كان : $x < \frac{e}{2}$ فإن $g'(x) > 0$.
 و نلخص نتائج هذه الدراسة في الجدول التالي :

x	0	$\frac{e}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	-
g		$\frac{2}{e}$	0

إذن : $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = e^{\frac{-i\pi}{3}}$.
 $\Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \right| = \left| e^{\frac{-i\pi}{3}} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right) \equiv \arg\left(e^{\frac{-i\pi}{3}}\right) [2\pi] \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} |z_2 - z_0| = |z_1 - z_0| \\ \arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} AC = AB \\ \arg(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$
 $\Rightarrow ABC$ مثلث متساوي الأضلاع

التمرين الرابع

أ 1 I

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x e^{-x \ln 2} - 2) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left(\frac{4}{\ln 2}\right) \left(\frac{1}{x \ln 2}\right) - 2 \right) \\ &= \left(\frac{4}{\ln 2}\right) \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^u}\right) - 2 \\ &= \left(\frac{4}{\ln 2}\right)(-\infty) - 2 = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x e^{-x \ln 2} - 2) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{4}{\ln 2}\right) \left(\frac{1}{x \ln 2}\right) - 2 \right) \\ &= \left(\frac{4}{\ln 2}\right) \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^u}\right) - 2 \\ &= \left(\frac{4}{\ln 2}\right)(0) - 2 = -2 \end{aligned}$$

التمرين الرابع

ب 1 I

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 e^{-x \ln 2} - \frac{2}{x}\right) = +\infty \\ \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases} & \text{ إذن من النهايتين التاليتين :} \\ \text{نستنتج أن } (C) & \text{ يقبل فرعاً شلجيميا في اتجاه محور الأرتاب .} \\ \text{ولدينا كذلك : } & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \\ \text{إذن المستقيم ذو المعادلة } & y = -2 \text{ مقارب أفقي للمنحنى } (C) \text{ بجوار } +\infty \end{aligned}$$

التمرين الرابع

ب أ 2

لدينا : $f'(x) = 4(1 - x \ln 2)e^{-x \ln 2}$ و نعلم أن : $4e^{-x \ln 2} > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) ;
 إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1 - x \ln 2)$.

التمرين الرابع

أ 2 II

ليكن x عنصرا من \mathbb{R} .

$$f'_k(x) = 4(e^{-kx} - kx e^{-kx}) = 4(1 - kx)e^{-kx}$$

التمرين الرابع

ب 2 II

x	$-\infty$	$\frac{1}{k}$	$+\infty$
$f'_k(x)$	+	0	-
f_k		$f_k\left(\frac{1}{k}\right)$	-2

التمرين الرابع

أ 3 II

لدينا f_k متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]-\infty; \frac{1}{k}[$.

إذن f_k تقابل من $]-\infty; \frac{1}{k}[$ نحو $]-\infty; \frac{4}{ke} - 2[$.

ولدينا: $0 < k < \frac{2}{e}$ إذن: $\frac{1}{k} > \frac{e}{2}$.

ومنه: $\frac{4}{ke} > 2$. أي: $\frac{4}{ke} - 2 > 0$.

يعني أن: $0 \in]-\infty; \frac{4}{ke} - 2[$.

إذن 0 يمتلك سابقا وحيدا في المجال $]-\infty; \frac{1}{k}[$ بالتقابل f_k .

وبنفس الطريقة لدينا f_k تقابل من $]\frac{1}{k}; +\infty[$ نحو $]-2; \frac{4}{ke} - 2[$.

لأن f_k متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]\frac{1}{k}; +\infty[$.

وبما أن $0 \in]-\infty; \frac{4}{ke} - 2[$.

فإن 0 يمتلك سابقا واحدا b من المجال $]\frac{1}{k}; +\infty[$ بالتقابل f_k .

يعني: $f_k(b) = 0$ و $b > \frac{1}{k}$.

وبالتالي المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين a و b حيث $a < \frac{1}{k} < b$.

التمرين الرابع

ب 3 II

نلاحظ أن: $f_{\ln 2}(x) = f(x)$.

ونعلم أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين وحيدين و هما 1 و 2.

إذن المعادلة $f_{\ln 2}(x) = 0$ تقبل كذلك حلين وحيدين فقط و هما 1 و 2.

ونعلم أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين a و b كيفما كان $0 < k < \frac{2}{e}$.

إذن نستنتج بالضرورة أن: $a = 1$ و $b = 2$ لأن a و b وحيدين.

التمرين الرابع

أ 4 II

$$\begin{aligned} \int_0^t x e^{-kx} dx &= \left[\frac{x e^{-kx}}{-k} \right]_0^t - \int_0^t \left(\frac{e^{-kx}}{-k} \right) dx \\ &= \left[\frac{x e^{-kx}}{-k} \right]_0^t - \frac{1}{k} \left[\frac{e^{-kx}}{-k} \right]_0^t \\ &= \left(\frac{t e^{-kt}}{-k} \right) + \frac{1}{k} \left(\frac{e^{-kt}}{-k} \right) + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{k^2} (1 - kt e^{-kt} - e^{-kt}) \end{aligned}$$

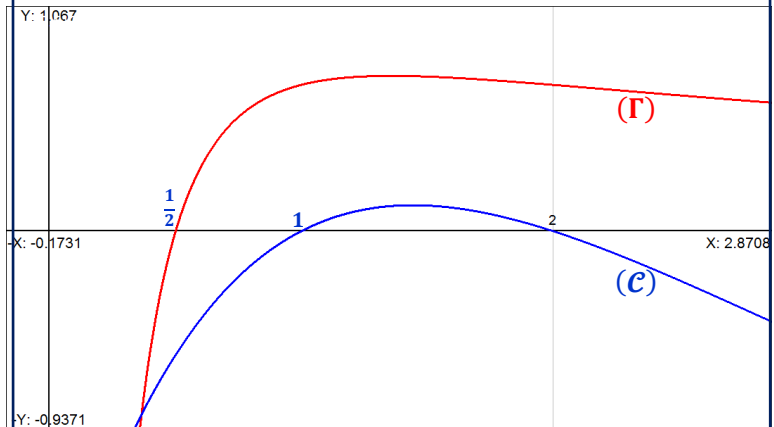
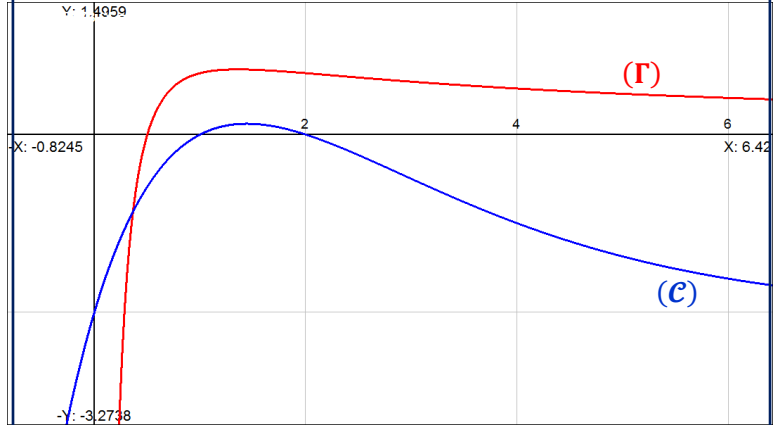
$$\int_0^t x e^{-kx} dx = \frac{1}{k^2} (1 - kt e^{-kt} - e^{-kt}) \quad \text{إذن}$$

التمرين الرابع

ب 3 I

قبل أن نرسم (Γ) أضيف نقطة تقاطع (Γ) مع محور الأفاسيل و التي يُحقق أفضولها المعادلة $g(x) = 0$.

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\ln(2x)}{x} = 0 ; x > 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(2x) = \ln 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



التمرين الرابع

أ 1 II

لدينا $g'\left(\frac{e}{2}\right) = 0$. إذن (Γ) يقبل مماسا أفقيا في النقطة $\Omega\left(\frac{e}{2}, \frac{2}{e}\right)$.

ومنه فإن $y = \frac{2}{e}$ يقطع (Γ) في نقطة واحدة و هي $\Omega\left(\frac{e}{2}, \frac{2}{e}\right)$.

ولدينا حسب الرسم المبياني: (Γ) شكل مقعر.

إذن كل مستقيم $y = k$ متواجد بين (D) و محور الأفاسيل يقطع (Γ) بالضبط في نقطتين.

وبالتالي فالمعادلة $g(x) = k$ تقبل حلين α و β مختلفين شرط أن يكون $0 < k < \frac{2}{e}$.

بما أن $g\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ و α و β مختلفين.

فإن أحدهما أصغر من الآخر و نأخذ اعتباطيا $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$.

التمرين الرابع

ب 1 II

ليكن α و β حلا للمعادلة $f(x) = 0$.

بما أن: $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$.

فإنه حسب السؤال (2 ج) من الجزء الأول نستنتج أن $\beta = 2$ أو $\alpha = 1$ من جهة أخرى لدينا حسب السؤال (1 أ) من الجزء II و α و β هما حلا

المعادلة $g(x) = k$.

إذن: $g(2) = k$ و $g(1) = k$.

أي: $\ln 4 = 2k$ أو $\ln 2 = k$.

وبالتالي: $k = \ln 2$.

إذن العدان $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلين للمعادلة $\frac{\ln(2x)}{x} = k$.
 أو بتعبير آخر : $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلين للمعادلة $g(x) = k$.
 ولدينا حسب جدول تغيرات الدالة g : قيمة قصوية للدالة g
 على $]0, +\infty[$.

إذن $\forall x \in]0, +\infty[; 0 < \frac{\ln(2x)}{x} < \frac{2}{e}$
 ومنه : $0 < k < \frac{2}{e}$

لقد حصلنا إذن على أن $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلا للمعادلة $g(x) = k$
 حيث $0 < k < \frac{2}{e}$.

و بالتالي يُمكننا تطبيق نتائج التمرين و خصوصا نتيجة السؤال (4 ج) .

إذن : $\ln\left(2 \times \frac{u}{2}\right) \cdot \ln\left(2 \times \frac{v}{2}\right) \leq 1$

و بالتالي : $\ln(u) \cdot \ln(v) \leq 1$

التمرين الرابع

4 II

$$I_k = \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (4x e^{-kx} - 2) dx$$

$$= 4 \left(\int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx \right) - 2(\beta - \alpha)$$

لنحسب الآن التكامل $\left(\int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx \right)$ بدلالة α و β و k .

$$\int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx = \int_0^{\beta} x e^{-kx} dx - \int_0^{\alpha} x e^{-kx} dx$$

$$= \frac{1}{k^2} (1 - k\beta e^{-k\beta} - e^{-k\beta} - 1 + k\alpha e^{-k\alpha} + e^{-k\alpha})$$

$$= \frac{1}{k^2} (k\alpha e^{-k\alpha} + e^{-k\alpha} - k\beta e^{-k\beta} - e^{-k\beta})$$

و نعلم أن $f_k(\alpha) = 0$ و $f_k(\beta) = 0$.
 إذن : $4\alpha e^{-k\alpha} - 2 = 0$ و $4\beta e^{-k\beta} - 2 = 0$

ومنه : (1) $2\alpha = e^{\alpha k}$ و (2) $2\beta = e^{\beta k}$

بالرجوع إلى التعبير الأخير للتكامل نحصل على :

$$\int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx = \frac{1}{k^2} \left(\frac{k\alpha}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha} - \frac{k\beta}{2\beta} - \frac{1}{2\beta} \right)$$

$$= \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\beta} \right)$$

$$= \left(\frac{\beta - \alpha}{2\alpha\beta k^2} \right)$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعبير التكامل I_k نجد :

$$I_k = \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x) dx = 4 \left(\int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx \right) - 2(\beta - \alpha)$$

$$= 4 \left(\frac{\beta - \alpha}{2\alpha\beta k^2} \right) - 2(\beta - \alpha)$$

$$= 2(\beta - \alpha) \left(\frac{1}{\alpha\beta k^2} - 1 \right)$$

$$= \frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha\beta k^2} (1 - \alpha\beta k^2)$$

إذن : $I_k = \frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha\beta k^2} (1 - \alpha\beta k^2)$

التمرين الرابع

4 II

بما أن α و β عدنان حقيقيان موجبان قطعاً و $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$.
 فإن التكامل I_k يقيس مساحة أي أن I_k كمية موجبة .

إذن : $(1 - \alpha\beta k^2) \geq 0$. يعني : $(\alpha k)(\beta k) \leq 1$ (*) .

و نعلم أن : $\begin{cases} 2\alpha = e^{\alpha k} & (1) \\ 2\beta = e^{\beta k} & (2) \end{cases}$. إذن : $\begin{cases} \ln(2\alpha) = (\alpha k) \\ \ln(2\beta) = (\beta k) \end{cases}$

و بالتالي بالرجوع إلى النتيجة (*) نحصل على :

$$(\alpha k) \cdot (\beta k) \leq 1 \Leftrightarrow \ln(2\alpha) \cdot \ln(2\beta) \leq 1$$

التمرين الرابع

5 II

ليكن u و v عدنان حقيقيان مختلفان و موجبان قطعاً حيث : $\frac{\ln u}{u} = \frac{\ln v}{v}$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(2\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{2\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{\ln\left(2\left(\frac{v}{2}\right)\right)}{2\left(\frac{v}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(2\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{\ln\left(2\left(\frac{v}{2}\right)\right)}{\left(\frac{v}{2}\right)} = k = \text{une constante}$$

أجوبة امتحان الدورة العادية 2005

التمرين الأول

1

ليكن m و n عنصرين من \mathbb{R}^* .
ليكن $(m + \frac{1}{m}; m - \frac{1}{m})$ و $(n + \frac{1}{n}; n - \frac{1}{n})$ عنصرين من E .
لدينا: $(m + \frac{1}{m}; m - \frac{1}{m}) * (n + \frac{1}{n}; n - \frac{1}{n})$
 $= (mn + \frac{1}{mn}; mn - \frac{1}{mn})$
بما أن: $m \neq 0$ و $n \neq 0$ فإن $mn \neq 0$
ومنه: $(mn + \frac{1}{mn}; mn - \frac{1}{mn}) \in E$
و بالتالي * قانون تركيب داخلي في E .

التمرين الأول

2

ليكن $\varphi(m)$ و $\varphi(n)$ عنصرين من E .
لدينا حسب السؤال (1): $\varphi(m) * \varphi(n) = \varphi(mn)$
إذن φ تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو $(E, *)$.
ليكن A عنصرا من E .
إذن حسب تعريف المجموعة A نكتب: $\varphi(m) = A$; $(\exists! m \in \mathbb{R}^*)$
و هذا يعني أن φ تقابل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو $(E, *)$.
و بالتالي φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو $(E, *)$.

التمرين الأول

2

نعلم أن التشاكل التقابلي يُحافظ على البنية الجبرية للزمرة و يُحولها إلى مجموعة الوصول.

لدينا φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو $(E, *)$. إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة (\mathbb{R}^*, \times) انطلاقا من البنية الجبرية للمجموعة $(E, *)$ و ذلك عن طريق التشاكل التقابلي φ .

بما أن (\mathbb{R}^*, \times) زمرة تبادلية عنصراها المحايد هو العدد 1.

و كل عنصر a يقبل مائلا $\frac{1}{a}$ بالقانون \times .

فإن: $(E, *)$ زمرة تبادلية عنصراها المحايد هو الزوج (1) .

و كل عنصر $\varphi(m)$ يقبل مائلا $\varphi(\frac{1}{m})$ بالقانون *.

و لدينا: $\varphi(1) = (2, 0)$ و $\varphi(\frac{1}{m}) = (m + \frac{1}{m}; \frac{1}{m} - m)$

التمرين الأول

3

ليكن (x, y) عنصرا من F إذن: $\begin{cases} x \geq 2 \\ y^2 = x^2 - 4 \end{cases}$

نطرح السؤال: هل يوجد عدد حقيقي موجب m بحيث: $m + \frac{1}{m} = x$
و للإجابة على هذا السؤال نبين أن المعادلة تقبل على الأقل حلا موجبا m

لدينا: $m + \frac{1}{m} = x \Leftrightarrow m^2 - mx + 1 = 0$

لدينا: $\Delta = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

بما أن: $x \geq 2$ فإن: $\Delta > 0$

و منه المعادلة تقبل حلين مختلفين m_1 و m_2

$$m_2 = \frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{و} \quad m_1 = \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2}$$

الحل m_1 عدد حقيقي موجب قطعاً إذن فإشارة الحل الثاني m_2

لا تهمنا علماً أنه تم إيجاد حل موجب للمعادلة

نستنتج إذن أن: $x = m + \frac{1}{m}$; $(\exists m > 0)$; $(\forall x \geq 2)$

و لدينا: $y^2 = x^2 - 4$ إذن: $y = \pm \sqrt{x^2 - 4}$

$$= \pm \sqrt{m^2 + \frac{1}{m^2} + 2 - 4}$$

$$= \pm \sqrt{\left(m - \frac{1}{m}\right)^2}$$

$$= \pm \left(m - \frac{1}{m}\right)$$

نختار: $y = \left(m - \frac{1}{m}\right)$

إذن: $(x, y) = \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 / m > 0$

عكسيا: ننطلق من: $(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 / m > 0$

لنبرهن أن المتراحة $m + \frac{1}{m} \geq 2$ تقبل حولا من أجل $m > 0$.

$$\frac{m^2 + 1}{m} \geq 2$$

نضرب طرفي المتراحة في العدد الموجب m نجد: $m^2 + 1 \geq 2m$

يعني: $m^2 - 2m + 1 \geq 0$ أي: $(m - 1)^2 \geq 0$

و هذه العبارة صحيحة كيفما كان العدد الحقيقي m .

و بالأخص من أجل $m > 0$

خلاصة:

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 2 \text{ و } y^2 = x^2 - 4\} = \left\{ \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 / m > 0 \right\}$$

التمرين الأول

3

من بين عناصر المجموعة F نجد الزوج $(2, 0)$. إذن: $F \neq \emptyset$

و من الصيغة الثانية للمجموعة F نستنتج أن: $F \subset E$

لأن: $m > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}^*$

و بالتالي: F جزء غير فارغ من E (1)

ليكن X_m و X_n عنصرين من F بحيث:

$$\begin{cases} X_m = \left(m + \frac{1}{m}; m - \frac{1}{m}\right); m > 0 \\ X_n = \left(n + \frac{1}{n}; n - \frac{1}{n}\right); n > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X_m * (X_n)' &= \left(m + \frac{1}{m}; m - \frac{1}{m}\right) * \left(n + \frac{1}{n}; -n + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{m}{n} + \frac{1}{\frac{m}{n}}; \frac{m}{n} - \frac{1}{\frac{m}{n}}\right) = X\left(\frac{m}{n}\right) \end{aligned}$$

بما أن: $m > 0$ و $n > 0$ فإن: $\frac{m}{n} > 0$ و منه $X\left(\frac{m}{n}\right) \in F$

أي: $(X_m) * (X_n)' \in F$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: $(F, *)$ زمرة جزئية من $(E, *)$.

التمرين الثاني

1

لدينا p و 3 عدداً أوليان مختلفان إذن $3 \wedge p = 1$

إذن حسب مبرهنة Fermat نكتب: $p^{3-1} \equiv 1 [3]$

سوف نستعمل في هذا السؤال البرهان بالخلف .

نفترض وجود أعداد a_1 و a_2 و \dots و a_{23} حيث :

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{23}^2 = 23997 \text{ و } (\forall k); a_k \wedge 24 = 1$$

ننتقل من كون : $\forall k \in [1, 23]; a_k \wedge 24 = 1$

$$\begin{cases} a_1^2 \equiv 1 [24] \\ a_2^2 \equiv 1 [24] \\ \vdots \\ a_{23}^2 \equiv 1 [24] \end{cases} \text{ إذن حسب نتيجة السؤال (II) نكتب :}$$

عند المرور إلى الجمع بين هذه المتوافقات نحصل على :

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{23}^2) \equiv 23 [24]$$

يعني : $23997 \equiv 23 [24]$ (1)

نستعين بالآلة الحاسبة لنحصل على $23997 \equiv 21 [24]$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $23 \equiv 21 [24]$

يعني أن 24 يقسم العدد 2 وهذا مستحيل .

وبالتالي : لا وجود لأعداد a_1 و a_2 و \dots و a_{23} أولية مع 24

و تحقق $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{23}^2 = 23997$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2)e^{-\frac{2}{x}} = 0 = f(0) \text{ لدينا}$$

إذن f متصلة على اليمين في الصفر .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{(x+2)e^{-\frac{2}{x}}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2}{x} \right) e^{-\frac{2}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{2}{x}} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-2}{x} \right) e^{-\frac{2}{x}} \\ &= 0 - \lim_{u \rightarrow -\infty} u e^u \\ &= 0 - 0 = 0 = f'_a(0) \end{aligned}$$

ليكن x عنصرا من المجال $]0; +\infty[$.

لدينا : $f(x) = (x+2)e^{-\frac{2}{x}}$

$$\text{إذن : } f'(x) = e^{-\frac{2}{x}} + \left(e^{-\frac{2}{x}} \right)' (x+2) e^{-\frac{2}{x}}$$

$$= e^{-\frac{2}{x}} + \frac{2}{x^2} (x+2) e^{-\frac{2}{x}}$$

$$= \left(\frac{2x+4+x^2}{x^2} \right) e^{-\frac{2}{x}}$$

$$= \left(\frac{x^2+2x+1+3}{x^2} \right) e^{-\frac{2}{x}}$$

$$= \left(\frac{(x+1)^2+3}{x^2} \right) e^{-\frac{2}{x}} > 0$$

إذن f دالة تزايدية قطعا على المجال $]0; +\infty[$

نعلم أن العدد الأولي الزوجي الوحيد هو 2 .

لدينا p عدد أولي و أكبر من العدد 5 .

إذن p سيكون بالضرورة عددا فرديا .

ومنه : $(\exists q \in \mathbb{N}); p = 2q + 1$

أي : $(\exists q \in \mathbb{N}); p^2 = (2q + 1)^2$

ومنه : $(\exists q \in \mathbb{N}); p^2 = 4q^2 + 4q + 1$

يعني : $(\exists q \in \mathbb{N}); p^2 - 1 = 4q(q + 1)$

لدينا : $(\exists q \in \mathbb{N}); p^2 - 1 = 4q(q + 1)$

و لدينا q و $(q + 1)$ عددان صحيحان طبيعيين متتابعان .

إذن أحدهما فردي و الآخر زوجي .

أي أن الجداء $q(q + 1)$ عدد زوجي دائما .

يعني : $(\exists m \in \mathbb{N}); q(q + 1) = 2m$

يعني : $(\exists m \in \mathbb{N}); p^2 - 1 = 4(2m)$

يعني : $(\exists m \in \mathbb{N}); p^2 - 1 = 8m$

ومنه : $p^2 \equiv 1 [8]$ أي : $8/(p^2 - 1)$

تذكير : إذا كانت p_1 و p_2 و \dots و p_k أعداد أولية و كانت n_1 و n_2

و \dots و n_k أعداد صحيحة طبيعية حيث $(\forall i); (p_i)^{n_i} / a$

فإن الجداء $\prod_1^k (p_i)^{n_i}$ قاسم لـ a . إنتهي التذكير .

لدينا : $24 = 2^3 \times 3^1$

و لدينا كذلك $8/(p^2 - 1)$ و $3/(p^2 - 1)$

يعني : $2^3/(p^2 - 1)$ و $3^1/(p^2 - 1)$

و نعلم أن العددين 2 و 3 أوليان . إذن حسب الخاصية المذكورة

نستنتج أن : $2^3 \times 3^1 / (p^2 - 1)$. وبالتالي : $p^2 \equiv 1 [24]$

$$\begin{cases} m/a \\ n/a \\ m \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow mn/a \text{ ملاحظة : توجد صيغة أخرى للخاصية المذكورة و هي كالتالي :}$$

لدينا a عدد صحيح طبيعي حيث $a \wedge 24 = 1$

من أجل العدد a نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان a عددا أوليا .

لدينا $2 \wedge 24 \neq 1$ و $3 \wedge 24 \neq 1$ و $5 \wedge 24 = 1$

إذن a عدد أولي أكبر من 5 .

ومنه حسب نتائج الفقرة (I) : $a^2 \equiv 1 [24]$

الحالة الثانية : إذا كان a عدد غير أولي .

و ليكن $(p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times \dots \times p_k^{n_k})$ تفكيك العدد a

إلى جداء عوامل أولية .

بما أن $a \wedge 24 = 1$ أي $a \wedge (2^3 \cdot 3^1) = 1$

فإن جميع الأعداد الأولية p_1 و \dots و p_k تُخالف 2 و تخالف 3 .

ومنه : $(\forall i \in [1, k]); p_i \geq 5$

إذن يمكننا استعمال نتائج الفقرة الأولى من التمرين .

لدينا : $p_1^2 \equiv 1 [24]$. إذن : $(p_1^2)^{n_1} \equiv 1 [24]$

و لدينا : $p_2^2 \equiv 1 [24]$. إذن : $(p_2^2)^{n_2} \equiv 1 [24]$

و لدينا : $p_3^2 \equiv 1 [24]$. إذن : $(p_3^2)^{n_3} \equiv 1 [24]$

\vdots \vdots \vdots \vdots

و لدينا : $p_k^2 \equiv 1 [24]$. إذن : $(p_k^2)^{n_k} \equiv 1 [24]$

عند المرور إلى الجداء بين هذه المتوافقات نجد :

$$p_1^{2n_1} \cdot p_2^{2n_2} \cdot p_3^{2n_3} \cdot \dots \cdot p_k^{2n_k} \equiv 1 [24]$$

إذن : $(p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k})^2 \equiv 1 [24]$

و بالتالي : $a^2 \equiv 1 [24]$

الخلاصة : في كلتا الحالتين : $a^2 \equiv 1 [24]$; $a \wedge 24 = 1$ \forall

التمرين الثالث

د 2 I

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{x} + \frac{4}{x^2} \right) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4}{x} \right) = 0$

إذن نحن أمام الوضعية التالية :

$$\left(\frac{-4}{x} \right) \leq f(x) - x \leq \left(\frac{-2}{x} + \frac{4}{x^2} \right)$$

$x \rightarrow +\infty \quad \quad \quad x \rightarrow +\infty$

إذن حسب خاصيات التأيير و النهايات نستنتج أن :

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$

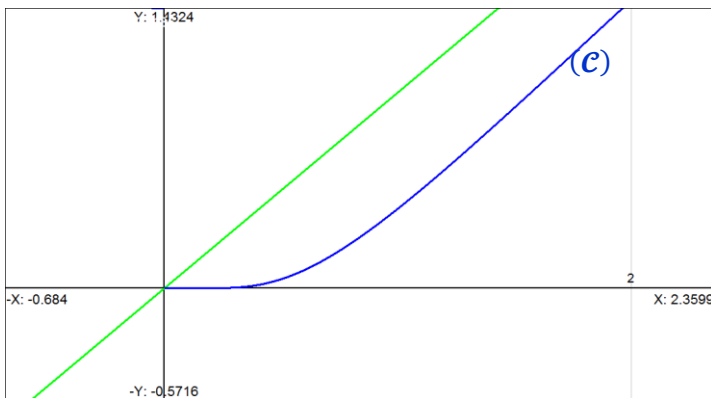
(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و لقد علمنا من قبل أن :

إذن من النهايتين (1) و (2) نستنتج أن (C) يقبل مقاربا مانلا

(و هو المنصف الأول للمعلم) بجوار $+\infty$ و معادلته $y = x$.

التمرين الثالث

3 I



التمرين الثالث

1 II

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(x + \frac{2}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2}{nx} \right) e^{-\frac{x}{n}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{-\frac{x}{n}} \right) + \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ u = \frac{2}{x}}} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{e^u}{u} \right)} \right) \\ &= 0 + \frac{1}{n} (0) = 0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

إذن f_n قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر . و لدينا : $(f_n)'_d(0) = 0$

التمرين الثالث

2 II

لدينا : $f'_n(x) = \left(\left(x + \frac{2}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}} \right)'$

$$\begin{aligned} &= \left(e^{-\frac{x}{n}} \right)' + \left(\frac{-2}{x} \right)' \left(x + \frac{2}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}} \\ &= \left(e^{-\frac{x}{n}} \right)' + \left(\frac{2}{x^2} \right)' \left(x + \frac{2}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}} \\ &= \left(1 + \left(\frac{2}{x^2} \right)' \left(x + \frac{2}{n} \right) \right) e^{-\frac{x}{n}} > 0 \end{aligned}$$

إذن دالة f_n تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$.

التمرين الثالث

ب 2 I

تذكير : لتكن f و g دالتين مُعرفتين على مجال $[a, b]$.

- f و g متصلتين على $[a, b]$
 - f و g قابلتين للاشتقاق على $]a, b[$ إذا كان :
 - $f(a) = g(a)$
 - $\forall x \in [a, b] ; f'(x) \geq g'(x)$
- فإن : $\forall x \in [a, b] ; f(x) \geq g(x)$

انتهى التذكير

ليكن t عددا حقيقيا موجبا .

نضع : $\begin{cases} \varphi(t) = (1 - t) \\ \psi(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} \\ h(t) = e^{-t} \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \varphi(t) = -1 \\ \psi(t) = t - 1 \\ h(t) = -e^{-t} \end{cases}$

لدينا : $t \geq 0 \Rightarrow -t \leq 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow e^{-t} \leq 1 \\ &\Rightarrow -e^{-t} \geq -1 \\ &\Rightarrow h'(t) \geq \varphi'(t) \end{aligned}$$

و بما أن h و φ متصلتين و قابلتين للاشتقاق معا على $]0, +\infty[$. و كذلك : $h(0) = \varphi(0) = 1$.

إذن حسب الخاصية المذكورة نستنتج أن : $(\forall t \geq 0) ; h(t) \geq \varphi(t)$

يعني : $(\forall t \geq 0) ; e^{-t} \geq (1 - t)$

أي : $(1) (\forall t \geq 0) ; e^{-t} + t - 1 \geq 0$

و باستعمال هذه المتفاوتة نكتب :

$$\begin{aligned} t \geq 0 &\Rightarrow e^{-t} \geq (1 - t) \\ &\Rightarrow -e^{-t} \leq (t - 1) \\ &\Rightarrow h'(t) \leq \psi'(t) \end{aligned}$$

و بما أن h و ψ متصلتين و قابلتين للاشتقاق معا على $]0, +\infty[$. و كذلك : $\psi(0) = h(0) = 1$.

إذن حسب الخاصية المذكورة نستنتج أن : $(\forall t \geq 0) ; h(t) \leq \psi(t)$

يعني : $(\forall t \geq 0) ; e^{-t} \leq \left(1 - t + \frac{t^2}{2} \right)$

يعني : $(2) (\forall t \geq 0) ; (e^{-t} + t - 1) \leq \frac{t^2}{2}$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall t \geq 0) ; 0 \leq (e^{-t} + t - 1) \leq \frac{t^2}{2}$

التمرين الثالث

ج 2 I

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعاً .

إذن $\frac{2}{x}$ عدد حقيقي موجب قطعاً .

و نعلم أن : $(\forall t \geq 0) ; 0 \leq (e^{-t} + t - 1) \leq \frac{t^2}{2}$

إذن نستطيع تعويض t بـ $\frac{2}{x}$ لأن هذه النتيجة صالحة للأعداد الأكبر من أو تساوي 0 .

و منه : $(\forall x > 0) ; 0 \leq \left(e^{-\frac{2}{x}} + \frac{2}{x} - 1 \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x} \right)^2$

يعني : $(\forall x > 0) ; \left(1 - \frac{2}{x} \right) \leq e^{-\frac{2}{x}} \leq \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$

نضرب أطراف هذا التأيير في العدد الموجب قطعاً $(x + 2)$ لنحصل على التأيير الجميل التالي :

$$(x + 2) \left(1 - \frac{2}{x} \right) \leq (x + 2) e^{-\frac{2}{x}} \leq (x + 2) \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$$

بعد النشر و التبسيط نحصل على : $\left(x - \frac{4}{x} \right) \leq f(x) \leq \left(x - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \right)$

و بالتالي : $(\forall x > 0) ; \frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{-2}{x} + \frac{4}{x^2}$

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f_{n+1}(\alpha_n) > \frac{2}{n+1}$: يعني

ونعلم أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \frac{2}{n+1}$:

إذن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$:

نعلم أن f_{n+1} تزايدية قطعا على $]0, +\infty[$. ونعلم أنها كذلك تقابل إذن تقابلها العكسي f_{n+1}^{-1} دالة تزايدية قطعا على المجال $]0, +\infty[$.

إذن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(\alpha_n)) > f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(\alpha_{n+1}))$:

يعني $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n > \alpha_{n+1}$:

يعني أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تناقصية قطعا .

و بما أنها مصغرة بالعدد 0 ($\alpha_n > 0$)

فإنها متقاربة ونضع : $\lim(\alpha_n) = a \in \mathbb{R}$:

التمرين الثالث

$$\begin{aligned} f_n(\alpha_n) = \frac{2}{n} &\Leftrightarrow \left(\alpha_n + \frac{2}{n}\right) e^{-\frac{2}{\alpha_n}} = \frac{2}{n} \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha_n + \frac{2}{n}}{e^{\left(\frac{2}{\alpha_n}\right)}} = \frac{2}{n} \\ &\Leftrightarrow 2 e^{\left(\frac{2}{\alpha_n}\right)} = n \left(\alpha_n + \frac{2}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow 2 e^{\left(\frac{2}{\alpha_n}\right)} = n \alpha_n + 2 \\ &\Leftrightarrow 2 e^{\left(\frac{2}{\alpha_n}\right)} - 2 = n \alpha_n \end{aligned}$$

التمرين الثالث

سوف نستعمل في هذا السؤال البرهان بالخلف لكي نبين أن النهاية a

تساوي 0 . و من أجل ذلك نفترض أن : $a \neq 0$.

لدينا $2 e^{\left(\frac{2}{\alpha_n}\right)} - 2 = n \alpha_n$:

إذن $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 e^{\left(\frac{2}{\alpha_n}\right)} - 2\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n \alpha_n)$:

ومنه : $\left(2 e^{\left(\frac{2}{a}\right)} - 2\right) = (+\infty)(a)$:

ومنه : $\left(2 e^{\left(\frac{2}{a}\right)} - 2\right) = (\pm\infty)$:

و هذا تناقض واضح لأن عدد حقيقي و يُخالف $\pm\infty$.

إذن ما افترضناه كان خاطئا . إذن : $\lim(\alpha_n) = 0$.

التمرين الثالث

ليكن x عددا حقيقيا موجبا حيث $x < 2$.

و سوف نستعمل كون f دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0, +\infty[$.

$$x \leq t \leq 2x \Rightarrow f(x) \leq f(t) \leq f(2x)$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} f(x) dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(2x) dt$$

$$\Rightarrow f(x)[t]_x^{2x} \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq f(2x)[t]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow x f(x) \leq F(x) \leq x f(2x)$$

التمرين الثالث

لدينا f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]0, +\infty[$.

إذن f_n تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو المجال $]0, +\infty[$.

$$f_n(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) \right[=]0, +\infty[$$

إذن f_n تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو المجال $]0, +\infty[$.

أو بتعبير آخر : $\forall y \in]0, +\infty[; \exists ! x \in]0, +\infty[; f_n(x) = y$:

أو بتعبير آخر نقول أن كل عنصر من $]0, +\infty[$ يقبل سابقا واحدا

بالتقابل f_n من المجال $]0, +\infty[$.

من أجل n عدد طبيعي غير منعدم ، نلاحظ أن العدد $\frac{2}{n}$ عدد حقيقي موجب قطعا . إذن العدد $\frac{2}{n}$ عنصر من المجال $]0, +\infty[$.

فهو يقبل إذن سابقا واحدا α_n من المجال $]0, +\infty[$ بالتقابل f_n .

أو بتعبير آخر : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists ! \alpha_n \in]0, +\infty[) ; f_n(\alpha_n) = \frac{2}{n}$:

يعني أن المعادلة $f_n(\alpha) = \frac{2}{n}$ تقبل حلا وحيدا α_n في $]0, +\infty[$.

التمرين الثالث

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا .

و ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

$$\begin{aligned} \left(f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1}\right) - \left(f_n(x) - \frac{2}{n}\right) &= \frac{2}{n(n+1)} + e^{-\frac{2}{x}} \left(\frac{-2}{n(n+1)}\right) \\ &= \frac{-2}{n(n+1)} \left(e^{-\frac{2}{x}} - 1\right) \end{aligned}$$

$$x > 0 \Rightarrow \frac{-2}{x} < 0$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{2}{x}} < 1$$

$$\Rightarrow \left(e^{-\frac{2}{x}} - 1\right) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{n(n+1)} \left(e^{-\frac{2}{x}} - 1\right) > 0$$

$$\Rightarrow \left(f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1}\right) > \left(f_n(x) - \frac{2}{n}\right)$$

الخلاصة :

$$\left(\forall x > 0\right) ; \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) ; \left(f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1}\right) > \left(f_n(x) - \frac{2}{n}\right) \quad (*)$$

التمرين الثالث

المقارنة (*) صالحة لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n

و صالحة لكل عدد حقيقي موجب قطعا x .

لدينا من خلال ما سبق : $\alpha_n \in]0, +\infty[$.

إذن نستطيع تطبيق النتيجة (*) من أجل العدد الحقيقي الموجب قطعا α_n

و العدد الصحيح الطبيعي الغير المنعدم n نحصل على :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \left(f_{n+1}(\alpha_n) - \frac{2}{n+1}\right) > \left(f_n(\alpha_n) - \frac{2}{n}\right)$$

نعلم أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f_n(\alpha_n) = \frac{2}{n}$:

إذن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f_{n+1}(\alpha_n) - \frac{2}{n+1} > 0$:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (\psi(2x) - \psi(x))' ; x > 0 \\
&= (\psi(2x))' - \psi'(x) \\
&= 2\psi'(2x) - \psi'(x) \\
&= 2f(2x) - f(x) \\
&= 2(2x+2)e^{\frac{-1}{x}} - (x+2)e^{\frac{-2}{x}} \\
&= \left(2(2x+2)e^{\frac{1}{x}} - (x+2)\right)e^{\frac{-2}{x}} \\
&= \left((4x+4)e^{\frac{1}{x}} - (x+2)\right)e^{\frac{-2}{x}} \\
&= \left((x+2+3x+2)e^{\frac{1}{x}} - (x+2)\right)e^{\frac{-2}{x}} \\
&= \left((x+2)e^{\frac{1}{x}} + (3x+2)e^{\frac{1}{x}} - (x+2)\right)e^{\frac{-2}{x}} \\
&= \left((x+2)\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + (3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right)e^{\frac{-2}{x}}
\end{aligned}$$

و بالتالي مشتقة الدالة F معرفة بما يلي :

$$\begin{cases} F'(x) = \left((x+2)\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + (3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right)e^{\frac{-2}{x}} ; x > 0 \\ F'_d(0) = 0 \end{cases}$$

التمرين الثالث

$$\begin{aligned}
x > 0 &\Rightarrow \begin{cases} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) > 0 \\ (3x+2) > 0 \\ (x+2) > 0 \end{cases} \text{ لدينا :} \\
&\Rightarrow F'(x) > 0 \\
&\Rightarrow F \text{ est croissante sur }]0, +\infty[
\end{aligned}$$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(2x) = 0$

$$\text{إذن : } \underbrace{xf(x)}_{x \rightarrow 0^+} \leq F(x) \leq \underbrace{xf(2x)}_{x \rightarrow 0^+}$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$

نستخلص النتائج المحصل عليها في الجدول التالي :

x	0	$+\infty$
$F'(x)$		+
F	0	$+\infty$

التمرين الثالث

نعلم أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و منه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$F(x) \geq \underbrace{xf(2x)}_{x \rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$$

إذن حسب خاصيات الترتيب و النهايات نستنتج أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

التمرين الثالث

ليكن a و x عنصرين من المجال $[0, +\infty[$.

لدينا f دالة متصلة على المجال $[0, +\infty[$.

إذن f تقبل عدة دوال أصلية على المجال $[0, +\infty[$.

و بالخصوص f تقبل دالة أصلية ψ التي تُحقق :

$$\begin{cases} \psi(x) = \int_a^x f(t) dt \\ \psi(a) = 0 \\ \psi'(x) = f(x) ; \forall x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_x^{2x} f(t) dt \text{ لدينا :} \\
&= \int_x^a f(t) dt + \int_a^{2x} f(t) dt \\
&= -\psi(x) + \psi(2x)
\end{aligned}$$

بما أن $x \rightarrow 2$ و ψ دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.

و $\psi(]0, +\infty[) \subset]0, +\infty[$.

فإن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ و ذلك باستعمال المبرهنات العامة لاشتقاق مُركب و مجموع دالتين .

ولدينا : $xf(x) \leq F(x) \leq xf(2x)$.

إذن : $f(x) \leq \frac{F(x)}{x} \leq f(2x)$

$$\text{إذن : } \underbrace{f(x)}_{x \rightarrow 0^+} \leq \left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0}\right) \leq \underbrace{f(2x)}_{x \rightarrow 0^+}$$

إذن حسب خاصيات الترتيب و النهايات نستنتج أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0}\right) = 0 \in \mathbb{R}$$

و هذا يعني أن F قابلة للاشتقاق على يمين الصفر . و لدينا : $F'_d(0) = 0$

ليكن $z_1 = re^{i\theta}$ لدينا حسب النتيجة (1): $z_1 + 1 = e^{\frac{11\pi}{6}}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow z_1 + 1 &= e^{\frac{11\pi}{6}} \\ \Leftrightarrow re^{i\theta} &= e^{\frac{11\pi}{6}} - 1 \\ \Leftrightarrow (S_1): \begin{cases} r \cos \theta = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 1 \\ r \sin \theta = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

لنحسب أولاً r لدينا:

$$(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = \left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 1\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \cos^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) + 1 - 2 \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 2\left(1 - \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$$

نستعين بالعلاقة المثلثية التالية: $\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$

$$\Leftrightarrow r^2 = 2\left(1 - 2 \cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) + 1\right) \text{ نحصل على:}$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 4\left(1 - \cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$$

ثم نستعين بعد ذلك بالعلاقة المثلثية التالية: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$$\text{نحصل على: } r^2 = 4 \sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) \text{ ومنه: } r = \pm 2 \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

نعلم أن معيار عدد عقدي يكون دائماً عدداً حقيقياً موجبا

$$\text{إذن: } r = 2 \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

نعوض r بقيمته في المعادلة الثانية من النمطة (S_1) نحصل على:

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) \sin \theta &= \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \\ \Leftrightarrow 2 \sin \theta &= \frac{\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)} \end{aligned}$$

نستعين بالعلاقة المثلثية التالية: $\sin(2\varphi) = 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)$

نحصل على:

$$\sin \theta = \left(\frac{\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{11\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \theta \equiv \frac{17\pi}{12} [2\pi]$$

$$\text{و بالتالي: } z_1 = 2 \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) e^{\frac{17i\pi}{12}}$$

$$\begin{aligned} f(iy) = iy &\Leftrightarrow \frac{i(iy) - 1}{(iy + 1)^2} = iy \\ &\Leftrightarrow iy(iy + 1)^2 = -y - 1 \\ &\Leftrightarrow iy(-y^2 + 2iy + 1) = -y - 1 \\ &\Leftrightarrow -iy^3 + iy - 2y^2 = -y - 1 \\ &\Leftrightarrow i(-y^3 + y) + (1 - y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -y^3 + y = 0 \\ (1 - y) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y(1 - y)(1 + y) = 0 \\ (1 - y) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ أو } y = 1 \text{ أو } y = -1 \\ y = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y = 1 \end{aligned}$$

و بالتالي: $f(i) = i$

$$\begin{aligned} f(z) = z &\Leftrightarrow \frac{iz - 1}{z^2 + 2z + 1} = z \\ &\Leftrightarrow z^3 + 2z^2 + z = iz - 1 \\ &\Leftrightarrow z^3 + 2z^2 + (1 - i)z + 1 = 0 \end{aligned}$$

هذه المعادلة الأخيرة تقبل حلاً خاصاً وهو العدد 1. وذلك حسب السؤال أ)

ننجز القسمة الأفقيّة للحدودية $z^3 + 2z^2 + (1 - i)z + 1$ على

الحدودية $(z - i)(z^2 + (2 + i)z + i) = 0$ نحصل على

لنعمل الآن ثلاثية الحدود التالية: $z^2 + (2 - i)z + i$

$$\Delta = (2 - i)^2 - 4i = 3$$

$$\begin{aligned} \text{إذن ثلاثية الحدود تقبل جذرين } z_1 \text{ و } z_2 \text{ :} \\ z_1 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad z_2 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

و بالتالي المعادلة $f(z) = z$ تقبل ثلاثة حلول وهي:

$$z_0 = i \text{ و } z_1 \text{ و } z_2$$

$$\begin{aligned} z_1 + 1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ لدينا:} \\ &= \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \\ &= e^{-\frac{i\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\text{و بما أن: } \frac{11\pi}{6} \equiv \frac{-\pi}{6} [2\pi]$$

$$\text{فإن: } (1) \quad z_1 + 1 = e^{-\frac{\pi i}{6}} = e^{\frac{11\pi}{6}}$$

$$z_2 + 1 = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = e^{-\frac{5i\pi}{6}}$$

(2)

$$z_2 + 1 = e^{-\frac{5i\pi}{6}} = e^{\frac{7i\pi}{6}} \text{ فإن: } \frac{7\pi}{6} \equiv \frac{-5\pi}{6} [2\pi]$$

اقترح طريقتين للإجابة على هذا السؤال :

الطريقة الأولى : الإجابة بالإستعانة بالقاعدة التالية :

$$e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$\frac{i e^{i\alpha} - 1}{2 e^{i\alpha}} = \frac{1}{2} (i - e^{-i\alpha}) \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{i\pi} e^{-i\alpha} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{i(\pi-\alpha)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{i(\pi-\alpha)} + e^{\frac{i\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 \cos\left(\frac{(\pi-\alpha) - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \right) e^{i\left(\frac{(\pi-\alpha) + \frac{\pi}{2}}{2}\right)}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

و بالتالي نستنتج الشكل الأسّي و المثلثي كما يلي :

$$f(z) = \left(\frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right) \left(\frac{i e^{i\alpha} - 1}{2 e^{i\alpha}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right) e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \left[\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right) ; \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

الطريقة الثانية : الإجابة دون استعمال تلك القاعدة .

لدينا حسب السؤال (ب) : $z = i$

إذن : $f(z) = f(i)$

و لدينا حسب السؤال (1) (ج) : $f(i) = i$

ومنه : $f(z) = f(i) = i$

لدينا : $i = 1 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = e^{\frac{i\pi}{2}}$

و بالتالي : $f(z) = e^{\frac{i\pi}{2}}$

لدينا : $z = e^{i\alpha}$

في هذا السؤال يجب استحضار جميع قواعد الحساب المثلثي.

لدينا : $f(z) = f(e^{i\alpha}) = \frac{i e^{i\alpha} - 1}{(e^{i\alpha} + 1)^2}$

و لدينا : $(e^{i\alpha} + 1)^2 = (\cos \alpha + i \sin \alpha + 1)^2$

ليكن $z_2 = s e^{i\varphi}$ لدينا حسب النتيجة (2) : $z_2 + 1 = e^{\frac{7i\pi}{6}}$

$$\Leftrightarrow z_2 + 1 = e^{\frac{7i\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow z_2 = e^{\frac{7i\pi}{6}} - 1$$

$$\Leftrightarrow s e^{i\varphi} = e^{\frac{7i\pi}{6}} - 1$$

$$\Leftrightarrow (S_2) : \begin{cases} s \cos \varphi = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 1 \\ s \sin \varphi = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \end{cases}$$

بنفس الطريقة نحسب أولًا s .

$$s^2 = 2 \left(1 - \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \right) \Leftrightarrow s = \pm 2 \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

بنفس الطريقة

نعلم أن معيار عدد عقدي يكون دائما عددا حقيقيا موجبا

$$\text{إذن : } s = 2 \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

نعوض s بقيمة في المعادلة الثانية من النظام (S_2) نحصل على :

$$2 \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \sin \varphi = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)} \right) = \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$$

بنفس الطريقة

$$\Rightarrow \varphi \equiv \frac{13\pi}{12} [2\pi]$$

$$\text{و بالتالي : } z_2 = 2 \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) e^{\frac{13i\pi}{12}}$$

لدينا $z = e^{i\alpha}$ إذن $|z| = 1$ ومنه $z\bar{z} = 1$.

$$\overline{f(z)} = \overline{\left(\frac{iz - 1}{(z + 1)^2} \right)} = \frac{-i\bar{z} - 1}{(\bar{z} + 1)^2} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{\bar{z}i(-1 + iz)}{\bar{z}^2(1 + z)^2} = iz \left(\frac{-1 + iz}{(1 + z)^2} \right) = iz f(z)$$

إذن : $\overline{f(z)} = iz f(z)$

$$f(z) + \overline{f(z)} = 0 \Leftrightarrow f(z) + i f(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + iz) f(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + iz) = 0 \\ f(z) = 0 \end{cases} \text{ أو}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + iz) = 0 \\ (iz - 1) = 0 \end{cases} \text{ أو}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ z = -i \end{cases} \text{ أو}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\alpha} = e^{\frac{i\pi}{2}} \\ e^{i\alpha} = e^{-\frac{i\pi}{2}} \end{cases} \text{ أو}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

بما أن $0 \leq \alpha \leq \pi$ فإن α تأخذ قيمة وحيدة وهي $\frac{\pi}{2}$.

و بالتالي : $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) : \text{ولدينا}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} : \text{ومنه}$$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$(2) \quad \varphi \equiv \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) [2\pi] : \text{إذن}$$

$$\left(\frac{ie^{i\alpha} - 1}{2e^{i\alpha}}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} : \text{من (1) و (2) نستنتج أن}$$

$$f(z) = \left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} : \text{و بالتالي}$$

المعيار r

العمدة φ

التمرين الرابع

4

بما أن $|z| = 1$ فإن z يكتب على الشكل $e^{i\alpha}$.

$$\Re(f(z)) = \frac{1}{2} : \text{لدينا}$$

$$\Leftrightarrow \Re\left(\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 = 4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{أو} \quad z_2 = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow (e^{i\alpha} + 1)^2 = (\cos \alpha + i \sin \alpha + 1)^2$$

$$= \left(2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 + 2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1\right)^2$$

$$= \left(2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2$$

$$= \left(2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right)^2$$

$$= 4 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

$$= 4 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\alpha}$$

$$f(z) = \frac{ie^{i\alpha} - 1}{4 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\alpha}} = \left(\frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) \left(\frac{ie^{i\alpha} - 1}{2e^{i\alpha}}\right)$$

سنحاول الآن إيجاد الشكل المثلثي للتعبير : $\left(\frac{ie^{i\alpha} - 1}{2e^{i\alpha}}\right)$

$$\left(\frac{ie^{i\alpha} - 1}{2e^{i\alpha}}\right) = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi) : \text{نضع}$$

$$\Leftrightarrow e^{-i\alpha} (ie^{i\alpha} - 1) = 2r \cos(\varphi) + 2i r \sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow i - e^{-i\alpha} = 2r \cos(\varphi) + 2i r \sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow i - \cos(-\alpha) - i \sin(-\alpha) = 2r \cos(\varphi) + 2i r \sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow i - \cos(\alpha) + i \sin(\alpha) = 2r \cos(\varphi) + 2i r \sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow -\cos(\alpha) + i(1 + \sin(\alpha)) = 2r \cos(\varphi) + i(2r \sin(\varphi))$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\cos(\alpha) = 2r \cos(\varphi) \\ 1 + \sin(\alpha) = 2r \sin(\varphi) \end{cases}$$

$$(2r \cos \varphi)^2 + (2r \sin \varphi)^2 = 4r^2 : \text{لدينا}$$

$$\Leftrightarrow (-\cos \varphi)^2 + (1 + \sin(\alpha))^2 = 4r^2$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + \sin(\alpha)) = 4r^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1 - 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1\right) = 4r^2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 4r^2$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 4r^2 \Leftrightarrow r = \pm \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

بما أن معيار عدد عقدي يكون دائما عدد موجبا

$$0 \leq \alpha < \pi : \text{لأن } 0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} < \pi$$

$$(1) \quad r = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) : \text{فإن}$$

نعوض r بقيمته في المعادلة الأولى من النظام نجد :

$$-\cos(\alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi - \alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\pi - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\varphi) = \frac{2\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2005

التمرين الأول

1

ليكن x و y عددين صحيحين نسبيين .

$$\begin{aligned} (E) \quad & \text{حل } (x, y) \Leftrightarrow (x+1)^2 = 9 + 5y \\ & \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) - 9 = 5y \\ & \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 5y \\ & \Leftrightarrow (x+4)(x-2) = 5y \\ & \Leftrightarrow 5/(x+4)(x-2) \\ & \Leftrightarrow 5/(x+4) \text{ ou } 5/(x-2) ; \text{ car } 5 \in \mathbb{P} \\ & \Leftrightarrow 5/(x+4) - 5 \text{ ou } 5/(x-2) \\ & \Leftrightarrow 5/(x-1) \text{ ou } 5/(x-2) \\ & \Leftrightarrow x \equiv 1 [5] \text{ ou } x \equiv 2 [5] \end{aligned}$$

التمرين الأول

1 ب

$$\begin{aligned} x \equiv 1 [5] & \Rightarrow 5/(x-1) \\ & \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; x-1 = 5k \\ & \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; x = 5k+1 \\ & \Rightarrow (5k+1+1)^2 = 9 + 5y ; d'après (E) \\ & \Rightarrow 25k^2 + 4 + 20k = 9 + 5y \\ & \Rightarrow y = 5k^2 + 4k - 1 ; k \in \mathbb{Z} \\ x \equiv 2 [5] & \Rightarrow 5/(x-2) \\ & \Rightarrow (\exists k' \in \mathbb{Z}) ; x-2 = 5k' \\ & \Rightarrow (\exists k' \in \mathbb{Z}) ; x = 5k' + 2 \\ & \Rightarrow (\exists k' \in \mathbb{Z}) ; (5k' + 3)^2 = 9 + 5y \\ & \Rightarrow (\exists k' \in \mathbb{Z}) ; 25k'^2 + 9 + 30k' = 9 + 5y \\ & \Rightarrow (\exists k' \in \mathbb{Z}) ; y = 5k'^2 + 6k' \end{aligned}$$

عكسيا نتحقق أن جميع الأزواج $(5k+1; 5k^2+4k-1)$ من \mathbb{Z}^2 تحقق المعادلة (E) . وكذلك جميع الأزواج $(5k'+2; 5k'^2+6k')$ من \mathbb{Z}^2 تحقق كذلك المعادلة (E) . وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) في \mathbb{Z}^2 هي : جميع الأزواج $(5k+1; 5k^2+4k-1)$ و جميع الأزواج $(5k'+2; 5k'^2+6k')$ حيث k و k' عدنان صحيحان نسبيين .

التمرين الأول

2

تذكير بمبدأ خوارزمية أقليدس في \mathbb{Z} . $\frac{a}{c} \mid \frac{b}{d} \Rightarrow a \wedge b = b \wedge c$

$$\frac{5k^2+4k-1}{3k-1} \mid \frac{5k+1}{k} : \text{ لدينا}$$

إذن حسب مبدأ خوارزمية أقليدس نكتب :

$$(5k^2+4k-1) \wedge (5k+1) = (5k+1) \wedge (3k-1) \quad (1)$$

$$\frac{5k+1}{2k+2} \mid \frac{3k-1}{1} : \text{ لدينا}$$

إذن حسب مبدأ خوارزمية أقليدس نكتب :

$$(5k+1) \wedge (3k-1) = (3k-1) \wedge (2k+2) \quad (2)$$

$$\frac{3k-1}{k-3} \mid \frac{2k+2}{1} : \text{ لدينا}$$

إذن حسب مبدأ خوارزمية أقليدس نكتب :

$$(3k-1) \wedge (2k+2) = (2k+2) \wedge (k-3) \quad (3)$$

$$\frac{2k+2}{8} \mid \frac{k-3}{2} : \text{ لدينا}$$

إذن حسب مبدأ خوارزمية أقليدس نكتب :

$$(2k+2) \wedge (k-3) = (k-3) \wedge 8 \quad (4)$$

من (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن :

$$(5k^2+4k-1) \wedge (5k+1) = (k-3) \wedge 8$$

أو بتعبير آخر : القاسم المشترك الأكبر للعددين $(5k^2+4k-1)$ و $(5k+1)$ هو نفسه القاسم المشترك الأكبر للعددين $(k-3)$ و 8 حيث k عنصر من \mathbb{Z} .

التمرين الأول

3

$$\begin{cases} \overline{121(x)} = \overline{59(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1 [5] \end{cases} \text{ لنحل في } \mathbb{N}^2 \text{ النظمة :}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 5y + 9 \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1 [5] \end{cases} \text{ هذه النظمة تصبح :}$$

$$\begin{cases} (E) \text{ حل } (x, y) \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1 [5] \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} (x+1)^2 = 5y+9 \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1 [5] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5k+1 \\ y = 5k^2+4k-1 \\ x \wedge y = 8 \end{cases} \text{ إذن حسب السؤال (ب) :}$$

$$\begin{cases} x = 5k+1 \\ y = 5k^2+4k-1 \\ (5k+1) \wedge (5k^2+4k-1) = 8 \end{cases} \text{ يعني :}$$

$$\begin{cases} x = 5k+1 \\ y = 5k^2+4k-1 \\ (k-3) \wedge 8 = 8 \end{cases} \text{ و منه حسب نتيجة السؤال (2) :}$$

$$\begin{cases} x = 5k+1 \\ y = 5k^2+4k-1 \\ 8/(k-3) \end{cases} \text{ و منه نستنتج أن :}$$

$$\begin{cases} x = 5k+1 \\ y = 5k^2+4k-1 \\ (\exists n \in \mathbb{Z}) ; (k-3) = 8n \end{cases} \text{ يعني :}$$

$$\begin{cases} x = 5k+1 \\ y = 5k^2+4k-1 \\ (\exists n \in \mathbb{Z}) ; k = 8n+3 \end{cases} \text{ يعني :}$$

$$\begin{cases} x = 5(8n+3)+1 \\ y = 5(8n+3)^2+4(8n+3)-1 \\ \text{On choisit } n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ يعني :}$$

$$\begin{cases} x = 40n+16 \\ y = 320n^2+272n+56 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ و منه :}$$

عكسيا : نلاحظ أن جميع الأزواج من \mathbb{N}^2 التي نكتب على شكل $(40n+16; 320n^2+272n+56)$ هي حلول للنظمة السابقة حيث n عنصر من \mathbb{N} .

إذن مجموعة حلول النظمة في \mathbb{N}^2 هي جميع الأزواج $(40n+16; 320n^2+272n+56)$ حيث $n \in \mathbb{N}$.

التمرين الثاني

1 I

نفصل في هذا التمرين بين ثلاث حالات أساسية .
الحالة الأولى : إذا كان $2 - m > 0$ و $10 - m > 0$.

إذن : $m < 2$ و $m < 10$.

$$(C_m) : \frac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2-m})^2} = 1$$

إذن (C_m) إهليلج .

الحالة الثانية : إذا كان $2 < m < 10$.

إذن $10 - m > 0$ و $m - 2 > 0$.

$$(C_m) : \frac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2} = 1$$

إذن (C_m) هذلول .

الحالة الثالثة : إذا كان $m > 10$.

فإن $(m - 2) > 0$ و $(10 - m) < 0$.

$$(C_m) : -\left(\frac{x^2}{(\sqrt{m-10})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}\right) = 1$$

ونلاحظ أن الكمية $\left(\frac{x^2}{(\sqrt{m-10})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}\right)$ موجبة دائما .

إذن (C_m) مجموعة فارغة $((C_m) = \emptyset)$.

التمرين الثاني

2 I

نفصل بين ثلاث حالات :

الحالة الأولى : إذا كان $m < 2$ إذن $m < 10$.

$$(C_m) : \frac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2-m})^2} = 1$$

أي أن (C_m) إهليلج مركزه $O(0,0)$ و رؤوسه الأربعة هي :

$$\begin{cases} A(\sqrt{10-m}; 0) \\ B(-\sqrt{10-m}; 0) \\ A'(0; \sqrt{2-m}) \\ B'(0; -\sqrt{2-m}) \end{cases}$$

نضع $a = \sqrt{10-m}$ و $b = \sqrt{2-m}$. إذن : $c = 2\sqrt{2}$.
ومنه فإن بؤرتا الإهليلج (C_m) هما : $F(2\sqrt{2}; 0)$ و $F'(-2\sqrt{2}; 0)$.

الحالة الثانية : $2 < m < 10$.

$$(C_m) : \frac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2} = 1$$

إذن (C_m) هذلول مركزه $O(0,0)$ ورأساه $A(\sqrt{10-m}; 0)$ و

$A'(-\sqrt{10-m}; 0)$.

نضع $a = \sqrt{10-m}$ و $b = \sqrt{m-2}$.

إذن : $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{2}$.

إذن بؤرتا الهذلول (C_m) هما $F(2\sqrt{2}; 0)$ و $F'(-2\sqrt{2}; 0)$.
 (C_m) يقبل مقاربين (Δ) و (Δ') معرفين بما يلي :

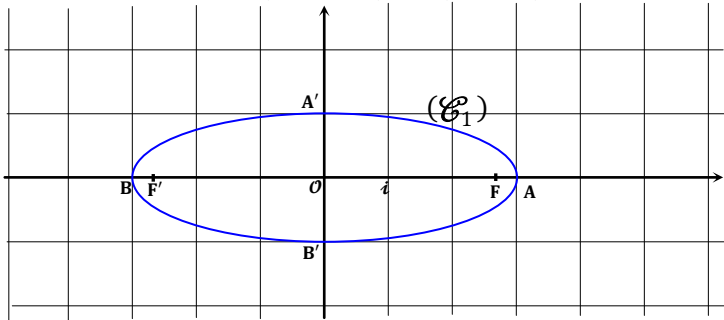
$$\begin{cases} (\Delta) : y = \left(\sqrt{\frac{m-2}{10-m}}\right)x \\ (\Delta') : y = -\left(\sqrt{\frac{m-2}{10-m}}\right)x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\Delta) : y = \frac{b}{a}x \\ (\Delta') : y = -\frac{b}{a}x \end{cases} \text{ يعني}$$

التمرين الثاني

3 I

لدينا حسب ما سبق (C_1) إهليلج مركزه $O(0,0)$ و رؤوسه $A(3,0)$ و $B(-3,0)$ و $A'(0,1)$ و $B'(0,-1)$.
و بؤرتاه هما $(2\sqrt{2}, 0)$ و $F'(-2\sqrt{2}, 0)$.



التمرين الثاني

1 II

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة (E) التالية :

$$(E) : z^2 - (6 \cos \alpha)z + (1 + 8 \cos^2 \alpha) = 0$$

لدينا : $\Delta = (6 \cos \alpha)^2 - 4(1 + 8 \cos^2 \alpha)$

$$= 36 \cos^2 \alpha - 4 - 32 \cos^2 \alpha$$

$$= 4 \cos^2 \alpha - 4$$

$$= -4(1 - \cos^2 \alpha)$$

$$= -4(\sin^2 \alpha)$$

$$= (2i(\sin \alpha))^2$$

إذن (E) تقبل حلين عقديين مترافقين z_1 و z_2 . و معرفين بما يلي :

$$\begin{cases} z_1 = \frac{6 \cos \alpha + 2i \sin \alpha}{2} = 3 \cos \alpha + i \sin \alpha \\ z_2 = \frac{6 \cos \alpha - 2i \sin \alpha}{2} = 3 \cos \alpha - i \sin \alpha \end{cases}$$

التمرين الثاني

2 II

نضع $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$.

نعلم أن : $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) ; \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

$$\text{إذن : } \frac{9 \cos^2 \alpha}{9} + \frac{\sin^2 \alpha}{1} = 1$$

$$\text{ومنه : } \frac{(3 \cos \alpha)^2}{3^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{1^2} = 1$$

إذن الزوج $(3 \cos \alpha ; \sin \alpha)$ يُحقق معادلة الإهليلج (C_1) .

و بالتالي : $M_1 \in (C_1)$.

التمرين الثاني

2 II

لتكن $P(x_0; y_0)$ نقطة من الإهليلج (C_1) .

المعادلة الديكارتية لـ (T) مماس الإهليلج (C_1) في P تُكتب على الشكل :

$$(T) : \frac{xx_0}{9} + \frac{yy_0}{1} = 1 \Rightarrow (T) : y = \left(\frac{-x_0}{9y_0}\right)x + 1$$

لدينا M_1 هي صورة العدد العقدي z_1 .

إذن النقطة M_1 معرفة بالزوج $(3 \cos \alpha ; \sin \alpha)$.

ومنه فإن المعادلة الديكارتية المختصرة لـ (OM_1) تُكتب على شكل :

$$(OM_1) : y = \left(\frac{\sin \alpha}{3 \cos \alpha}\right)x$$

ننتقل من الكتابة : $(OM_1) \parallel (T)$.

هذا يعني أن لهما نفس الميل . أي : $\left(\frac{-x_0}{9y_0}\right) = \left(\frac{\sin \alpha}{3 \cos \alpha}\right)$.

$$\text{ومنه : } (*) \quad x_0 = -3y_0 \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)$$

و بما أن : $P(x_0, y_0) \in (C_1)$.

التمرين الثالث



نضع : $u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k}$

لدينا : $u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{C_n^{k+1} \left(\frac{10}{n-10}\right)^{k+1} \left(\frac{n-10}{n}\right)^n}{C_n^k \left(\frac{10}{n-10}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^n}$

$$= \frac{C_n^{k+1} \left(\frac{10}{n-10}\right)^{k+1-k}}{C_n^k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} \times \frac{10}{n-10}$$

$$= \left(\frac{n-k}{k+1}\right) \left(\frac{10}{n-10}\right)$$

التمرين الثالث



لدينا حسب المعطيات $k \geq 0$.

$$u_k \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{n-k}{k+1}\right) \left(\frac{10}{n-10}\right) \geq 1 ; k \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)} \geq 1$$

بما أن $n \geq 0$ فإن $(n-k) \geq 0$.

إذن العددين $10(n-k)$ و $(n-10)(k+1)$ موجبان معا.

$$\Leftrightarrow 10(n-k) \geq (n-10)(k+1)$$

$$\Leftrightarrow 10n - 10k \geq nk + n - 10k - 10$$

$$\Leftrightarrow 10n - n + 10 \geq k(n-10+10)$$

$$\Leftrightarrow k \leq \frac{9n+10}{n}$$

$$\Leftrightarrow k \leq 9 + \frac{10}{n}$$

$$\Leftrightarrow k \leq 9 ; \text{ on fait tendre } n \text{ vers } +\infty$$

و بالتالي : $0 \leq k \leq 9$

الشرط الثاني من السؤال : ننتقل من كون $10 \leq k \leq (n-1)$.

إذن $10 \leq 10(n-k) \leq 10(n-10)$ (1).

و لدينا كذلك : $10 \leq k \leq (n-1)$.

إذن : $11(n-10) \leq (n-10)(k+1) \leq 10(n-1)$

ومنه : $(2) \frac{1}{n(n-10)} \leq \frac{1}{(n-10)(k+1)} \leq \frac{1}{11(n-10)}$

نضرب التآطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$\frac{10}{n(n-10)} \leq \frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)} \leq \frac{10(n-10)}{11(n-10)}$$

ومنه : $u_k \leq 1$ أي $\frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)} \leq \frac{10}{11}$

التمرين الثالث



من أجل $0 \leq k \leq 9$ لدينا $u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1$

يعني من أجل $0 \leq k \leq 9$ لدينا $p_{k+1} \geq p_k$

و منه فإن المتتالية $(p_k)_{k \in [0,9]}$ تزايدية.

و من أجل $10 \leq k \leq n-1$ لدينا $u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} \leq 1$

يعني من أجل $10 \leq k \leq n-1$ لدينا $p_{k+1} \leq p_k$

إذن $(p_k)_{k \geq 10}$ تناقصية.

نستنتج إذن أن أكبر قيمة لهذه المتتالية هي p_{10} .

فإن : $\frac{x_0^2}{32} + \frac{y_0^2}{12} = 1$

نعوض x_0 بقيمته حسب (*) في آخر تعبير حصلنا عليه نجد :

$$\frac{1}{9} \left(-3y_0 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) + y_0^2 = 1 \Leftrightarrow y_0^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 = \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow y_0 = \pm \cos \alpha$$

إذا كان $y_0 = \cos \alpha$ فإن $x_0 = -3y_0 \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) = -3 \sin \alpha$

إذا كان $y_0 = -\cos \alpha$ فإن $x_0 = -3y_0 \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) = 3 \sin \alpha$

و بالتالي حصلنا على نقطتين P_1 و P_2 . $P_1(3 \sin \alpha ; -\cos \alpha)$. $P_2(-3 \sin \alpha ; \cos \alpha)$

بحيث المماس لـ (C_1) في P_1 و P_2 يكون موازيا للمستقيم (OM_1) .

التمرين الثاني



المعطيات :

$$\begin{cases} M_1(z_1) \\ M_2(z_2) \\ P_1(3 \sin \alpha - i \cos \alpha) \\ P_2(-3 \sin \alpha + i \cos \alpha) \end{cases}$$

$$OM_1^2 + OP_1^2 = |z_1|^2 + |3 \sin \alpha - i \cos \alpha|^2$$

$$= (9 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (9 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$= 9(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$= 9 \times 1 + 1 = 10$$

$$OM_2^2 + OP_2^2 = |z_2|^2 + |-3 \sin \alpha + i \cos \alpha|^2$$

$$= (9 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (9 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$= 9 \times 1 + 1 = 10$$

و بالتالي : $OM_1^2 + OP_1^2 = OM_2^2 + OP_2^2$

التمرين الثالث



تذكير : ليكن p احتمال وقوع حدث A في تجربة عشوائية E .

عند إعادة التجربة E و ذلك n مرة متتالية فإن احتمال الحصول على

الحدث A بالضبط k مرة هو : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

و لدينا : $\sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1$

انتهى التذكير

في التمرين، الحدث A هو الحصول على كرة بيضاء و لدينا $p(A) = \frac{10}{n}$ و نتجز التجربة العشوائية n مرة متتالية.

إذن احتمال الحصول على الحدث A بالضبط k مرة هو احتمال الحصول

على k كرة بيضاء و يساوي : $p_k = C_n^k (p(A))^k (1-p(A))^{n-k}$

$$= C_n^k \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}$$

$$= C_n^k \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k} \left(\frac{n-10}{n-10}\right)^k \left(\frac{n-10}{n-10}\right)^n \left(\frac{n}{n}\right)^n$$

$$= C_n^k \left(\frac{10}{n-10}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^n \left(\frac{(n-10)^{n-k} (n-10)^k n^n}{n^k n^{n-k} (n-10)^n}\right)$$

$$= C_n^k \left(\frac{10}{n-10}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^n \left(\frac{(n-10)^n \cdot n^n}{n^k n^{n-k} (n-10)^n}\right)$$

$$= C_n^k \left(\frac{10}{n-10}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^n \left(\frac{(n-10)^n \cdot n^n}{n^n \cdot (n-10)^n}\right)$$

$$= C_n^k \left(\frac{10}{n-10}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^n$$

التمرين الرابع

3 I

دراسة تقعر المنحنى (C) نحتاج إلى دراسة إشارة المشتقة الثانية $f''(x)$

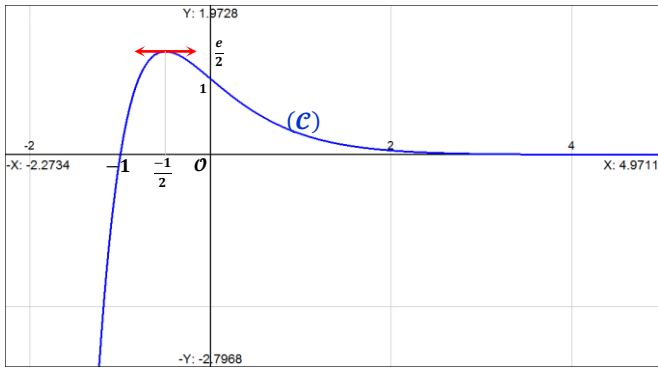
$$\begin{aligned} f''(x) &= (-1 + 2x)e^{-2x}' \\ &= -2e^{-2x} + 2(1 + 2x)e^{-2x} \\ &= -2e^{-2x} + 2e^{-2x} + 4xe^{-2x} \\ &= 4xe^{-2x} \end{aligned}$$

- إذا كان: $x = 0$: فإن: $f''(x) = 0$
 - إذا كان: $x > 0$: فإن: $f''(x) > 0$
 - إذا كان: $x < 0$: فإن: $f''(x) < 0$
- نستنتج إذن الجدول التالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
(C)	(مقعّر)	نقطة انعطاف $\Omega(0,1)$	(محدّب)

التمرين الرابع

3 I



التمرين الرابع

4 I

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)e^{-2x} \\ f'(x) = -(1+2x)e^{-2x} \\ f''(x) = 4xe^{-2x} \end{cases} \text{ لدينا}$$

إذن: $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 4xe^{-2x} - 3(1+2x)e^{-2x} + 2(1+x)e^{-2x}$
 $= (4x - 3 - 6x + 2 + 2x)e^{-2x} = -e^{-2x}$

إذن حل خاص للمعادلة التفاضلية (E):

$$(E) : y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$$

أي: $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = -e^{-2x}$

التمرين الرابع

4 I

الحل العام للمعادلة (E) يُكتب على شكل $y = y_H + y_P$

حيث y_P هو حل خاص للمعادلة (E) نختاره في هذه الحالة مساويا للدالة f و y_H هو حل المعادلة التفاضلية التالية: (E_H)

$$(E_H) : y'' + 3y' + 2y = 0$$

لنحل المعادلة (E_H) وذلك عن طريق حل معادلتها المميزة التالية:

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

هذه المعادلة تقبل الحلين -1 و -2 وذلك بعد حساب المميز $\Delta = 1$

$$\text{إذن: } y_H = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

وبالتالي: الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) يُكتب على شكل:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

$$= \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x} + f(x); (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$= \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x} + (1+x)e^{-2x}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

α و β ثابتين حقيقيين يتم تحديدهما في حالة معرفة الشروط البدئية

$y(0)$ و $y'(0)$. أي الوضعية البدئية للمتحرك و سرعته البدئية.

$$\begin{aligned} M = p_{10} &= C_n^k \left(\frac{10}{n-10}\right)^{10} \left(\frac{n-10}{n}\right)^n \text{ : ومنه} \\ &= \frac{n! \times 10^{10} \times (n-10)^n}{10! \times (n-10)! \times (n-10)^n \times n^n} \\ &= \frac{n!}{n^n} \times \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{(n-10)^n}{(n-10)!} \end{aligned}$$

التمرين الرابع

1 I

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x)e^{-2x} \\ &= \lim_{\substack{m \rightarrow -\infty \\ m=2(x+1)}} \left(\frac{e^2}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)} \right) = \frac{e^2}{2} (-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)e^{-2x} \\ &= \lim_{\substack{m \rightarrow +\infty \\ m=2(x+1)}} \left(\frac{e^2}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)} \right) = \frac{e^2}{2} \times 0 = 0 \end{aligned}$$

التمرين الرابع

1 I

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

إذن (C) يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$. و هو محور الأفاسيل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-2x} \text{ : لدينا}$$

$$= (1+0)(+\infty)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases} \text{ إذن من الوضعية التالية:}$$

نستنتج أن (C) يقبل فرعا شلجيا بجوار $-\infty$ اتجاهه محور الأرتيب.

التمرين الرابع

2 I

لدينا: $f(x) = (1+x)e^{-2x}; (\forall x \in \mathbb{R})$

إذن f دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها عبارة عن جداء الدالتين قابلتين للاشتقاق

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+x)'e^{-2x} + (1+x)(e^{-2x})' \\ &= e^{-2x} - 2(1+x)e^{-2x} \\ &= e^{-2x} - 2e^{-2x} - 2xe^{-2x} \\ &= -e^{-2x} - 2xe^{-2x} \\ &= -(1+2x)e^{-2x} \end{aligned}$$

بما أن: $-e^{-2x} < 0; (\forall x \in \mathbb{R})$

فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $(1+2x)$

إذا كان $x = \frac{-1}{2}$ فإن $f'(x) = 0$

إذا كان $x < \frac{-1}{2}$ فإن $f'(x) > 0$

إذا كان $x > \frac{-1}{2}$ فإن $f'(x) < 0$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) e^{-2\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{1}{2e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

نلخص إذن هذه النتائج في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f		$\frac{e}{2}$	0

$$\begin{aligned}
u \in [1,2] &\Rightarrow (u-1)^2 \geq 0 \\
&\Rightarrow u^2 - 2u + 1 \geq 0 \\
&\Rightarrow u^2 + 1 \geq 2u \\
&\Rightarrow \frac{u^2 + 1}{u} \geq 2 ; u \neq 0 \\
&\Rightarrow u + \frac{1}{u} \geq 2 ; u \neq 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{u} \geq 2 - u \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u \in [1,2] &\Rightarrow (1) \text{ et } (2) \\
&\Rightarrow \frac{1}{u} \leq 1 \text{ et } \frac{1}{u} \geq 2 - u \\
&\Rightarrow 2 - u \leq \frac{1}{u} \leq 1 \quad (*)
\end{aligned}$$

وبالتالي : $\forall u \in [1,2] ; (2-u) \leq \frac{1}{u} \leq 1$

التمرين الرابع

ب 2 III

ليكن x عنصرا من المجال $[0, n]$. حيث $n \in \mathbb{N}^*$.
 إذن : $0 \leq x \leq n$ و منه : $0 \leq \frac{x}{n} \leq 1$.
 نضع : $t = \frac{x}{n}$. إذن : $0 \leq t \leq 1$.

يعني أن : $1 \leq (t+1) \leq 2$
 نستطيع إذن تعويض u ب $(t+1)$ في التأيير (*) نجد :

$$\begin{aligned}
2 - (t+1) &\leq \frac{1}{t+1} \leq 1 \Leftrightarrow (1-t) \leq \frac{1}{t+1} \leq 1 \\
&\Rightarrow \int (1-t) dt \leq \int \left(\frac{1}{t+1} \right) dt \leq \int 1 dt \\
&\Rightarrow \left(t - \frac{t^2}{2} \right) \leq \ln(1+t) \leq t \\
&\Rightarrow \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \right) \leq \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \leq \frac{x}{n} \\
&\Rightarrow \left(x - \frac{x^2}{2n} \right) \leq n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \leq x ; n > 0
\end{aligned}$$

التمرين الرابع

أ 3 III

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} x \in [0; n] \\ n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right. &\Rightarrow n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \leq x \\
&\Rightarrow \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \leq x \\
&\Rightarrow \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \leq e^x \\
&\Rightarrow \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n e^{-2x} dx \leq \int_0^n e^{-x} dx \\
&\Rightarrow u_n \leq \int_0^n e^{-x} dx \quad (1)
\end{aligned}$$

التمرين الرابع

ب 3 III

$$\begin{aligned}
n \in \mathbb{N}^* &\Rightarrow x - \frac{x^2}{2n} \leq n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \\
&\Rightarrow x - \frac{x^2}{2n} \leq \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \\
&\Rightarrow e^{x - \frac{x^2}{2n}} \leq \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n
\end{aligned}$$

التمرين الرابع

1 II

يشير التكامل هندسيا إلى قياس طول أو مساحة أو حجم .
 إذن : $\mathcal{A} = \int_0^n f(x) dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^n \frac{(1+x)}{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{v'(x)} dx \\
&= [u(x) \cdot v(x)]_0^n - \int_0^n u'(x) \cdot v(x) dx \\
&= \left[\frac{-(1+x) e^{-2x}}{2} \right]_0^n - \frac{1}{2} \int_0^n e^{-2x} dx \\
&= \left[\frac{-(1+x) e^{-2x}}{2} \right]_0^n - \frac{1}{2} \left[\frac{-e^{-2x}}{2} \right]_0^n \\
&= \left(\frac{-(1+n) e^{-2n}}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-e^{-2n}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\
&= e^{-2n} \left(\frac{-(1+n)}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\
&= e^{-2n} \left(\frac{-3-2n}{4} \right) + \frac{3}{4} \\
&= \frac{-e^{-2n}}{4} (2n+3) + \frac{3}{4} \\
&= \frac{3 - (2n+3)e^{-2n}}{4}
\end{aligned}$$

التمرين الرابع

2 II

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 - (2n+3)e^{-2n}}{4} \right) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+3) e^{-2n} \right) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \left(\lim_{m \rightarrow +\infty} e^3 \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m} \right)} \right) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} (e^3 \times 0) = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

التمرين الرابع

1 III

سوف نستعمل تقنية المكاملة بتغيير المتغير .
 نضع : $t = nx$ و منه : $dt = n dx$.
 إذا كان : $x = 0$. فإن : $t = 0$.
 إذا كان : $x = 1$. فإن : $t = n$.

$$\begin{aligned}
u_n &= n \int_0^1 (f(x))^n dx = n \int_0^n \left(f\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n \frac{dt}{n} \\
&= \frac{n}{n} \int_0^n \left(\left(1 + \frac{t}{n} \right) e^{-\frac{2t}{n}} \right)^n \frac{dt}{n} \\
&= \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n} \right)^n e^{-2t} dt
\end{aligned}$$

التمرين الرابع

أ 2 III

$$\begin{aligned}
u \in [1,2] &\Leftrightarrow 1 \leq u \leq 2 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{u} \leq 1 \\
&\Rightarrow \frac{1}{u} \leq 1 \quad (1)
\end{aligned}$$

التمرين الرابع

I 4 III

ليكن $0 < a < 1$ و $a \leq x \leq 1$.
و سوف نستعمل كون الدالة f تناقصية على المجال $[0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} a \leq x \leq 1 &\Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(a) \\ &\Rightarrow 2e^{-2} \leq f(x) \leq f(a) \\ &\Rightarrow 0 < 2e^{-2} \leq f(x) \leq f(a) \\ &\Rightarrow 0 < n(f(x))^n \leq n(f(a))^n ; n > 0 \\ &\Rightarrow 0 < \int_a^1 n(f(x))^n dx \leq \int_a^1 n(f(a))^n dx \\ &\Rightarrow 0 < \int_a^1 n(f(x))^n dx \leq n(1-a)(f(a))^n \quad (\#) \end{aligned}$$

التمرين الرابع

ب 4 III

$$\begin{aligned} 0 < a < 1 &\Rightarrow f(1) < f(a) < f(0) \\ &\Rightarrow 2e^{-2} < f(a) < 1 \\ &\Rightarrow \ln(f(a)) < \ln 1 \\ &\Rightarrow \ln(f(a)) < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n(1-a)(f(a))^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n(1-a)e^{n \ln(f(a))} ; \ln(f(a)) < 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(f(a)) e^{n \ln(f(a))} \left(\frac{1-a}{\ln(f(a))} \right) \\ &= \lim_{\substack{m \rightarrow -\infty \\ m = n \ln(f(a))}} (me^m) \left(\frac{1-a}{\ln(f(a))} \right) \\ &= 0 \times \left(\frac{1-a}{\ln(f(a))} \right) = 0 \end{aligned}$$

this is a real number

إذن التأطير (#) يُصبح :

$$0 < \int_a^1 n(f(x))^n dx \leq \underbrace{n(1-a)(f(a))^n}_{n \rightarrow 0}$$

$n \rightarrow \infty$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^1 n(f(x))^n dx \right) = 0$$

التمرين الرابع

ج 4 III

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 n(f(x))^n dx \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^a n(f(x))^n dx \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^1 n(f(x))^n dx \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^a n(f(x))^n dx \right) + 0 = 1 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^a n(f(x))^n dx \right) = 1 ; \forall a \in]0,1[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow e^{(x-\frac{x^2}{2n})} \cdot e^{-2x} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \\ &\Rightarrow e^{-(x+\frac{x^2}{2n})} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \\ &\Rightarrow \int_0^n e^{-(x+\frac{x^2}{2n})} dx \leq \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx \\ &\Rightarrow \int_0^n e^{-(x+\frac{x^2}{2n})} dx \leq u_n \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N}^* &\Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow n^2 \geq 1 \\ &\Rightarrow n \leq n^3 \Rightarrow n^{\frac{1}{3}} \leq n \\ &\Rightarrow \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-(x+\frac{x^2}{2n})} dx \leq \int_0^n e^{-(x+\frac{x^2}{2n})} dx \quad (3) \end{aligned}$$

$$0 \leq x \leq x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x^2 \leq n^{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x^2 \leq \frac{2n}{2n^{\frac{2}{3}}} \\ &\Rightarrow 2n^{\frac{1}{3}} \leq \frac{2n}{x^2} \\ &\Rightarrow \frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{-x^2}{2n} \\ &\Rightarrow -x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}} \leq -x - \frac{x^2}{2n} \\ &\Rightarrow e^{\left(-x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} \leq e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)} \\ &\Rightarrow \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} dx \leq \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)} dx \quad (4) \end{aligned}$$

من (2) و (3) و (4) نستنتج أن :

$$\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} dx \leq \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)} dx \leq \int_0^n e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)} dx \leq u_n$$

$$\Rightarrow \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} dx \leq u_n \quad (5)$$

التمرين الرابع

ج 3 III

$$\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} dx \leq u_n \leq \int_0^n e^{-x} dx$$

يعني : $e^{\left(-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} [-e^{-x}]_0^{n^{\frac{1}{3}}} \leq u_n \leq [-e^{-x}]_0^n$

يعني : $e^{\left(-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} \left(-e^{-n^{\frac{1}{3}}} + 1\right) \leq u_n \leq \left(-e^{-n} + 1\right)$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ &1 \qquad \qquad \qquad 1 \end{aligned}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى العدد 1 .

ليكن a و b عددين حقيقيين .

لدينا : $H = \{ M_{(a,b)} \in G ; b > 0 \}$

لدينا حسب ما سبق : $I = M_{(0,1)} \in H$

و بما أن $1 > 0$ فإن $M_{(0,1)} \in H$

و منه H جزء غير فارغ من G

لتكن $M_{(c,d)}$ و $M_{(a,b)}$ مصفوفتين من H

لدينا : $M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}^{-1} = M_{(a,b)} \times M_{\left(\frac{-c}{d}, \frac{1}{d}\right)}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-c}{d} & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a - \frac{bc}{d} & \frac{b}{d} \end{pmatrix}$$

بما أن $d > 0$ و $b > 0$ فإن $\frac{b}{d} > 0$

$$\text{و منه : } M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a - \frac{bc}{d} & \frac{b}{d} \end{pmatrix} \in H$$

$$= M_{\left(\frac{a-bc}{d}, \frac{b}{d}\right)} \in H$$

و بالتالي نستنتج حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية أن (H, \times) زمرة

جزئية من الزمرة الأم (G, \times)

للإجابة على هذا السؤال أقترح طريقتين .

الطريقة الأولى : ليكن a و b عددين حقيقيين .

لدينا : $M_{(a,1)} \times M_{(b,1)} = M_{(a+b,1)}$

إذن : $M_{(a_1,1)} \times M_{(a_2,1)} \times \dots \times M_{(a_n,1)} = M_{(\sum a_i,1)}$

و منه : $M_{(a,1)} \times M_{(a,1)} \times \dots \times M_{(a,1)} = M_{(na,1)}$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; M_{(a,1)}^n = M_{(na,1)}$

$$\text{أي : } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

الطريقة الثانية : استعمال البرهان بالترجع .

نعتبر العبارة (P_n) المعرفة على \mathbb{N}^* بما يلي : $(P_n) : A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = A \text{ لدينا } n = 1$$

إذن العبارة (P_1) صحيحة .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و نفترض أن (P_n) صحيحة

$$(P_n) \text{ est vraie} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+1)a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie}$$

لقد حصلنا إذن على الوضعية التالية : $(P_1) \text{ est vraie}$

$$\{ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; (\forall n \in \mathbb{N}^*) \}$$

إذن حسب مبدأ التراجع : $(P_n) \text{ est vraie} ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$$\text{يعني : } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

أجوبة امتحان الدورة العادية 2006

نلاحظ في البداية أن المجموعة G جزء غير فارغ من $M_2(\mathbb{R})$.

لتكن $M_{(c,d)}$ و $M_{(a,b)}$ مصفوفتين من G .

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} ; (b,d) \neq (0,0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+bc & bd \end{pmatrix} ; \begin{cases} a+bc \neq 0 \\ bd \neq 0 \end{cases}$$

$$= M_{(a+bc, bd)} \in G$$

و بالتالي G جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.

لدينا \times قانون تجميعي في (G, \times) .

لأن G جزء مستقر من الزمرة $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.

و لدينا كذلك $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد للضرب \times في $M_2(\mathbb{R})$

إذن I هو نفسه العنصر المحايد للضرب \times في G .

و ذلك لأن : $I = M_{(0,1)} \in G$

لتكن $M_{(a,b)}$ مصفوفة من G .

تكون المصفوفة $M_{(a,b)}$ قابلة للقلب في G بالنسبة لـ \times

إذا و فقط إذا كان $\det(M_{(a,b)}) \neq 0$

$$\text{لدينا : } \det(M_{(a,b)}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = b - 0 = b$$

و بما أن $M_{(a,b)} \in G$ فإن : $b \neq 0$

و منه : $\det(M_{(a,b)}) = b \neq 0$

إذن $M_{(a,b)}$ تقبل مقلوبا في G و سوف نحدد مقلوب هذه المصفوفة

$$\text{بالعلاقة التالية : } A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\text{لدينا : } (M_{(a,b)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(M_{(a,b)})} \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{b} \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a}{b} & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

و لدينا : $\frac{1}{b} \neq 0$ $\Rightarrow b \neq 0$

$$\Rightarrow M_{\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)} \in G$$

و بالتالي كل مصفوفة $M_{(a,b)}$ من G تقبل ماثلا $M_{\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)}$ في G

بالنسبة لـ \times .

لنبين الآن أن \times ليس تبادليا في G . و من أجل ذلك نعطي مثلا مضادا :

نعتبر المصفوفتين $M_{(1,1)}$ و $M_{(2,2)}$.

$$M_{(1,1)} \times M_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{(2,2)} \times M_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن : $M_{(1,1)} \times M_{(2,2)} \neq M_{(2,2)} \times M_{(1,1)}$

إذن \times ليس تبادليا في G .

خلاصة : زمرة غير تبادلية (G, \times) .

\times ليس تبادليا في G .

\times تجميعي في G
 \times يقبل عنصرا محايدا $M_{(0,1)}$
 ماثلة $M_{(a,b)}$ في G هي $M_{\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)}$.

$$\begin{aligned} &= (na, 1)' \\ &= \left(\frac{-na}{1}, \frac{1}{1} \right) \\ &= (-na, 1) \end{aligned}$$

التمرين الثاني

1

$$\begin{aligned} (E) \text{ حل } (x, y) &\Leftrightarrow x^2(x+y) = y^2(x-y)^2 \\ &\Leftrightarrow (ad)^2(ad+bd) = (bd)^2(ad-bd)^2 \\ &\Leftrightarrow a^2d^3(a+b) = b^2d^3(a-b)^2d \\ &\Leftrightarrow a^2(a+b) = b^2d(a-b)^2; \quad d^3 \neq 0 \end{aligned}$$

التمرين الثاني

1

للإجابة على هذا السؤال نحتاج إلى أربع أدوات .

. **الأداة الأولى:** (PGCD)

$$a \wedge b = 1 \Rightarrow a^m \wedge b^n = 1; \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$$

$$a/bc \text{ et } a \wedge c = 1 \Rightarrow a/b. \quad (\text{Gauss})$$

. **الأداة الثالثة:** (Bezout)

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (m, n) \in \mathbb{Z}^2; \quad ma + nb = 1$$

. **الأداة الرابعة:** (التأليف الخطية)

$$\begin{cases} a/b \\ a/c \end{cases} \Rightarrow \forall (m, n) \in \mathbb{Z}; \quad a/(mb + nc)$$

. **الأداة الخامسة:** (Diophante)

$$a \wedge b = d \Rightarrow \exists (m, n) \in \mathbb{Z}^2; \quad ma + nb = d$$

ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E) حيث $d = x \wedge y$

إذن حسب الأداة الخامسة يوجد u و v من \mathbb{Z} حيث $xu + yv = d$

يعني: $adu + bdv = d$

نختزل بالعدد الغير منعدم d فنحصل على: $au + bv = 1$

و منه حسب Bezout نستنتج أن: $a \wedge b = 1$

إذن حسب الأداة الأولى نستنتج أن: $a^2 \wedge b = 1$ (*)

بما أن (x, y) حل للمعادلة (E) فإنه حسب السؤال أ):

$$\text{نكتب: } db^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$$

$$\text{نضع: } k = bd(a-b)^2 \in \mathbb{Z}$$

إذن $(a+b)a^2 = kb$ يعني أن $b/(a+b)a^2$

و بما أن $a^2 \wedge b = 1$ حسب (*) فإنه حسب Gauss: $b/(a+b)$

و نعلم أن $b/(-b)$ إذن حسب الأداة الرابعة

نستنتج أن $b/(a+b-b)$ يعني b/a (1)

و نعلم حسب ما سبق أن: $a \wedge b = 1$ (2)

إذن من (1) و (2) نستنتج أن: $b = 1$

التمرين الثاني

1

سوف نستعمل البرهان بالخلف . و نفترض أن $a = 1$

لدينا $x = ad$ و $y = bd$ و $b = 1$

إذن $x = d$ و $y = d$

بما أن الزوج (x, y) حل للمعادلة (E)

$$\text{فإن: } d^2(d+d) = d^2(d-d)^2$$

يعني أن: $2d^3 = 0$ أي: $d = 0$

و هذا تناقض واضح لأن $d = x \wedge y \neq 0$

إذن ما افترضناه كان خاطئا . و بالتالي $a \neq 1$

من جهة أخرى لدينا: $a - (a-1) = 1$

$$\text{يعني: } 1a - 1(a-1) = 1$$

إذن حسب Bezout نستنتج أن: $a \wedge (a-1) = 1$

و منه حسب الأداة الأولى نستنتج أن $a^2 \wedge (a-1) = 1$ (3)

لدينا $b = 1$ إذن حسب نتيجة السؤال أ): $(a+1)a^2 = d(a-1)^2$

نضع: $k = d(a-1) \in \mathbb{Z}$ إذن: $(a+1)a^2 = k(a-1)$

$$\text{و منه: } (a-1)/(a+1)a^2 \quad (4)$$

من (3) و (4) نستنتج حسب Gauss أن $(a-1)/(a+1)$

التمرين الأول

1

لنكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ مصفوفتين من G .

$$\text{لدينا: } M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = M_{(a+bc, bd)}$$

$$\begin{aligned} \varphi(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}) &= \varphi(M_{(a+bc, bd)}) \\ &= (a+bc; bd) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(M_{(a,b)}) \top \varphi(M_{(c,d)}) &= (a, b) \top (c, d) \\ &= (a+bc; bd) \quad (2) \end{aligned}$$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن:

$$\varphi(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}) = \varphi(M_{(a,b)}) \top \varphi(M_{(c,d)})$$

إذن تشكل (G, \times) من $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$

ليكن (c, d) عنصرا من $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

و لنحل في G المعادلة ذات المجهول $M_{(x,y)}$ التالية: $\varphi(M_{(x,y)}) = (c, d)$

هذه المعادلة تصبح: $(x, y) = (c, d)$

و منه: $x = c$ و $y = d$

إذن المعادلة $\varphi(M_{(x,y)}) = (c, d)$ تقبل حلا وحيدا في G

و هو المصفوفة $M_{(c,d)}$

أو بتعبير جميل نكتب:

$$(\forall (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*), (\exists! M_{(x,y)} \in G) : \varphi(M_{(x,y)}) = (c, d)$$

إذن φ تقابل من (G, \times) نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$

خلاصة: φ تشكل تقابل من (G, \times) نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$

التمرين الأول

2

نعلم أن التشاكل التقابلي يُحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق

و يُحولها إلى مجموعة الوصول

بما أن φ تشكل تقابلي من (G, \times) نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$ فإنه بإمكاننا

استنتاج البنية الجبرية للمجموعة $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$ انطلاقا من البنية الجبرية

للمجموعة (G, \times) و ذلك عن طريق التشاكل التقابلي φ

لدينا (G, \times) زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد بالقانون \times

هو المصفوفة $M_{(0,1)}$ و كل مصفوفة $M_{(a,b)}$ من G تقبل

مماثلة $M_{\left(\frac{-a}{b}, \frac{1}{b}\right)}$ في G بالقانون \times

إذن $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد بالقانون \top

هو $\varphi(M_{(0,1)})$ و كل زوج (c, d) من $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ يقبل مماثلا

في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ بالقانون \top و هو $\left(M_{(c,d)}\right)^{-1}$

يعني $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد بالقانون \top

هو الزوج $(0, 1)$ و كل زوج (c, d) من $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ يقبل مماثلا

في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ بالقانون \top و هو الزوج $\left(\frac{-c}{d}, \frac{1}{d}\right)$

التمرين الأول

3

للإجابة على هذا السؤال سوف نحتاج إلى استعمال صندوق الأدوات التالي:

- φ تشكل
- تعريف التطبيق φ
- $(M_{(a,1)})^n = M_{(na,1)}$
- $\left(\frac{-c}{d}, \frac{1}{d}\right)$ هو مماثل (c, d) بالنسبة لـ \top

$$\begin{aligned} &[(a, 1) \top (a, 1) \top \dots \top (a, 1)]' \\ &= [\varphi(M_{(a,1)}) \top \varphi(M_{(a,1)}) \top \dots \top \varphi(M_{(a,1)})]' \\ &= [\varphi(M_{(a,1)} \times M_{(a,1)} \times \dots \times M_{(a,1)})]' \\ &= [\varphi((M_{(a,1)})^n)]' \\ &= [\varphi(M_{(na,1)})]' \end{aligned}$$

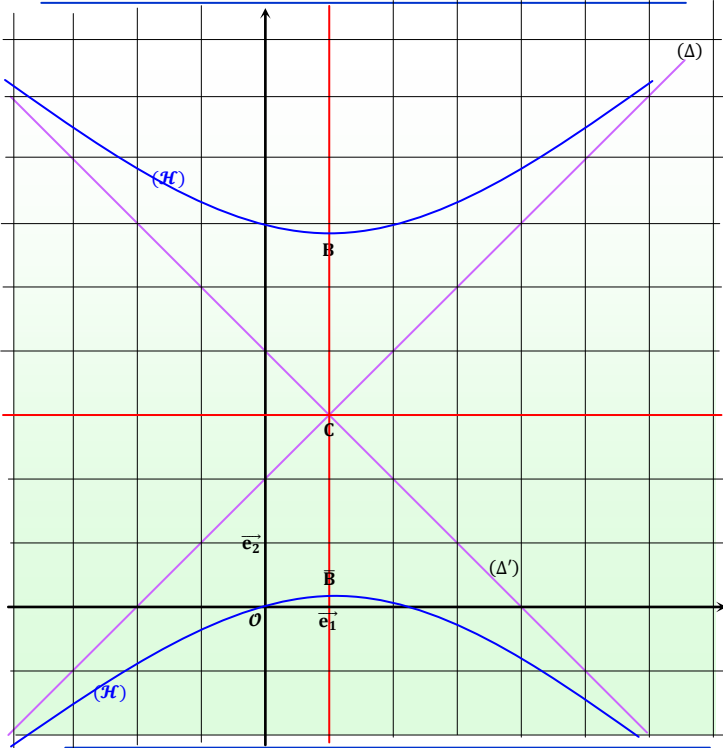
إذن (H) هذلول مركزه النقطة $C(1,0)$ ورأساهما $B(1; 3 - 2\sqrt{2})$ و $B(1; 3 + 2\sqrt{2})$. ومقارباها هما المستقيمان $\{ (\Delta) : y - 3 = x - 1$ و $(\Delta') : y - 3 = 1 - x$ المعرفين بما يلي :
 يعني : $\{ (\Delta) : y = x + 2$ و $(\Delta') : y = 4 - x$

التمرين الثالث

لدينا : $0^2 - 0^2 - 2 \times 0 + 6 \times 0 = 0$.
 إذن : $O(0,0) \in (H)$.

معادلة المماس (T_O) للهذلول (H) في النقطة O تُكتب بصفة عامة على شكل : $xx_0 - yy_0 = (x + x_0) - 3(y + y_0)$:
 في حالتنا هذه لدينا $x_0 = 0$ و $y_0 = 0$.
 إذن معادلة المماس (T_O) تُكتب على شكل : $(T_O) : x - 3y = 0$

التمرين الثالث



التمرين الثالث

لنحل في \mathbb{C} المعادلة : $P(z) = 4 - 6i$.
 يعني : $z^2 - (2 + 6i)z + (6i - 4) = 0$.
 لدينا : $\Delta = (2 + 6i)^2 - 4(6i - 4)$.
 إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 المعرفين بما يلي :

$$\begin{cases} z_1 = \frac{(2 + 6i) + 4i}{2} = 1 + 5i \\ z_2 = \frac{(2 + 6i) - 4i}{2} = 1 + i \end{cases}$$

التمرين الثالث

لدينا $w = 239 - i$ و $v = 1 + i$ و $u = 1 + 5i$.
 لدينا حسب مثلث Pascal :

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{matrix}$$

معاملات الحدودية $(a + b)^4$: $1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$

$$\begin{aligned} u^4 &= (1 + 5i)^4 \\ &= 1^4 + 4(5i) + 6(5i)^2 + 4(5i)^3 + (5i)^4 \\ &= 1 + 20i - 150 - 500i + 625 \\ &= 476 - 480i \end{aligned}$$

التمرين الثاني

لدينا : $\begin{cases} a \equiv -1 [a - 1] \\ a \equiv 1 [a - 1] \end{cases}$ إذن $\begin{cases} (a - 1)/(a + 1) \\ (a - 1)/(a - 1) \end{cases}$.
 و منه نستنتج من هاتين المتوافقيتين أن : $1 \equiv -1 [a - 1]$ أي : $2 \equiv 0 [a - 1]$.
 يعني أن العدد $(a - 1)$ يقسم العدد 2 .
 و نعلم أن القواسم الصحيحة الطبيعية للعدد 2 هي 1 و 2 فقط .
 إذن : $a - 1 = 2$ أو $a - 1 = 1$.
 يعني : $a = 1$ أو $a = 2$.

التمرين الثاني

لنحل في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة (E) .
 ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E) في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

$$\begin{cases} x = ad \\ y = bd \\ x \wedge y = d \\ b = 1 \\ a = 2 \text{ أو } a = 3 \end{cases}$$

نفصل إذن بين حالتين .
الحالة الأولى : إذا كان $a = 2$.
 إذن $(a, b) = (2, 1)$ و منه $(x, y) = (2d, d)$.
 و منه : $(E) : (2d)^2(2d + d) = d^2 d^2$.
 يعني : $(4d^2)(3d) = d^2 d^2$ أي : $d = 12$.
 وبالتالي : $(x, y) = (2d, d) = (24, 12)$.
الحالة الثانية : إذا كان $a = 3$.
 إذن : $(a, b) = (3, 1)$ و منه $(x, y) = (3d, d)$.
 و منه : $(E) : (3d)^2(3d + d) = d^2(2d)^2$.
 يعني : $36d^3 = 4d^4$ أي $d = 9$.
 وبالتالي : $(x, y) = (3d, d) = (27, 9)$.
 عكسيا نلاحظ أن : $24^2(24 + 12) = 12^2(24 - 12)^2$ و كذلك : $27^2(27 + 9) = 9^2(27 - 9)^2$.
خلاصة : الزوجان $(24, 12)$ و $(27, 9)$ هما الحلان الوحيدان للمعادلة (E) في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

التمرين الثالث

نضع : $\begin{cases} z = x + iy ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ aff(M) = z \end{cases}$.

$$\begin{aligned} P(z) &= z^2 - (2 + 6i)z \\ &= (x + iy)^2 - (2 + 6i)(x + iy) \\ &= x^2 - y^2 + 2i xy - (2x + 2i y + 6i x - 6y) \\ &= x^2 - y^2 + 2i xy - 2x - 2i y - 6i x + 6y \\ &= (x^2 - y^2 - 2x + 6y) + i(2xy - 2y - 6x) \end{aligned}$$

 $P(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \Re(P(z)) = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{و هذه الكتابة عبارة عن معادلة} \\ \text{ديكارتيّة مميزة للنقط} \\ \text{التصويكوف من أجلها } P(z) \text{ عددا} \\ \text{تخيليا} \end{array} \right)$

التمرين الثالث

$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (H) \Leftrightarrow \begin{aligned} &(x^2 - y^2 - 2x + 6y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2x) - (y^2 - 6y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 6y + 9) = -8 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 - (y - 3)^2 = -8 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2}{(2\sqrt{2})^2} - \frac{(y - 3)^2}{(2\sqrt{2})^2} = -1 \end{aligned}$

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; g_n(x) = nx + 2 \ln x$
 نلاحظ أن g_n دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* وهما $x \rightarrow nx$ و $x \rightarrow 2 \ln x$.
 ولدينا : $g'_n(x) = n + \frac{2}{x} = \frac{nx+2}{x} > 0$
 إذن دالة g_n تزايدية قطعاً على \mathbb{R}_+^* .

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (nx + 2 \ln x) = n \times 0^+ + 2 \times (-\infty) = -\infty$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (nx + 2 \ln x) = n \times (+\infty) + 2 \times (+\infty) = +\infty$

نرسم إذن جدول تغيرات الدالة g_n على النحو التالي :

x	0	$+\infty$
$g'_n(x)$		+
g_n	$-\infty$	$+\infty$

ليكن x عدداً حقيقياً موجباً قطعاً .

$$h'(x) = (\sqrt{x} - \ln x)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - (\ln x)'$$

$$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2x} - \frac{2}{2x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{2x}\right) \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}\right) = \frac{x - 4}{2x(\sqrt{x} + 2)}$$

نلاحظ أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \frac{1}{2x(\sqrt{x} + 2)} > 0$

إذن إشارة $h'(x)$ متعلقة بإشارة $(x - 4)$.

إذا كان : $x = 4$ فإن : $h'(x) = 0$

إذا كان : $x < 4$ فإن : $h'(x) < 0$

إذا كان : $x > 4$ فإن : $h'(x) > 0$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} - \ln x) = +\infty$

وكذلك : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \ln x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(1 - \frac{2 \ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ u = \sqrt{x}}} u \left(1 - 2 \left(\frac{\ln u}{u}\right)\right)$$

$$= (+\infty)(1 - 2(0^+))$$

$$= (+\infty)(1 - 0)$$

$$= (+\infty)$$

ومنه : $u^4 \times v = (476 - 480i)(1 + i)$

$$= 476 + 476i - 480i + 480$$

$$= 956 - 4i$$

$$= 4(239 - i)$$

$$= 4w$$

وبالتالي : $u^2 \times v = 4w$

$$\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow \tan(\alpha) = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5 = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\Leftrightarrow 5i = \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right) i$$

$$\Leftrightarrow 1 + 5i = \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right) i + 1$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{\sin \alpha + i \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{1}{\sin \alpha} \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}\right)$$

لدينا : $\sin \alpha \approx 0,19 \neq 0$ إذن : $\arg(a) \equiv \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) [2\pi]$
 من جهة أخرى لدينا : $\beta = \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) \Leftrightarrow \tan \beta = \frac{1}{239}$

$$\Leftrightarrow 239 = \frac{\cos \beta}{\sin \beta}$$

$$\Leftrightarrow 239 - i = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - i$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{\cos \beta - i \sin \beta}{\sin \beta}$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{1}{\sin \beta} (\cos(-\beta) + i \sin(-\beta))$$

$$\Leftrightarrow w = \left(\frac{1}{\sin \beta}\right) e^{-\beta i}$$

$$\Rightarrow \arg(w) \equiv -\beta [2\pi]$$

لدينا في البداية : $1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$
 $\Rightarrow \arg(v) \equiv \arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

من جهة أخرى : $\arg(u^4 \times v) \equiv \arg(w) [2\pi]$

$$\Rightarrow 4 \arg(u) + \arg(v) \equiv \arg(w) [2\pi]$$

$$\Rightarrow 4 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{\pi}{4} \equiv -\beta [2\pi]$$

$$\Rightarrow 4\alpha - \beta \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; (4\alpha - \beta) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

نستعين بالآلة الحاسبة و نضبط وحدة قياس الزوايا على الراديان rad .

لدينا $\alpha \approx 0,2 \text{ rad}$ و $\beta \approx 0,004 \text{ rad}$.

و نلاحظ أن $0 < \alpha < 1$ و $0 < \beta < 1$.

و من هذين التأطيرين نحصل على $-1 < (4\alpha - \beta) < 4$.

أي : $-0,3 < k < 0,5$: ومنه : $-1 < \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 4$.

و بما أن : $k \in \mathbb{Z}$. فإن : $k = 0$. وبالتالي : $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{أي : } 4 \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$$

و بالتالي نرسم جدول تغيرات الدالة h كما يلي :

x	0	4	$+\infty$
$h'(x)$		0	
h	$+\infty$	$2 - \ln 4$	$+\infty$

انطلاقا من هذا الجدول الجميل نلاحظ أن $(2 - \ln 4)$ قيمة دنوية للدالة h على $]0; +\infty[$

لأن h' تنعدم في 4 و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطة .

يعني : $h(x) > 2 - \ln 4$; $(\forall x > 0)$

و لدينا : $2 - \ln 4 \approx 0,6 > 0$

إذن : $h(x) > 0$; $(\forall x > 0)$

يعني : $\sqrt{x} - \ln x > 0$; $(\forall x > 0)$

و بالتالي : $\sqrt{x} > \ln x$; $(\forall x > 0)$

التمرين الرابع

لدينا دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $]0; +\infty[$

إذن g_n تقابل من $]0; +\infty[$ نحو $]0; +\infty[$.

و لدينا : $g_n(]0; +\infty[) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) =]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$

إذن g_n تقابل من المجال $]0; +\infty[$ نحو \mathbb{R}

من جهة أخرى لدينا : $\left] \frac{1}{n} ; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[\subset \mathbb{R}_+^*$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n \geq 3$

و لدينا كذلك : $g_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - 2 \ln n$

$$\begin{aligned} n \geq 3 &\Rightarrow 1 - 2 \ln n \leq 1 - 2 \ln 3 \\ &\Rightarrow 1 - 2 \ln n \leq -1,2 < 0 \\ &\Rightarrow 1 - 2 \ln n < 0 \\ &\Rightarrow g_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{و لدينا كذلك} & \quad g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + 2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ & = \sqrt{n} + \ln\left(\frac{1}{n}\right) \\ & = \sqrt{n} - \ln n \end{aligned}$$

لدينا : $n \geq 3 > 0$ (إذن حسب نتيجة السؤال 2) : $\sqrt{n} > \ln n$

و منه $\sqrt{n} - \ln n > 0$ أي : $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $g_n\left(\frac{1}{n}\right) \times g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 0$

نتوفر الآن على جميع الشروط اللازمة و الكافية لتطبيق مبرهنة (TVI)

إذن : $\exists ! \alpha_n \in \left] \frac{1}{n} ; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[; g_n(\alpha_n) = 0$

أي أن المعادلة $g_n(x) = 0$ ذات المجهول x تقبل حلاً وحيداً α_n

في المجال $\left] \frac{1}{n} ; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[$

هناك طريقة أخرى للإجابة دون المرور عبر مبرهنة القيم الوسيطة TVI .

و سوف نستعمل فقط تعريف التطبيق التبادلي و مفهوم السابق و اللاحق

و هذا ما سوف أعرضه الآن بدون فاصل إشهاري :

الطريقة الثانية :

ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً غير منعدم و أكبر من 3 .

$$\begin{aligned} x \in \left] \frac{1}{n} ; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[&\Leftrightarrow \frac{1}{n} < x < \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < x \\ &\Rightarrow x > 0 \\ &\Rightarrow x \in]0; +\infty[\end{aligned}$$

إذن : $\left] \frac{1}{n} ; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[\subset]0; +\infty[$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n \geq 3$

و لدينا دالة متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $]0; +\infty[$.

إذن دالة متصلة و تزايدية قطعاً على أي مجال يوجد ضمن $]0; +\infty[$.

من أجل ذلك نختار المجال $\left] \frac{1}{n} ; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[$.

إذن g_n تقابل من $\left] \frac{1}{n} ; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[$ نحو $\left] \frac{1}{n} ; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[$.

$$\begin{aligned} \text{و لدينا} & \quad g_n\left(\left] \frac{1}{n} ; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[\right) = \left] g_n\left(\frac{1}{n}\right) ; g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right[\\ & =]1 - 2 \ln n ; \sqrt{n} - \ln n[\end{aligned}$$

إذن g_n تقابل من $\left] \frac{1}{n} ; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[$ نحو $]1 - 2 \ln n ; \sqrt{n} - \ln n[$

لنبين أن 0 ينتمي إلى المجال $]1 - 2 \ln n ; \sqrt{n} - \ln n[$.

$$\begin{aligned} n \geq 3 &\Rightarrow 1 - 2 \ln n \leq 1 - 2 \ln 3 \\ &\Rightarrow 1 - 2 \ln n \leq -1,2 < 0 \\ &\Rightarrow 1 - 2 \ln n < 0 \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \geq 3 &\Rightarrow n > 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{n} > \ln n ; \text{ d'après (2)} \\ &\Rightarrow \sqrt{n} - \ln n > 0 \quad (**) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) \text{ et } (**) &\Rightarrow 1 - 2 \ln n < 0 < \sqrt{n} - \ln n \\ &\Rightarrow 0 \in]1 - 2 \ln n ; \sqrt{n} - \ln n[\end{aligned}$$

بما أن g_n تقابل من $\left] \frac{1}{n} ; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[$ نحو $]1 - 2 \ln n ; \sqrt{n} - \ln n[$

و 0 عنصر من المجال $]1 - 2 \ln n ; \sqrt{n} - \ln n[$. فإن الصفر

يملك سابقاً واحداً α_n من المجال $\left] \frac{1}{n} ; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[$ بالتقابل g_n .

أو بتعبير آخر : $\exists ! \alpha_n \in \left] \frac{1}{n} ; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[; g_n(\alpha_n) = 0$

أو بتعبير أخير : المعادلة $g_n(x) = 0$ ذات المجهول α_n تقبل حلاً وحيداً

في المجال $\left] \frac{1}{n} ; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[$.

التمرين الرابع

$$\begin{aligned} \text{لدينا} & \quad \left(\frac{1}{n}\right) < \alpha_n < \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ & \quad \swarrow \quad \searrow \\ & \quad 0 \quad \quad 0 \end{aligned}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = 0$

التمرين الرابع

الجزء الثاني

$$\begin{aligned} \text{لدينا} & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt[3]{x} e^{-x}}{x} \right) \\ & = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}} e^x} \right) = (+\infty) \left(\frac{1}{1} \right) = +\infty \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

إذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر .
و بذلك نستنتج أن (C) يقبل مماساً رأسياً موجهاً نحو الأعلى في الصفر .
و هذا المماس هو محور الأرتياب .

التمرين الرابع

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{3}} e^{-x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{e^x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} \right) \times \left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \right) = 0 \end{aligned}$$

إذن (C) يقبل مقارباً أفقياً بجوار $+\infty$ و هو محور الأفصايل .

لكي نبين أن $f(I) \subset I$.

يكفي أن نبين الإستلزام التالي: $y \in f(I) \Rightarrow y \in I$

$$\begin{aligned} y \in f(I) &\Rightarrow (\exists x \in I) ; f(x) = y \\ &\Rightarrow x \in I \text{ et } f(x) = y \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) = y \\ &\Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) \leq f(x) \leq f(1) \text{ et } f(x) = y \end{aligned}$$

car f est une fonction croissante sur $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0,5 \geq y \geq 0,36 \\ &\Rightarrow 1 > 0,5 \geq y \geq 0,36 > \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow 1 > y > \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow y \in \left] \frac{1}{3}; 1 \right[\subset \left] \frac{1}{3}; 1 \right[\\ &\Rightarrow y \in I \end{aligned}$$

و بالتالي: $f(I) \subset I$.

لدينا: $(\forall x > 0) ; f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$

$$\begin{aligned} x \in I &\Rightarrow x \geq \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow f(x) \leq f\left(\frac{1}{3}\right) \text{ car } f \text{ est } \searrow \text{ sur } \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[\\ &\Rightarrow f(x) \leq 0,5 < 1 \\ &\Rightarrow f(x) < 1 \\ &\Rightarrow |f(x)| < 1 ; \text{ car } f(x) \geq 0 \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} x \in I &\Rightarrow x \geq \frac{1}{3} > \frac{1}{5} \Rightarrow x > \frac{1}{5} \\ &\Rightarrow 5x > 1 \\ &\Rightarrow 3x + 2x > 1 \\ &\Rightarrow 2x > 1 - 3x \\ &\Rightarrow 2 > \frac{1-3x}{x} \quad (*) ; \text{ avec } x > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in I &\Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1-3x+2x \geq 0 \\ 1-3x \geq -2x \\ \left(\frac{1-3x}{x}\right) \geq -2 ; x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(**)

$$\begin{aligned} (*) \text{ et } (**) &\Rightarrow -2 \leq \frac{1-3x}{x} < 2 \\ &\Rightarrow \left| \frac{1-3x}{x} \right| < 2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x) &\Rightarrow |f'(x)| = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{1-3x}{x} \right| \cdot |f(x)| \\ &\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{3} \times 2 \times 1 ; \text{ d'après (1) et (2)} \\ &\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ليكن x عنصرا من المجال $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{لدينا: } f'(x) = (x^{\frac{1}{3}} e^{-x})' &= (x^{\frac{1}{3}})' e^{-x} + (x^{\frac{1}{3}})' (e^{-x})' \\ &= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} e^{-x} - e^{-x} x^{\frac{1}{3}} \\ &= (x^{\frac{1}{3}} e^{-x}) \left(\frac{1}{3} x^{-1} - 1\right) \\ &= (x^{\frac{1}{3}} e^{-x}) \left(\frac{1}{3x} - 1\right) \\ &= (x^{\frac{1}{3}} e^{-x}) \left(\frac{1-3x}{3x}\right) \\ &= \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x) \end{aligned}$$

و بالتالي: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$

لدينا: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \begin{cases} e^{-x} > 0 \\ 3x > 0 \\ x^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3} \ln x} > 0 \end{cases} \quad \text{نلاحظ أن}$$

إذن: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \frac{f(x)}{3x} > 0$

و بذلك فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $(1-3x)$.

إذا كان: $x = \frac{1}{3}$ فإن: $f'(x) = 0$

إذا كان: $x > \frac{1}{3}$ فإن: $f'(x) < 0$

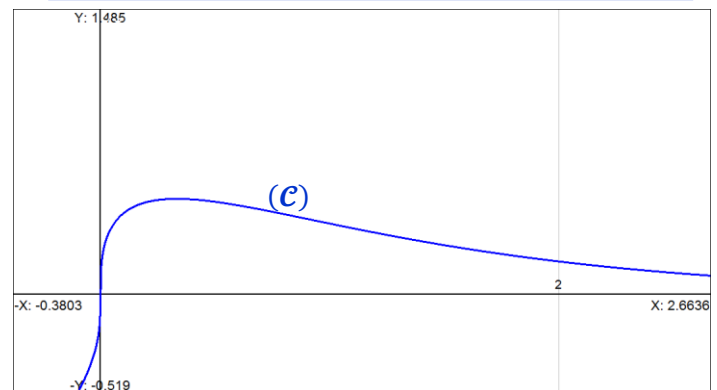
إذا كان: $x < \frac{1}{3}$ فإن: $f'(x) > 0$

و لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

و كذلك: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{3}} e^{-x} = 0$

إذن نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي:

x	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
f	0	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	0



ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعاً .

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \sqrt[3]{x} e^{-x} = x \Rightarrow x e^{-3x} = x^3 \\ &\Rightarrow e^{-3x} = x^2 ; \text{ car } x \neq 0 \\ &\Rightarrow \ln(e^{-3x}) = \ln(x^2) \\ &\Rightarrow -3x = 2 \ln x \\ &\Rightarrow 3x + 2 \ln x = 0 \\ &\Rightarrow g_3(x) = 0 \end{aligned}$$

و من خلال نتيجة السؤال (3) أ) من الجزء الأول، رأينا أن المعادلة

$$g_n(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا } \alpha_n \text{ حيث } \left[\frac{1}{n}; \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

إذن المعادلة $g_3(x) = 0$ هي الأخرى تقبل حلا وحيدا α_3 حيث

$$\frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

وبالتالي المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا وهو α_3 حيث $\frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3}}$

نعتبر العبارة (P_n) المعرفة على \mathbb{N} بما يلي : $u_n \in I$: (P_n)

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = \frac{1}{3} \in \left[\frac{1}{3}; 1 \right] = I$

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و نفترض أن (P_n) صحيحة .

$$\begin{aligned} (P_n) \text{ est vraie} &\Rightarrow u_n \in I \\ &\Rightarrow f(u_n) \in f(I) \\ &\Rightarrow f(u_n) \in I ; \text{ car } f(I) \subset I \\ &\Rightarrow u_{n+1} \in I \\ &\Rightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie} \end{aligned}$$

لقد حصلنا إذن على الوضعية الترجعية التالية : $(P_0) \text{ est vraie}$

$$(P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N}$$

إذن حسب مبدأ التراجع : $(P_n) \text{ est vraie} ; (\forall n \in \mathbb{N})$

يعني : $u_n \in I ; (\forall n \in \mathbb{N})$

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in I$

و لدينا كذلك حسب السؤال ج) : $\alpha_3 \in I$

نستنتج إذن أن : $[u_n, \alpha_3] \subset I$

بما أن f دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على I فإن f متصلة و قابلة

لاشتقاق كذلك على المجال $[u_n, \alpha_3]$.

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايد المتناهية (TAF) في هذا المجال

$$\text{على الدالة } f \text{ نجد : } \exists c \in]u_n ; \alpha_3[; \frac{f(u_n) - f(\alpha_3)}{u_n - \alpha_3} = f'(c)$$

$$\text{يعني : } |f(u_n) - f(\alpha_3)| = |f'(c)| \cdot |u_n - \alpha_3|$$

$$\text{لدينا حسب السؤال (3) : } |f'(x)| \leq \frac{2}{3} ; (\forall x \in I)$$

$$\text{إذن من أجل } x = c \text{ نجد : } f'(c) \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{و منه : } (\forall n \in \mathbb{N}) , |f'(c)| \times |u_n - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3|$$

$$\text{يعني : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |f(u_n) - f(\alpha_3)| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3|$$

$$\text{أي : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3| \quad (\blacksquare)$$

الطريقة الأولى :

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3|$

$$\begin{aligned} \text{pour } (n-1) &\Rightarrow |u_n - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_{n-1} - \alpha_3| \\ &\leq \frac{2}{3} \frac{2}{3} |u_{n-2} - \alpha_3| \\ &\leq \frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{2}{3} |u_{n-3} - \alpha_3| \\ &\vdots \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_{n-n} - \alpha_3| \end{aligned}$$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_n - \alpha_3|$ (*)

لدينا : $\alpha_3 \in I \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \alpha_3 \leq 1$

$$\Rightarrow \frac{-2}{3} \leq \frac{1}{3} - \alpha_3 \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{3} - \alpha_3 \right| \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow |u_0 - \alpha_3| \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} ; \text{ d'après (*)}$$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

الطريقة الثانية : (التراجع)

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

من أجل $n = 0$ لدينا : $|u_0 - \alpha_3| \leq \frac{2}{3}$

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عنصرا من \mathbb{N} و نفترض أن (P_n) صحيحة .

$$(P_n) \text{ est vraie} \Rightarrow |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$$

et cela d'après (■)

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$$

$$\Rightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie}$$

و نحصل بذلك على الوضعية الترجعية التالية : $(P_0) \text{ est vraie}$

$$(P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N}$$

إذن حسب مبدأ التراجع نبين أن : $(P_n) \text{ est vraie} ; (\forall n \in \mathbb{N})$

$$\text{يعني : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

ليكن x و t عددين حقيقيين حيث $x \leq t \leq 8$

$$\begin{aligned} x \leq 8x &\Rightarrow t^{\frac{1}{3}} \leq (8x)^{\frac{1}{3}} ; \text{car } x > 0 \\ &\Rightarrow e^{-t} t^{\frac{1}{3}} \leq e^{-t} (8x)^{\frac{1}{3}} ; \text{car } e^{-t} > 0 \\ &\Rightarrow \int_x^{8x} (e^{-t} t^{\frac{1}{3}}) dt \leq \int_x^{8x} (e^{-t} (8x)^{\frac{1}{3}}) dt \\ &\Rightarrow F(x) \leq (8x)^{\frac{1}{3}} \int_x^{8x} e^{-t} dt \\ &\Rightarrow F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} [-e^{-t}]_x^{8x} \\ &\Rightarrow F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} (-e^{-8x} + e^{-x}) \\ &\Rightarrow F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} e^{-x} (1 - e^{-7x}) \\ &\Rightarrow F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x}) \quad (1) \end{aligned}$$

من جهة أخرى لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f(x) \geq 0$

ولدينا : $(\forall x \geq 0); F(x) = \int_x^{8x} f(t) dt$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); F(x) \geq 0$ (2)

لأن F عبارة عن دالة أصلية لدالة موجبة إذن فهي موجبة كذلك .

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall x \geq 0); 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$$

نطلق من التأطير التالي :

$$(\forall x \geq 0); 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2f(x)(1 - e^{-7x}) &: \text{ لدينا} \\ &= 2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-7x}) \\ &= 2 \times 0 \times (1 - 0) = 0 \end{aligned}$$

إذن التأطير السابق يُصبح : $0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$

$$\begin{array}{ccc} x \rightarrow +\infty & & x \rightarrow +\infty \\ \swarrow & & \swarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

و بالتالي حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$

نلخص النتائج التي تم التوصل إليها بخصوص الدالة F في الجدول التالي :

x	0	$\frac{\ln 16}{7}$	$+\infty$
$F'(x)$		+	-
F	0	$F\left(\frac{\ln 16}{7}\right)$	0

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}); -\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3$
 بما أن $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ متتالية هندسية أساسها هو العدد الحقيقي $\frac{2}{3}$

و هو عدد موجب و أصغر من 1 . إذن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$
 و بالتالي نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); -\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}_{n \rightarrow \infty} + \alpha_3 \leq u_n \leq \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}_{n \rightarrow \infty} + \alpha_3$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim(u_n) = \alpha_3$

لدينا f دالة متصلة على المجال $[0; +\infty[$.

إذن f تقبل عدة دوال أصلية على هذا المجال . و بالخصوص تقبل

دالة أصلية h حيث :

$$\begin{cases} h(x) = \int_a^x f(t) dt ; a \geq 0 \\ h'(x) = f(x) ; \forall x \geq 0 \\ h(a) = 0 \end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{8x} f(t) dt \\ &= \int_x^a f(t) dt + \int_a^{8x} f(t) dt ; a \geq 0 \\ &= -\int_a^x f(t) dt + \int_a^{8x} f(t) dt ; a \geq 0 \\ &= -h(x) + h(8x) \end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall x \geq 0); F(x) = h(8x) - h(x)$

نلاحظ أن $x \geq 0$ إذن $8x \geq 0$.

و منه فإن الدالة $x \rightarrow h(8x)$ قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$.

و بالتالي F قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ لأنها عبارة عن مجموع دالتين

قابلتين للاشتقاق على $[0; +\infty[$ و كذلك لأن $[0; +\infty[\subset \mathbb{R}$.

ليكن x عنصرا من المجال $[0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= (h(8x) - h(x))' \\ &= 8h'(8x) - h'(x) \\ &= 8f(8x) - f(x) \\ &= 8\sqrt[3]{8x} e^{-8x} - \sqrt[3]{x} e^{-x} \\ &= 8\left(8^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}\right)(e^{-x})(e^{-7x}) - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)(e^{-x}) \\ &= (16e^{-7x} - 1)\left(x^{\frac{1}{3}} e^{-x}\right) \\ &= (16e^{-7x} - 1)f(x) \end{aligned}$$

نلاحظ أن $\forall x \in [0; +\infty[; f(x) \geq 0$

إذن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $(16e^{-7x} - 1)$.

إذا كان $x = \frac{\ln 16}{7}$ فإن $F'(x) = 0$

إذا كان $x > \frac{\ln 16}{7}$ فإن $F'(x) < 0$

إذا كان $x < \frac{\ln 16}{7}$ فإن $F'(x) > 0$

و بالتالي F دالة تزايدية على $\left[0; \frac{\ln 16}{7}\right]$ و تناقصية على $\left[\frac{\ln 16}{7}; +\infty\right]$

ليكن m عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص C .
و ليكن n عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص B .

الحدث الذي نحن بصدد حساب احتمالته يُحتم على الشخص A الحصول على $(m+n)$ كرة. ونعلم أن العدد الإجمالي للكرات التي سوف تُوزَع هو 4
إذن يجب أن يكون $m+n+(m+n) \leq 4$.
يعني : $2(m+n) \leq 4$. أي : $m+n \leq 2$.
يبين الجدول التالي الحالات الممكنة لاختيار m و n حيث $m+n \leq 2$

C	B	A	
m	n	(m+n)	
0	0	0	الحالة الأولى
0	1	1	الحالة الثانية
0	2	2	الحالة الثالثة
1	0	1	الحالة الرابعة
1	1	2	الحالة الخامسة
2	0	2	الحالة السادسة

لنحدد الآن عدد الإمكانيات التي تُحقق كل حالة .

في الحالة الأولى : لا يحصل أي شخص من الأشخاص A و B و C على أية كرة . يعني أن الكرات الأربع وزعت على الأشخاص D و E و F .

- ومن أجل ذلك يمكن إعطاء الكرات الأربع لشخص واحد بـ $\frac{1}{3} C_3$ إمكانية
- أو إعطاء شخص 3 كرات و شخص آخر كرة واحدة بـ $2 \times C_3^2 \times C_4^1$ إمكانية .
- أو إعطاء شخص كرتين و شخص آخر كرتين بـ $C_3^2 \times C_4^2$ إمكانية .
- أو إعطاء شخصين كرة لكل واحد و إعطاء كرتين لشخص ثالث بـ $3 \times C_3^1 \times C_4^2$ إمكانية .

إذن تتحقق الحالة الأولى في 81 إمكانية حيث

$$C_3^1 + 2C_3^2 C_4^1 + C_3^2 C_4^2 + 3C_3^1 C_4^2 C_2^1 = 81$$

في الحالة الثانية : يحصل A و B على كرتين لكل واحد منهما و الشخص

C لا يحصل على أية كرة . و من أجل ذلك ، لتوزيع كرتين على A و B

توجد $C_4^1 C_3^1$ إمكانية و لتوزيع الكرتين المتبقيتين على D و E و F :

يمكن إعطاء الكرتين لشخص واحد بـ $\frac{1}{3} C_3$ إمكانية . و يمكن إعطاء كرة

لكل شخص بـ $C_3^2 C_2^1$ إمكانية .

إذن تتحقق الحالة الثانية في 108 إمكانيات حيث

$$C_4^1 C_3^1 (C_3^1 + C_3^2 C_2^1) = 108$$

في الحالة الثالثة : يحصل الشخص A على كرتين و الشخص B على

كرتين. و من أجل ذلك : توجد $C_2^2 C_4^2 = 6$ إمكانية للقيام بذلك .

في الحالة الرابعة : يحصل الشخص A على كرة واحدة و الشخص C على

كرة واحدة و الشخص C لا يحصل على أية كرة و هي الحالة مشابهة للحالة الثانية . إذن توجد 108 إمكانية للقيام بذلك

$$C_4^1 C_3^1 (C_3^1 + C_3^2 C_2^1) = 108$$

في الحالة الخامسة : يحصل الشخص A على كرتين و الشخص B

على كرة واحدة و الشخص C على كرة واحدة و من أجل ذلك توجد

$$C_4^2 C_2^1 C_1^1 = 12$$

في الحالة السادسة : يحصل الشخص A على كرتين و الشخص C

على كرتين . و من أجل ذلك توجد $C_4^2 C_2^2 = 6$ إمكانية للقيام بذلك

الخلاصة :

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة	الحالة الرابعة	الحالة الخامسة	الحالة السادسة
81	108	06	108	12	06
إمكانية	إمكانية	إمكانيات	إمكانية	إمكانية	إمكانيات

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2006

الطريقة المباشرة : $card(\Omega) = 6^4 = 1296$

الطريقة التقليدية : توزيع أربع كرات مرقمة من 1 إلى 4 على ستة

أشخاص مرقمين من A إلى F بحيث يمكن لكل شخص أن يحصل على 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 كرات، يمكن أن يتم بخمس طرق مختلفة :

الطريقة الأولى : إعطاء شخص واحد الكرات الأربع. و من أجل ذلك توجد C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سوف نعطيها الكرات الأربع.

الطريقة الثانية : إعطاء شخص واحد الكرة الأولى ثم إعطاء شخص ثاني الكرات الثلاث المتبقية. و من أجل ذلك لدينا :

- C_6^2 إمكانية لاختيار الشخصين اللذين سوف يستفيدان من الكرات
- إكمانيتين لتبادل الأدوار بينهما
- C_4^1 إمكانية لاختيار الكرة
- C_3^3 إمكانية لاختيار الكرات الثلاث

إذن هذه الحالة تتحقق في $2 \times C_6^2 \times C_4^1 \times C_3^3$ إمكانية .

الطريقة الثالثة : إعطاء شخص واحد كرتين و شخص ثاني كرتين. و من أجل ذلك توجد :

- C_6^2 إمكانية لاختيار الشخصين المستفيدين.
- C_4^2 إمكانية لاختيار كرتين لإعطائهما لأحد الشخصين
- C_2^2 إمكانية لاختيار الكرتين المتبقيتين لإعطائهما للشخص الآخر

إذن هذه الحالة تتحقق في $C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2$ إمكانية .

الطريقة الرابعة : إعطاء شخص واحد كرة واحدة، و شخص ثاني كرة واحدة و شخص ثالث كرتين. و من أجل ذلك توجد :

- C_6^2 إمكانية لاختيار الأشخاص الثلاثة المستفيدين .
- 3 إمكانيات لتبادل الأدوار بينهم .
- C_4^2 إمكانية لاختيار الكرتين .
- C_2^1 إمكانية لاختيار الكرة الأولى .
- C_1^1 إمكانية لاختيار الكرة الثانية .

إذن هذه الحالة تتحقق في $3 \times C_6^3 \times C_4^1 \times C_2^1 \times C_1^1$ إمكانية .

الطريقة الخامسة : نعطي كل شخص من الأشخاص الستة كرة واحدة. و من أجل ذلك توجد :

- إمكانية لاختيار الأشخاص الأربعة المستفيدين.
- إمكانية لتوزيع الكرات الأربع على هؤلاء الأشخاص الأربعة

إذن تتحقق هذه الحالة في $4! \times C_6^4$ إمكانية.

التطبيق العددي :

وبالتالي عدد الإمكانيات لتوزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة هو :

$$card(\Omega) = 6 + 120 + 90 + 720 + 360 = 1296$$

إذن تتحقق هذه الحالة في $4! \times C_6^4$ إمكانية.

التطبيق العددي :

الطريقة	1	2	3	4	5
عدد	6	120	90	720	360
الإمكانيات					

و بالتالي عدد الإمكانيات لتوزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة هو :

$$card(\Omega) = 6 + 120 + 90 + 720 + 360 = 1296$$

الشخص A يمكنه أن يحصل على :

- كرة واحدة بـ C_4^1 إمكانية .
- أو يحصل على كرتين بـ C_4^2 إمكانية .
- أو يحصل على ثلاث كرات بـ C_4^3 إمكانية .
- أو يحصل على أربع كرات بإمكانية واحدة .

إذن عدد الإمكانيات التي يحصل فيها الشخص A على كرة واحدة على الأقل هو :

$$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$$

إذن احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل يساوي : $\frac{15}{1296} \approx 0,0115 \equiv 1,15\%$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

نلاحظ أن $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها هو $\frac{2}{3}$ و هو عدد حقيقي

موجب و أصغر من 1 . إذن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

إذن نحصل على الوضعية التالية : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim(u_n) = 0$

التمرين الثاني

$$\begin{aligned} S_n &= OM_0 + OM_1 + \dots + OM_n \\ &= |z_0| + |z_1| + \dots + |z_n| \\ &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \end{aligned}$$

و نعلم أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\begin{cases} u_0 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 \\ u_1 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^1 \\ u_2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ \vdots \\ u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

نجمع هذه المتفاوتات طرفا بطرف نحصل على :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n \leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$S_n \leq \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}\right) \quad \text{يعني :}$$

$$S_n \leq 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \quad \text{يعني :}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \geq 0 \Rightarrow -\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \leq 3$$

$$\Rightarrow S_n \leq 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \leq 3$$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n \leq 3$

إذن عدد الإمكانات التي يكون فيها مجموع عددي الكرات المحصل عليها

من طرف B و C يساوي عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص

A هو : $81 + 108 + 6 + 108 + 12 + 6 = 321$. و بالتالي

احتمال هذا الحدث هو $\frac{321}{1296} = 0,247 \equiv 24,7\%$

التمرين الثاني

نضع $z = x + iy$.

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow (1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + i\sqrt{3})(x + iy) + 2(x - iy) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - \sqrt{3}y) + i(-y + \sqrt{3}x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \sqrt{3}y = 0 \\ -y + \sqrt{3}x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \sqrt{3}y \\ 3x = \sqrt{3}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = x + i\sqrt{3}x$$

$$\Leftrightarrow z = x(1 + i\sqrt{3})$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(z) = 0$ في \mathbb{C} تُكتب على الشكل :

$$S = \{x(1 + i\sqrt{3}) ; x \in \mathbb{R}\}$$

التمرين الثاني

في هذا السؤال سوف نستعمل المتفاوتة المثلثية $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

و كذلك العلاقة $|z| = |\bar{z}|$

$$|f(z_n)| = \left| \frac{1}{6} \left((1 + i\sqrt{3})z_n + 2\bar{z}_n \right) \right|$$

$$\Rightarrow |f(z_n)| \leq \frac{1}{6} \left(|1 + i\sqrt{3}| |z_n| + 2|\bar{z}_n| \right)$$

$$\Rightarrow |f(z_n)| \leq \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot |z_n| + \frac{2}{6} |\bar{z}_n|$$

$$\Rightarrow |f(z_n)| \leq \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot |z_n| + \frac{2}{6} |\bar{z}_n|$$

$$\Rightarrow |f(z_n)| \leq \frac{2}{3} \cdot |z_n|$$

$$\Rightarrow |z_{n+1}| \leq \frac{2}{3} \cdot |z_n|$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{2}{3} \cdot u_n$$

و نعلم أن معيار أي عدد عقدي هو عدد حقيقي موجب دائما .

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n$ (*)

التمرين الثاني

On a : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n$

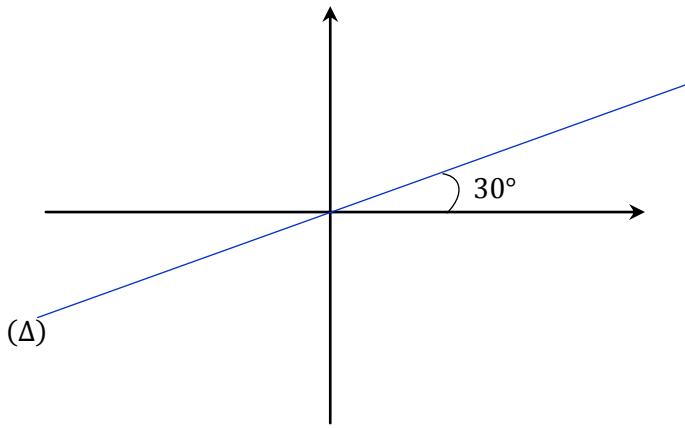
pour $(n-1)$: $0 \leq u_n \leq \frac{2}{3} u_{n-1}$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) u_{n-2}$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) u_{n-3}$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n u_{n-n}$$

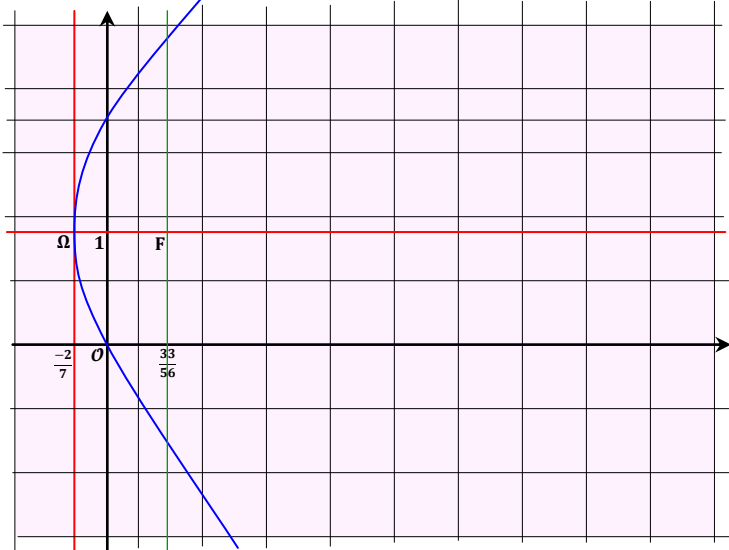
إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n u_0$



التمرين الثالث

$$\begin{aligned}
 M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\Gamma) &\Leftrightarrow 2y^2 - 4y - 7x = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2(y^2 - 2y) = 7x \\
 &\Leftrightarrow 2(y-1)^2 = 7x + 2 \\
 &\Leftrightarrow (y-1)^2 = \frac{7}{2}x + 1 \\
 &\Leftrightarrow (y-1)^2 = \frac{7}{2}\left(x + \frac{2}{7}\right) \\
 &\Leftrightarrow (\Gamma) \text{ est une parabole de sommet } \Omega \left(\frac{-2}{7}; 1\right) \\
 &\text{ et de foyer } F \left(\frac{33}{56}; 1\right)
 \end{aligned}$$

التمرين الثالث



التمرين الثالث

$$\begin{aligned}
 2(y-1)^2 = 7x + 2 &\Leftrightarrow 2(y^2 - 2y + 1) = 7x + 2 \text{ لدينا} \\
 &\Leftrightarrow 2y(y-2) = 7x \\
 &\Rightarrow 7/2y(y-2) \\
 &\Rightarrow 7/2 \text{ أو } 7/y \text{ أو } 7/(y-2) \text{ car } 7 \in \mathbb{P} \\
 &\Rightarrow y \equiv 0 [7] \text{ أو } y \equiv 2 [7]
 \end{aligned}$$

التمرين الثالث

$$\begin{aligned}
 y \equiv 0 [7] &\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; y = 7k \\
 &\Rightarrow 2y(y-2) = 7x ; y = 7k \\
 &\Rightarrow 2(7k)(7k-2) = 7x ; y = 7k \\
 &\Rightarrow x = 14k^2 - 4k
 \end{aligned}$$

التمرين الثاني

لدينا : $S_n = OM_0 + OM_1 + \dots + OM_n$
 ولدينا : $S_{n+1} = OM_0 + OM_1 + \dots + OM_n + OM_{n+1}$
 نلاحظ أن : $OM_0 + \dots + OM_{n+1} > OM_0 + \dots + OM_n$
 يعني : $S_{n+1} > S_n$
 إذن $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تزايدية . و بما أنها مكبورة بالعدد 3 ($S_n \leq 3$) فهي متقاربة .

التمرين الثاني

نضع : $z = re^{i\theta}$ بحيث $\theta \in]-\pi, \pi]$ و $r \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{6} \left((1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z} \right) \\
 &= \frac{1}{6} \left(r(1 + i\sqrt{3})e^{i\theta} + 2r e^{-i\theta} \right) \\
 &= \frac{2r}{3} \left(\left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} \right) e^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{2} \right) \\
 &= \frac{2r}{3} \left(\left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} \right) (\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{2} (\cos \theta - i \sin \theta) \right) \\
 &= \frac{2r}{3} \left(\frac{\cos \theta}{4} + i \frac{\sin \theta}{4} + \frac{i\sqrt{3} \cos \theta}{4} - \frac{\sqrt{3} \sin \theta}{4} + \frac{\cos \theta}{2} - i \frac{\sin \theta}{2} \right) \\
 &= \frac{2r}{3} \left(\frac{3 \cos \theta}{4} + \frac{i\sqrt{3} \cos \theta}{4} - \frac{\sqrt{3} \sin \theta}{4} - i \frac{\sin \theta}{4} \right) \\
 &= \frac{2r}{3} \left(\left(\frac{3 \cos \theta}{4} - \frac{\sqrt{3} \sin \theta}{4} \right) + \left(\frac{i\sqrt{3} \cos \theta}{4} - i \frac{\sin \theta}{4} \right) \right) \\
 &= \frac{2r}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right) \right) \\
 &= \frac{2r}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{i}{2} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \right) \\
 &= \frac{2r}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= \left(\frac{2r}{3} \right) \cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) e^{i\frac{\pi}{6}}
 \end{aligned}$$

التمرين الثاني

لدينا : $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} ; aff(f(z_{k-1})) = M_k$
 ولدينا : $f(z) = \left(\frac{2r}{3} \right) \cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow f(z_{k-1}) = \left(\frac{2r}{3} \right) \cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) e^{i\frac{\pi}{6}} \\
 &\Rightarrow \arg(f(z_{k-1})) \equiv \arg \left(\left(\frac{2r}{3} \right) \cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) e^{i\frac{\pi}{6}} \right) [2\pi] \\
 &\Rightarrow \arg(f(z_{k-1})) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \\
 &\Rightarrow \overrightarrow{(i, OM_{k-1})} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]
 \end{aligned}$$

و بالتالي فالنقط M_1 و M_2 و \dots و M_n تنتمي إلى المستقيم (Δ) المبين في الشكل التالي :

التمرين الرابع

3

لدينا $u \rightarrow \frac{1+\sin u}{2+\cos u}$ دالة متصلة على المجال $[0, \pi]$ لأنها عبارة عن خارج مُعرَّف لدالتين متصلتين على $[0, \pi]$ بحيث $2 + \cos u$. إذن فهي تقبل عدة دوال أصلية على المجال $[0, \pi]$ و بالخصوص تقبل دالة أصلية F على المجال $[0, \pi]$ والتي تُحقق :

$$\begin{cases} F(x) = \int_0^x \left(\frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \right) du \\ F'(x) = \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x} \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

التمرين الرابع

3

ليكن x عنصرا من $[0, \pi]$.

لدينا : $F(x) = \int_0^x \left(\frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \right) du$

نضع : $t = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$ إذن $\frac{dt}{du} = \frac{1+t^2}{2}$

لدينا : $F(x) = \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}{2 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \right) \left(\frac{2}{1+t^2} \right) du$

$$= 2 \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$$

التمرين الرابع

3

$$F(x) = 2 \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$$

$$= 2 \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2} \right) dt$$

$$= 2 \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{t}{1+t^2} \right) dt - 2 \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{t}{3+t^2} \right) dt + 2 \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1}{3+t^2} \right) dt$$

$$= [\ln(1+t^2)]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} - [\ln(3+t^2)]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= \ln\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \ln\left(3 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

(*)

$$= \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \ln\left(\frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

$$\begin{aligned} y \equiv 2 [7] &\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; y = 7k + 2 \\ &\Rightarrow 2y(y-2) = 7x ; y = 7k + 2 \\ &\Rightarrow 2(7k+2)(7k) = 7x ; y = 7k \\ &\Rightarrow x = 14k^2 + 4k \end{aligned}$$

عكسيا نبين بكل بساطة أن جميع الأزواج من \mathbb{Z}^2 التي تُكتب على شكل $(14k^2 + 4k ; 7k + 2)$ وكذلك جميع الأزواج التي تُكتب على شكل $(14k'^2 - 4k' ; 7k')$ تحقق المعادلة (E).

$$\begin{aligned} 2(7k+2-1)^2 &= 2(49k^2 + 14k + 1) \\ &= 98k^2 + 28k + 2 \\ &= 7(14k^2 + 4k) + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(7k'-1)^2 &= 2(49k'^2 - 14k' + 1) \\ &= 98k'^2 - 28k' + 2 \\ &= 7(14k'^2 - 4k') + 2 \end{aligned}$$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي جميع الأزواج $(14k^2 + 4k ; 7k + 2)$ و الأزواج $(14k'^2 - 4k' ; 7k')$ حيث k و k' عدداً صحيحان نسبيا.

التمرين الثالث

2 II

في هذا السؤال نَفصّلُ بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان $x = 14k^2 - 4k$ و $y = 7k$.

$$\begin{array}{|l} 14k^2 - 4k \\ -4k \end{array} \begin{array}{|l} 7k \\ 2k \end{array}$$

لدينا حسب خوارزمية أقليدس :

$$(14k^2 - 4k) \wedge (7k) = (7k) \wedge (-4k) = k$$

إذن من هذه القسمة الأقليدية نستنتج أن :

$$x \wedge y = k = 9$$

و بذلك نحصل على النقطة التالية : $M_1(1098 ; 63)$.

الحالة الثانية : إذا كان $x = 14k^2 + 4k$ و $y = 7k + 2$.

$$(14k^2 + 4k) \wedge (7k + 2) = (7k + 2) \wedge (14k^2 + 4k - 2(7k + 2)) = (7k + 2) \wedge (14k^2 - 10k - 4)$$

لدينا : $14k^2 + 4k = 2k(7k + 2)$.

إذن من هذه النتيجة نستنتج أن : $(14k^2 + 4k) \wedge (7k + 2) = (7k + 2) \wedge (14k^2 - 10k - 4)$.

ومنه : $x \wedge y = 7k + 2$. يعني : $k = 1$.

و بذلك نحصل على النقطة التالية : $M_2(18 ; 9)$.

التمرين الرابع

1

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2} = \frac{t}{1+t^2} + \frac{1-t}{3+t^2}$$

$$= \frac{t(3+t^2) + (1-t)(1+t^2)}{(1+t^2)(3+t^2)}$$

$$= \frac{t^2 + 2t + 1}{(1+t^2)(3+t^2)}$$

$$= \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}$$

التمرين الرابع

2

$$\int_0^\alpha \left(\frac{1}{3+t^2} \right) dt = \frac{1}{3} \int_0^\alpha \left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{3}} \right) dt$$

نضع : $u = \frac{t}{\sqrt{3}}$ إذن : $dt = \sqrt{3} \cdot du$.

$$\int_0^\alpha \left(\frac{1}{3+t^2} \right) dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{1+u^2} \right) du$$

ومنه

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} [\text{Arctan}(u)]_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arctan}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)$$

التمرين الخامس

2

لدينا : $f'_n(x) = \left(\frac{x}{n} - e^{-nx}\right)' = \frac{1}{n} + ne^{-nx} > 0$
 إذن f_n دالة تزايدية قطعاً على \mathbb{R} بأكمله و نلخص نتائج دراسة الدالة f_n في الجدول التالي :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+
f_n	$-\infty$	$+\infty$

التمرين الخامس

3

لدينا f_n دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$.
 إذن f_n تقابل من \mathbb{R} نحو $f_n(\mathbb{R})$.
 و لدينا : $f_n(\mathbb{R}) = f_n(]-\infty ; +\infty[)$
 $=]\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)[$
 $=]-\infty ; +\infty[$
 إذن f_n تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} .
 و بما أن 0 عنصر من \mathbb{R} فإنه بالضرورة يقبل سابقاً واحداً f_n من \mathbb{R} بالتقابل f_n .
 أو بتعبير جميل : $\exists ! \alpha_n \in \mathbb{R} ; f_n(\alpha_n) = 0$.

التمرين الخامس

3

لدينا : $x \geq 2 \Rightarrow n^2 \geq 4$
 $\Rightarrow n^2 \geq 4 > e$
 $\Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{e}$
 $\Rightarrow \frac{1}{n^2} - \frac{1}{e} < 0$
 $\Rightarrow f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{e} < 0$
 إذن : $(\forall n \geq 2) ; f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

التمرين الخامس

3

نعتبر الدالة φ المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $\varphi(x) = e^x - x - 1$
 لندرس رتبة الدالة φ على \mathbb{R} .
 φ دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} بأكمله لأنها عبارة عن مجموع دوال متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .
 و لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi'(x) = e^x - 1$
 إذا كان $x = 0$ فإن $\varphi'(x) = 0$
 إذا كان $x > 0$ فإن $\varphi'(x) > 0$
 إذا كان $x < 0$ فإن $\varphi'(x) < 0$
 نرسم إذن جدول تغيرات الدالة φ كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+
φ	$+\infty$	0	$+\infty$

التمرين الرابع

3

لدينا F دالة متصلة على يسار π . إذن : $\lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x) = F(\pi)$
 $= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \ln \left(\frac{1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{3 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)} \right) \right)$
 $= \int_0^\pi \left(\frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \right) du$
 إذن : $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \ln \left(\frac{1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{3 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)} \right)$
 $= \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ u = \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{u}}{1 + \frac{3}{u}} \right) = \ln 1 = 0$
 $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

نعوض إذن هاتين النهايتين في المتساوية (*) نجد :

$$\ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} + 0 = \int_0^\pi \left(\frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \right) du$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \right) du = \left(\ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)$$

التمرين الخامس

1

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{n} - e^{-nx} \right) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{n} - e^{-nx} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{1}{n} - \frac{e^{-nx}}{x} \right)$
 $= (-\infty) \left(\frac{1}{n} - (-\infty) \right) = -\infty$

التمرين الخامس

1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x e^{nx}} \right) = \left(\frac{1}{n} - 0 \right) = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f_n(x) - \frac{1}{n} x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-nx}) = 0$$

نحصل إذن على الوضعية التالية : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \frac{1}{n} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f_n(x) - \frac{1}{n} x \right) = 0 \end{cases}$

نستنتج إذن من هذه الوضعية أن المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{n} x + 0$ مقارب مانل بجوار $+\infty$.

من جهة أخرى لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x e^{nx}} \right) = \left(\frac{1}{n} - (-\infty) \right) = +\infty$$

و بذلك نحصل على الوضعية التالية : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty \end{cases}$

نستنتج من هذه الوضعية أن (C_n) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتيب نحو الأسفل .

التمرين الخامس

5

لدينا حسب السؤال (3 ج) : $e^{\alpha_n} \geq \alpha_n + 1$
و لدينا حسب السؤال (3 د) : $\alpha_n > \frac{1}{n}$

إذن : (2) $\alpha_n + 1 > \frac{1}{n} + 1$

من (1) و (2) نستنتج أن : $e^{\alpha_n} \geq \frac{1}{n} + 1$

يعني : $(\forall n \geq 2) ; e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \geq 0$

يعني : $(\forall n \geq 2) ; \frac{n e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1} \left(e^{\alpha_n} - 1 - \frac{1}{n} \right) \geq 0$

و منه باستعمال نتيجة السؤال (5 أ) نستنتج أن :

$(\forall n \geq 2) ; f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$

لاحظ أن الكمية $\frac{n e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}$ موجبة دائما .

التمرين الخامس

5

نعلم أن : $(\forall n \geq 2)(\exists! \alpha_n \in \mathbb{R}) ; f_n(\alpha_n) = 0$

إذن من أجل $(n+1)$ لدينا : $(\exists! \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}) ; f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$

و نعمم كذلك حسب نتيجة السؤال (5 ب) أن :

(4) $(\forall n \geq 2) ; f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \geq 0$

من خلال النتيجةين (3) و (4) نستنتج أن :

$(\forall n \geq 2) ; f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

و نعمم أن f_{n+1} تزايدية قطعاً على \mathbb{R} و هي تقابل .

و تقابله العكسي f_{n+1}^{-1} دالة تزايدية قطعاً كذلك على \mathbb{R} .

$(\forall n \geq 2) ; f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(\alpha_n)) \geq f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(\alpha_{n+1}))$

يعني : $(\forall n \geq 2) ; \alpha_n \geq \alpha_{n+1}$

و بالتالي $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ متتالية تناقصية .

من جهة أخرى لدينا $\frac{1}{n} \geq 0$ و $\frac{1}{n} < \alpha_n$; $(\forall n \geq 2)$.

إذن : $(\forall n \geq 2) ; \alpha_n > 0$.

يعني أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ مصغورة بالعدد 0 .

و بالتالي نستنتج أن $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ تناقصية و مصغورة إذن فهي متقاربة .

و سوف نحدد نهايتها عن طريق حصرها بمتتاليتين تؤولان معا إلى نفس النهاية .

التمرين الخامس

6

$n \geq 2 \Rightarrow f_n(\alpha_n) = 0 \text{ et } \frac{1}{n} < \alpha_n < 1$

$\Rightarrow e^{-n\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{n} \text{ et } \frac{1}{n} < \alpha_n < 1$

$\Rightarrow e^{-n\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{n} \text{ et } \frac{1}{n^2} < \frac{\alpha_n}{n} < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$

التمرين الخامس

6

ليكن $n \geq 2$. لدينا : $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$

ندخل الدالة التزايدية \ln على هذه الأعداد الموجبة قطعاً نجد :

$\ln\left(\frac{1}{n^2}\right) < \ln(e^{-n\alpha_n}) < \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

و منه : $-2 \ln n < -n\alpha_n < -\ln n$

يعني : $\ln n < n\alpha_n < 2 \ln n$

و بالتالي : $(\forall n \geq 2) ; \frac{\ln n}{n} < \alpha_n < \frac{2 \ln n}{n}$

من خلال هذا الجدول المبارك نلاحظ أن دالة متصلة على \mathbb{R} و قيمتها الدنوية هي 0 .

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) \geq 0$

يعني : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x - x - 1 \geq 0$

أي : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq x + 1$

و منه : $(\forall n \in \mathbb{R}) ; e^n \geq n + 1$

$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{e^n} < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; e^{-n} < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{n} - e^{-n} > 0$

$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f_n(1) = \frac{1}{n} - e^{-n} > 0$

التمرين الخامس

3

حصلنا من خلال ما سبق على ما يلي :

$(\forall n \geq 2) ; f_n(1) > 0 \text{ و } f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

إذن : $(\forall n \geq 2) ; f_n(1) \cdot f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

من جهة أخرى لدينا f_n دالة متصلة على \mathbb{R} بأكملها . إذن فهي متصلة

على المجال $\left[\frac{1}{n} ; 1\right]$ حيث $n \geq 2$.

و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطة نستنتج أن :

$\exists c \in \left]\frac{1}{n} ; 1\right[; f_n(c) = 0$

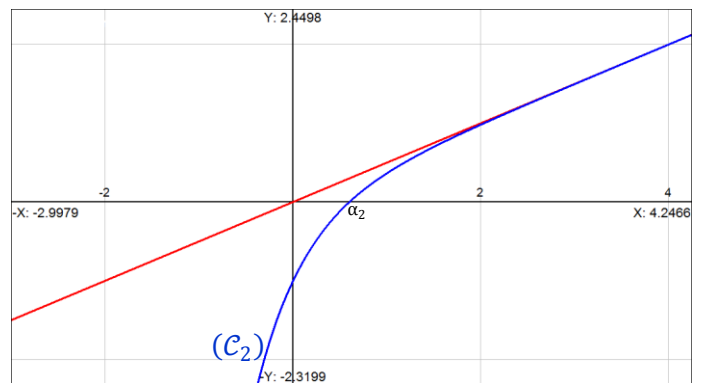
و بما أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً و هو α_n .

و ذلك حسب نتيجة السؤال (3 أ) فإن : $\alpha_n = c$

لدينا : $\frac{1}{n} < c < 1$. إذن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$.

التمرين الخامس

4



التمرين الخامس

5

$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{n+1} - e^{-(n+1)\alpha_n}$

$= \frac{\alpha_n - n e^{-(n+1)\alpha_n} - e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}$

$= \frac{n e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1} \left(\frac{\alpha_n}{n e^{-(n+1)\alpha_n}} - 1 - \frac{1}{n} \right)$

$= \frac{n e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1} \left(\frac{\alpha_n}{n(e^{-n\alpha_n}) \cdot e^{-\alpha_n}} - 1 - \frac{1}{n} \right)$

بما أن $f_n(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{n} - e^{-n\alpha_n} = 0$ فإن :

$= \frac{n e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1} \left(\frac{\alpha_n}{n \left(\frac{\alpha_n}{n}\right) \cdot e^{-\alpha_n}} - 1 - \frac{1}{n} \right)$

$= \frac{n e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1} \left(e^{\alpha_n} - 1 - \frac{1}{n} \right)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right) = 0 : \text{نعلم أن}$$

إذن التاطير الثمين الأخير الذي حصلنا عليه يُصبح :

$$(\forall n \geq 2) ; \underbrace{\left(\frac{\ln n}{n} \right)}_{n \rightarrow \infty} < \alpha_n < \underbrace{\left(\frac{2 \ln n}{n} \right)}_{n \rightarrow \infty}$$

0

0

نستنتج إذن من هذه الوضعية حسب مصاديق تقارب المتتاليات أن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = 0$$

أجوبة امتحان الدورة العادية 2007

التمرين الأول

I 1 I

ليكن الزوج (a, b) عنصرا من E^2 .
 لدينا: $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1)$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(b\sqrt{2} - 1)$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(ab\sqrt{2} - a - b + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
 $= a + b - ab\sqrt{2}$
 $= a \perp b$

التمرين الأول

II 1 I

نبين أن: $\forall (a, b) \in E^2 ; a \perp b \in E$.
 ليكن الزوج (a, b) عنصرا من E^2 .
 $(a, b) \in E^2 \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $b \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\Leftrightarrow a\sqrt{2} - 1 \neq 0$ و $b\sqrt{2} - 1 \neq 0$
 $\Leftrightarrow (a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1) \neq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1) \neq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1) \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\Leftrightarrow a \perp b \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\Leftrightarrow a \perp b \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

و بالتالي \perp قانون تركيب داخلي في E .

التمرين الأول

II 2 I

لكي تكون (E, \perp) زمرة تبادلية يكفي أن يكون \perp تبادليا و تجميعيا
 و أن يقبل عنصرا محايدا في E و أن يقبل كل عنصر من E ممتالا من E
 ليكن الزوج (a, b) عنصرا من E^2 .
 لدينا: $a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1)$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(b\sqrt{2} - 1)(a\sqrt{2} - 1)$
 $= b \perp a$

إذن \perp قانون تبادلي في E .

ليكن e العنصر المحايد للقانون \perp في E .

يعني: $(\forall x \in E) ; x \perp e = e \perp x = x$

يعني: $(\forall x \in E) ; x + e - xe\sqrt{2} = x$

يعني: $(\forall x \in E) ; e(1 - x\sqrt{2}) = 0$

بما أن $x \in E$ فإن $x \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

يعني: $e = 0$ و $1 - x\sqrt{2} \neq 0$.

و بما أن $0 \in E$ فإن 0 هو العنصر المحايد للقانون \perp في E .

ليكن x عنصرا من E و y ممتاله بالنسبة للقانون \perp في E .

$$\Leftrightarrow x \perp y = y \perp x = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - xy\sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow y(1 - x\sqrt{2}) = -x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-x}{1 - x\sqrt{2}} = \frac{x}{x\sqrt{2} - 1} ; x \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{x}{x\sqrt{2}-1} \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و للتأكد من أن:}$$

$$\text{نفترض التساوي إذن: } x\sqrt{2} = x\sqrt{2} - 1$$

$$\text{و منه } 0 = -1 \text{ و هذا تناقض واضح.}$$

$$\text{إذن: } \frac{x}{x\sqrt{2}-1} \in E \text{ أي: } \frac{x}{x\sqrt{2}-1} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

يعني أن كل x من E يقبل ممتالا من E و هو $\frac{x}{x\sqrt{2}-1}$ بالنسبة لـ \perp .
خلاصة: (E, \perp) زمرة تبادلية.

التمرين الأول

I 1 II

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2A$$

$$A^2 = -2A \text{ إذن}$$

$$M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - a & a \\ a & \sqrt{2} - a \end{pmatrix} \text{ و لدينا كذلك:}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$$

$$\text{إذن: } M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$$

التمرين الأول

II 1 II

لكي يكون F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.

يكفي أن نبين أن: $\forall M(a), M(b) \in F ; M(a) \times M(b) \in F$

في البداية نلاحظ أن $M(a)$ مصفوفة مربعة من الرتبة 2 و ذات معاملات حقيقية.

إذن المجموعة F جزء غير فارغ من $M_2(\mathbb{R})$.

لتكن $M(a)$ و $M(b)$ مصفوفتين من F .

$$M(a) \times M(b) = \left(I + \frac{a}{\sqrt{2}}A\right) \left(I + \frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$$

$$= I + \frac{b}{\sqrt{2}}A + \frac{a}{\sqrt{2}}A + \frac{ab}{2}A^2$$

$$= I + \frac{b}{\sqrt{2}}A + \frac{a}{\sqrt{2}}A + \frac{ab}{2}(-2A)$$

$$= I + \left(\frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}} - ab\right)A$$

$$= I + \frac{(b + a - ab\sqrt{2})}{\sqrt{2}}A$$

$$= M(a + b - ab\sqrt{2})$$

$$= M(a \perp b)$$

بما أن \perp قانون تركيب داخلي في F فإن $(a \perp b)$ ينتمي إلى F .

نحصل إذن على ما يلي: $M(a) \times M(b) \in F$.

و هذا يعني أن F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.

التمرين الأول

II 2 II

لكي يكون التطبيق φ تشاكلا من (E, \perp) نحو (F, \times) يكفي أن نتأكد

من أن: $\forall (a, b) \in E^2 ; \varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(a \perp b)$

ليكن a و b عنصريين من المجموعة E .

$$\varphi(a) \times \varphi(b) = M(a) \times M(b)$$

$$= \left(I + \frac{a}{\sqrt{2}}A\right) \left(I + \frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$$

$$= I + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)A + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)A + \left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)A^2$$

التمرين الثاني

1 I I I I

للإجابة على هذا السؤال يمكن استعمال النشر أو التعميل . نختار التعميل :

$$\begin{aligned}(a+i)^2 + i(1+a^2) &= (a+i)^2 + i(a^2 - i^2) \\ &= (a+i)(a+i) + i(a-i)(a+i) \\ &= (a+i)(a+i) + (ai+1)(a+i) \\ &= (a+i)(a+i+ai+1) \\ &= (a+i)(a+1)(i+1)\end{aligned}$$

إذن نستنتج أن :

$$(a+i)^2 - (1+a)(1+i)(a+i) + i(1+a^2) = 0$$

و هذا يعني أن العدد العقدي $(a+i)$ حل للمعادلة (E) .

التمرين الثاني

1 I I I I

تذكير : إذا كان u و v هما حلا للمعادلة $az^2 + bz + c = 0$ فإن : $u+v = \frac{-b}{a}$ و $uv = \frac{c}{a}$ لدينا u و v هما حلا للمعادلة (E) . إذن : $u+v = \frac{(1+a)(1+i)}{1}$ نعوض u بقيمته في هذه الكتابة نجد :

$$(i+a) + v = (1+a)(1+i)$$

و منه : $v = (1+a)(1+i) - (i+a)$

$$\begin{aligned} &= 1+i+a+ai-i-a \\ &= 1+ai\end{aligned}$$

التمرين الثاني

1 2 I I I I

نعلم أن كل عدد حقيقي يكون دائما مساويا لمرافقه و سوف نستغل هذه الخاصية لكي نبرهن على أن $\frac{u}{v}$ عددا حقيقيا .

لدينا : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \overline{\left(\frac{a+i}{ai+1}\right)} = \frac{\bar{a}-i}{1-i\bar{a}}$

بما أن $|a| = 1$ فإن $|a| = \sqrt{a\bar{a}} = 1$.

و منه : $\bar{a} = \frac{1}{a}$ إذن : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\bar{a}-i}{1-i\bar{a}} = \frac{\frac{1}{a}-i}{1-\frac{1}{a}i} = \frac{1-ai}{a-i}$

نضرب بسط و مقام النتيجة الأخيرة في العدد العقدي i نجد :

$$\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{(1-ai) \times i}{(a-i) \times i} = \frac{a+i}{ai+1} = \frac{u}{v}$$

إذن : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \left(\frac{u}{v}\right)$

و هذا يعني أن العدد $\left(\frac{u}{v}\right)$ عدد حقيقي .

التمرين الثاني

1 2 I I I I

$$\begin{aligned}u^2 &= (a+i)^2 = a^2 + 2ai - 1 = a(a+2i-1) \\ &= a(a+2i-\bar{a}) = a((a-\bar{a})+2i)\end{aligned}$$

التمرين الثاني

1 2 I I I I

بصفة عامة لدينا : $z - \bar{z} = 2i \Im m(z)$ و لدينا حسب السؤال ب) : $u^2 = a((a-\bar{a})+2i)$

$$\Rightarrow \arg(u^2) \equiv \arg(a(a-\bar{a})+2i) [2\pi]$$

$$\Rightarrow 2\arg(u) \equiv \arg(a) + \arg((a-\bar{a})+2i) [2\pi]$$

و لدينا : $a - \bar{a} + 2i = 2i \Im m(z) + 2i = 2i (\Im m(a) + 1)$

إذن : $\arg(a - \bar{a} + 2i) \equiv \arg(2i) + \arg(\Im m(a) + 1) [2\pi]$

لدينا $2i$ عدد تخيلي صرف إذن $\arg(2i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

و لدينا $(\Im m(a) + 1)$ عدد حقيقي . إذن $\arg(\Im m(a) + 1) \equiv 0 [2\pi]$ و بالتالي : $2\arg(u) \equiv \arg(a) + \frac{\pi}{2} [2\pi]$ و منه : $\arg(u) \equiv \frac{1}{2}\arg(a) + \frac{\pi}{4} [\pi]$

$$\begin{aligned}&= I + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)A + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)A + \left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)(-2A) \\ &= I + \left(\frac{a+b-ab\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)A \\ &= I + \left(\frac{a \perp b}{\sqrt{2}}\right)A \\ &= M(a \perp b) \\ &= \varphi(a \perp b)\end{aligned}$$

إذن : $\varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(a \perp b)$

و هذا يعني أن φ تشاكل من (E, \perp) نحو (F, \times) . لكي يكون التطبيق φ تقابلا يكفي أن يكون شموليا و تباينيا .

الشمولية : لتكن S مصفوفة من F .

إذن حسب تعريف المجموعة $F : S = M(a)$; $(\exists a \in E)$;

و منه حسب تعريف التطبيق $\varphi : S = \varphi(a)$; $(\exists a \in E)$;

و بالتالي φ تطبيق شمولي من (E, \perp) نحو (F, \times) .

التباينية : ليكن a و b عنصرين من E بحيث $\varphi(a) = \varphi(b)$.

إذن حسب تعريف التطبيق φ نكتب : $M(a) = M(b)$.

يعني : $\left(I + \frac{a}{\sqrt{2}}A\right) = \left(I + \frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$. إذن $a = b$.

إذن φ تطبيق تبايني .

و بالتالي φ تقابل من (E, \perp) نحو (F, \times) .

خلاصة : φ تشاكل تقابلي من (E, \perp) نحو (F, \times) .

التمرين الأول

1 2 II I I I I

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الانطلاق و يحولها إلى مجموعة الوصول و عكسيا كذلك .

نستنتج إذن البنية الجبرية للمجموعة (F, \times) انطلاقا من البنية للمجموعة (E, \perp) عبر التشاكل التقابلي φ .

لدينا (E, \perp) زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون \perp هو 0 .

و كل عنصر x من E يقبل ممثالا و هو $\left(\frac{x}{x\sqrt{2}-1}\right)$.

إذن (F, \times) زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون \times هو $\varphi(0)$

و كل عنصر $M(y)$ من F يقبل ممثالا و هو $\varphi\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)$.

$$\begin{cases} \varphi(0) = I + \frac{0}{\sqrt{2}}A = I \\ \varphi\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right) = I + \frac{y}{\sqrt{2}(y\sqrt{2}-1)}A = M\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)\end{cases}$$

و بالتالي (F, \times) زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون \times هو I .

و كل عنصر $M(y)$ من F يقبل ممثالا و هو العنصر $M\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)$

و للتأكد من صحة الجواب :

$$\begin{aligned}M(y) \times M\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right) &= \left(I + \frac{y}{\sqrt{2}}A\right) \left(I + \frac{y}{2y-\sqrt{2}}A\right) \\ &= I + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)A + \left(\frac{y}{2y-\sqrt{2}}\right)A + \left(\frac{y^2}{\sqrt{2}(2y-\sqrt{2})}\right)A^2 \\ &= I + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)A + \left(\frac{y}{\sqrt{2}(\sqrt{2}y-1)}\right)A - \left(\frac{2y^2}{2(2y-\sqrt{2})}\right)A \\ &= I + \left(\frac{2(\sqrt{2}y-1)y + 2y - 2\sqrt{2}y^2}{2(\sqrt{2}y-1)\sqrt{2}}\right)A \\ &= I + \left(\frac{2\sqrt{2}y^2 - 2y + 2y - 2\sqrt{2}y^2}{2(\sqrt{2}y-1)\sqrt{2}}\right)A \\ &= I + 0 \times A = I\end{aligned}$$

التمرين الثاني

3 II

لدينا $B(0,2)$ و $(\sqrt{3}, 0)$.
 لنحدد معادلة المستقيم (AB) و التي نُكتب في شكلها المختصر التالي :
 $(AB) : y = px + q$

بحيث p هو الميل و q هو الأرتوب عند الأصل .

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2}{-\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \text{ إذن :}$$

$$(AB) : y = \frac{-2\sqrt{3}}{3}x + q \text{ و منه :}$$

و لدينا $B(0,2)$ نقطة من المستقيم (AB) .

$$\text{إذن : } 2 = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \times 0 + b \text{ أي : } b = 2$$

$$\text{و بالتالي : } (AB) : y = \frac{-2\sqrt{3}}{3}x + 2$$

لكي يكون (AB) مماساً للإهليلج (E_8) يكفي أن نحدد نقطة تقاطع

$$(AB) \text{ و } (E_8) \text{ ثم نحدد بعد ذلك معادلة المماس للإهليلج } (E_8)$$

في تلك النقطة و نبين أن تلك المعادلة ما هي إلا معادلة المستقيم (AB)

على بركة الله، لدينا حسب السؤال (2) أ :

$$(E_8) : x^2 + \left(1 - \frac{4}{\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2}\right)y^2 = \left(\frac{\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2}{4} - 1\right)$$

$$\text{أي : } (E_8) : x^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7}$$

لتحديد نقط تقاطع (AB) و (E_8) نحل النظام التالية :

$$\begin{cases} x^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7} \\ y = \frac{-2\sqrt{3}}{3}x + 2 \end{cases}$$

نعوض y بقيمته في معادلة (E_8) نحصل على :

$$x^2 + \frac{9}{16}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}x + 2\right)^2 = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{9}{16}\left(\frac{4}{3}x^2 + 4 - \frac{8\sqrt{3}}{3}x\right) = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{3}x = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{3}x + \frac{27}{28} = 0$$

نضرب طرفي المعادلة في العدد 28 نحصل على :

$$\Leftrightarrow (7x)^2 - 2(7x)(3\sqrt{3}) + (3\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (7x - 3\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x - 3\sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{7}$$

$$y = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{7} + 2 = \frac{8}{7} \text{ نعوض } x \text{ في معادلة } (AB) \text{ نجد :}$$

من جهة أخرى لدينا معادلة المماس لـ (E_8) في النقطة $(\frac{3\sqrt{3}}{7}, \frac{8}{7})$

$$\text{نُكتب بصفة عامة على شكل : } xx_0 + \frac{9}{16}yy_0 = \frac{9}{7}$$

$$\text{بحيث : } x_0 = \frac{3\sqrt{3}}{7} \text{ و } y_0 = \frac{8}{7}$$

التمرين الثاني

3 I

سوف نستعمل في هذا السؤال متفاوتة المثلثية .

$$\text{لدينا : } |u + iv| \leq |u| + |iv|$$

$$\text{إذن : } |a + i + i - a| \leq |u| + |v|$$

$$\text{و منه : } |2i| \leq |u| + |v|$$

$$\text{و بالتالي : } 2 \leq |u| + |v|$$

التمرين الثاني

1 II

لتكن H صورة العدد العقدي i و \bar{H} صورة $-i$.

و لتكن M صورة العدد العقدي a .

$$\text{لدينا } |u| + |v| = m \text{ إذن } |a + i| + |ai + 1| = m$$

$$\text{نريد أن نبين أن : } |ai + 1| = |a - i|$$

$$\text{لدينا : } ai + 1 = i(a - i)$$

$$\text{إذن : } |ai + 1| = |i(a - i)| = |i||a - i| = |a - i|$$

$$\text{إذن : } |a + i| + |a - i| = m$$

$$\text{و منه : } |a - (-i)| + |a - i| = m$$

$$\text{أي : } \bar{H}M + HM = m$$

و لكي تكون مجموعة النقط (E_m) إهليلج يكفي أن نتحقق من أن : $\bar{H}H \leq m$.

$$\text{لدينا : } \bar{H}H = |i - (-i)| = |2i| = 2$$

و لدينا حسب المعطيات $m \geq 2$ إذن $\bar{H}H \leq m$.

و بالتالي (E_m) إهليلج مركزه هو منتصف القطعة $[HH]$.

أي النقطة O أصل المعلم .

التمرين الثاني

2 II

بما أن (E_m) إهليلج .

فإن معادلته الديكارتية نُكتب على الشكل : $(E_m) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
 لنحدد الآن قيمتي العددين a و b .

$$\text{لدينا } m = 2b \text{ إذن } b = \frac{m}{2} \text{ و منه } b^2 = \frac{m^2}{4}$$

$$\text{و نعلم كذلك أن : } c = \frac{\bar{H}H}{2} = 1 \text{ و } c^2 = b^2 - a^2$$

$$\text{إذن : } a^2 = b^2 - c^2$$

و بالتالي : المعادلة الديكارتية للإهليلج (E_m) هي :

$$(E_m) : \frac{x^2}{\left(\frac{m^2}{4} - 1\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{m^2}{4}\right)} = 1$$

$$\text{أي : } (E_m) : x^2 + \left(1 - \frac{4}{m^2}\right)y^2 = \left(\frac{m^2}{4} - 1\right)$$

التمرين الثاني

2 II

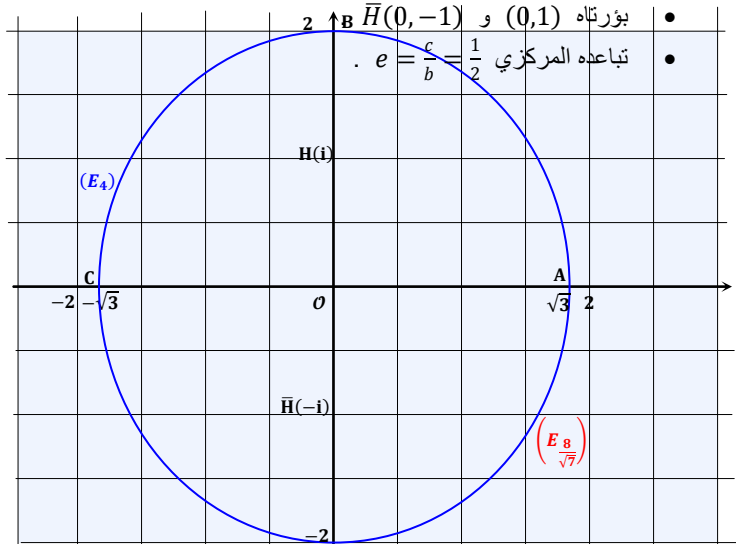
(E_4) إهليلج يتميز بالعناصر التالية .

• مركزه O

• رؤوسه $A(\sqrt{3}, 0)$ و $B(-\sqrt{3}, 0)$ و $C(0, 2)$ و $D(0, -2)$

• بؤرتاه $(0, 1)$ و $\bar{H}(0, -1)$

• تباعده المركزي $e = \frac{c}{b} = \frac{1}{2}$.



الطريقة هي كالتالي:

• نطلق من المرحلة الخامسة

• ونعوض 3 بالتعبير $10 - 1 \times 7$ ثم نبسط .

• ونعوض 7 بالتعبير $37 - 3 \times 10$ ثم نبسط .

• ونعوض 10 بالتعبير $195 - 5 \times 37$ ثم نبسط .

• ونعوض 37 بالتعبير $232 - 1 \times 195$ ثم نبسط .

إلى العمل: $1 = 7 - 2 \times 3$

$$= 7 - 2(10 - 1 \times 7)$$

$$= 3 \times 7 - 2 \times 10$$

$$\Rightarrow 1 = 3 \times 7 - 2 \times 10$$

$$= 3 \times (37 - 3 \times 10) - 2 \times 10$$

$$= 3 \times 37 - 11 \times 10$$

$$\Rightarrow 1 = 3 \times 37 - 11 \times 10$$

$$= 3 \times 37 - 11 \times (195 - 5 \times 37)$$

$$= 58 \times 37 - 11 \times 195$$

$$\Rightarrow 1 = 58 \times 37 - 11 \times 195$$

$$= 58 \times (232 - 1 \times 195) - 11 \times 195$$

$$= 58 \times 232 - 69 \times 195$$

$$\Rightarrow 1 = 58 \times 232 - 69 \times 195$$

إذن الحل الخاص للمعادلة هو الزوج $(-69, -58)$.

سوف نحدد الآن صيغة الحل العام للمعادلة (E) .

ليكن (x, y) الحل العام للمعادلة (E) .

$$\begin{cases} 195x - 232y = 1 \\ 195(-69) - 232(-58) = 1 \end{cases}$$

لدينا: $195(-69) - 232(-58) = 1$

ننجز عملية الطرح بين هاتين المتساويتين نحصل على:

$$195(x + 69) - 232(y + 58) = 0$$

يعني: $195(x + 69) = 232(y + 58)$ (*)

من هذه الكتابة نستنتج أن 195 يقسم الجداء $232(y + 58)$.

و بما أن $195 \wedge 232 = 1$ فإنه حسب Gauss

نستنتج أن 195 يقسم $(y + 58)$.

إذن: $(\exists k' \in \mathbb{Z}) ; y + 58 = 195k'$.

يعني: $y = 195k' - 58$

لإيجاد x نعوض y في النتيجة (*) نحصل على:

$$195(x + 69) = 232(195k')$$

يعني: $x = 232k' - 69$

نضع $k = k' - 1$ فنحصل على:

$$\begin{cases} x = 232(k + 1) - 69 = 232k + 163 \\ y = 195(k + 1) - 58 = 195k + 137 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 232(k + 1) - 69 = 232k + 163 \\ y = 195(k + 1) - 58 = 195k + 137 \end{cases}$$

عكسيا نبرهن أن جميع الأزواج من \mathbb{Z}^2 التي تُكتب على شكل

$(232k + 163 ; 195k + 137)$ هي حلول للمعادلة (E) .

و بالفعل لدينا: $195(232k + 163) - 232(195k + 137)$

$$= 45240k + 31785 - 45240k - 31784$$

$$= 31785 - 31784$$

$$= 1$$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي:

$$S = \{ (232k + 163 ; 195k + 137) ; k \in \mathbb{Z} \}$$

التمرين الثالث

1 ج

$$195d \equiv 1 [232] \Leftrightarrow 232 / (195d - 1)$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{Z} ; 232b = 195d - 1$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{Z} ; 195d - 232b = 1$$

$$\Leftrightarrow (d, b) \text{ est solution de } (E)$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; \begin{cases} d = 163 + 232k \\ b = 137 + 195k \end{cases}$$

لدينا: $0 \leq 163 + 232k \leq 232$; إذن $0 \leq d \leq 232$

أي: $-0,7 \leq k \leq 0,2$.

العدد الصحيح النسبي الوحيد المحصور بين 0,2 و -0,7 هو 0 .

إذن: $d = 163 + 232 \times 0 = 163$

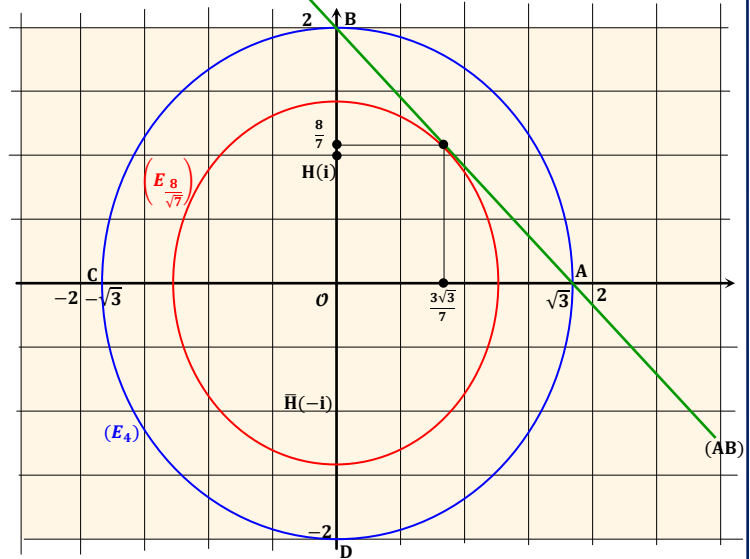
إذن معادلة المماس هي: $\frac{3\sqrt{3}}{7}x + \frac{9}{16} \cdot y \cdot \frac{8}{7} = \frac{9}{7}$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{7}x + \frac{9}{14}y = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x$$

و هذه الكتابة الأخيرة هي بالفعل معادلة المستقيم (AB) .

و بالتالي (AB) هو المماس لـ (E_8) في النقطة $(\frac{3\sqrt{3}}{7}, \frac{8}{7})$.



التمرين الثالث

1 أ

خوارزمية أفليديس هي الآلة التي سوف نوظفها لتحديد القاسم المشترك الأكبر لعددتين، هذه الآلة تستقبل عددين و تنتج في الأخير قاسمهما المشترك الأكبر. و داخل هذه الآلة نجد المراحل التالية:

المرحلة الأولى: $\begin{array}{r} 232 \quad 195 \\ 37 \quad 1 \end{array}$ 37 غير منعدم إذن نواصل

المرحلة الثانية: $\begin{array}{r} 195 \quad 37 \\ 10 \quad 5 \end{array}$ 10 غير منعدم إذن نواصل

المرحلة الثالثة: $\begin{array}{r} 37 \quad 10 \\ 7 \quad 3 \end{array}$ 7 غير منعدم إذن نواصل

المرحلة الرابعة: $\begin{array}{r} 10 \quad 7 \\ 3 \quad 1 \end{array}$ 3 غير منعدم إذن نواصل

المرحلة الخامسة: $\begin{array}{r} 7 \quad 3 \\ 1 \quad 2 \end{array}$ 1 غير منعدم إذن نواصل

المرحلة السادسة: $\begin{array}{r} 3 \quad 1 \\ 0 \quad 3 \end{array}$ 0 منعدم إذن نتوقف

نتوقف محركات خوارزمية أفليديس عن العمل فور الحصول على باقي منعدم

و القاسم المشترك الأكبر للعددتين 232 و 195 هو آخر غير منعدم هو 1 .

و بالتالي: $195 \wedge 232 = 1$

التمرين الثالث

1 ب

في البداية وجب علينا البحث عن الحل البديهي (أو الحل الخاص)

للمعادلة (E) و ذلك من خلال نتائج القسامات المتتالية لخوارزمية أفليديس .

• المرحلة (1): $37 = 232 - 1 \times 195$

• المرحلة (2): $10 = 195 - 5 \times 37$

• المرحلة (3): $7 = 37 - 3 \times 10$

• المرحلة (4): $3 = 10 - 1 \times 7$

• المرحلة (5): $1 = 7 - 2 \times 3$

• المرحلة (6): **Woow Stop**

النتائج:

التمرين الرابع

1 I

- ليكن x عنصرا من \mathbb{R} . لدينا : $g(x) = 1 + (x-1)e^x$
 إذن : $g'(x) = e^x + e^x(x-1) = xe^x$
 بما أن : $e^x > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$
 فإن إشارة $g'(x)$ متعلقة فقط بإشارة x .
 إذا كان $x = 0$ فإن $g'(x) = 0$
 إذا كان $x > 0$ فإن $g'(x) > 0$
 إذا كان $x < 0$ فإن $g'(x) < 0$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + (x-1)e^x)$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + xe^x - e^x)$
 $= 1 + 0 - 0 = 1$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + (x-1)e^x)$
 $= 1 + (+\infty - 1)(+\infty)$
 $= +\infty$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g	1	0	$+\infty$

نلاحظ حسب هذا الجدول أن 0 قيمة دنوية للدالة g .

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \geq 0$

التمرين الرابع

2 I

- لدينا g دالة تناقصية قطعاً على المجال $]-\infty, 0[$
 إذن : $(\forall x < 0) ; g(x) > 0$
 ولدينا g دالة تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$
 إذن : $(\forall x > 0) ; g(x) > 0$
 ولدينا 0 هو العنصر الوحيد الذي صورته بالدالة g هي 0.
 إذن : $(\forall x \neq 0) ; g(x) \neq 0$
 وهذا يعني أن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$

التمرين الرابع

1 II

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}} \right) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = 0 + (+\infty) = +\infty$

التمرين الرابع

2 II

تذكير بمشتقة الدالة *exponentielle*

نعلم أن : $(\forall x_0 \in \mathbb{R}) ; (e^{x_0})' = e^{x_0}$

و هذا يعني أن : $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} \right) = e^{x_0}$

نستغل إذن هذه الملاحظة لحساب نهاية f بجوار الصفر .

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{e^x - e^0}{x - 0}} \right)$
 $= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^0}{x - 0} \right)} = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} = 1 = f(0)$

إذن f دالة متصلة في الصفر .

التمرين الثالث

2

- يكفي أن نتحقق من أن جميع الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من
 أو تساوي 233 لا تقسم العدد 233 . و بالفعل لدينا الأعداد التي مربعاتها
 أصغر من أو تساوي 233 هي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 .
 و لا أحد من هذه الأعداد يقسم 233 . إذن 233 عدد أولي .

التمرين الثالث

3

ليكن a و b عنصرين من $A \setminus \{0\}$ حيث $f(a) = f(b)$
 لدينا : $\begin{cases} a^{195} \equiv f(a) [233] \\ b^{195} \equiv f(b) [233] \end{cases}$

بما أن $f(a) = f(b)$ فإن $a^{195} \equiv b^{195} [233]$
 و منه : $a^{195d} \equiv b^{195d} [233]$

ولدينا $195d \equiv 1 [232]$ يعني : $195d = 232k + 1$

إذن : $a^{232k+1} \equiv b^{232k+1} [233]$

من جهة أخرى لدينا حسب مبرهنة *Fermat* : $a^{232} \equiv 1 [233]$
 إذن : $a^{232k} \equiv 1 [233]$ و منه : $a^{232k+1} \equiv a [233]$ (1)

بنفس الطريقة نجد : $b^{232k+1} \equiv b [233]$ (2)

بما أن : $a^{232k+1} \equiv b^{232k+1} [233]$ فإن $a \equiv b [233]$
 و ذلك باستعمال النتيجة (1) و (2)

نستنتج إذن أن 233 قاسم للعدد $|a - b|$

لدينا : $a \in A \setminus \{0\}$ و $b \in A \setminus \{0\}$

يعني : $0 < a \leq 232$ و $0 < b \leq 232$

و منه : $|a - b| \leq 232 < 233$

نلاحظ أن 233 يقسم عددا أصغر منه و هو $|a - b|$

إذن : $|a - b| = 0$. و بالتالي : $a = b$

في حالة $a = 0$ لدينا $f(0)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد 0^{195} على 233 .

يعني : $f(0) = 0$ أي : $b = 0$

نحصل على الإستلزام التالي : $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$

خلاصة : f تطبيق تبايني .

التمرين الثالث

3 ب

ليكن a و b عنصرين من A بحيث $f(a) = b$

لدينا : $a^{195} \equiv f(a) [233]$ إذن : $a^{195} \equiv b [233]$

و منه : $a^{195d} \equiv b^d [233]$

و بما أن : $195d - 232b = 1$

فإن : $a^{1+232b} \equiv b^d [233]$ (1)

من جهة أخرى لدينا : $a^{232} \equiv 1 [233]$ إذن : $a^{232b} \equiv 1 [233]$

يعني : $a \cdot a^{232b} \equiv a [233]$. يعني : $a^{1+232b} \equiv a [233]$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $a \equiv b^d [233]$

و نعلم أن $d = 163$ إذن $a \equiv b^{163} [233]$

و بما أن $a < 233$ فإن a هو باقي القسمة الأقليدية للعدد b^{163} على 233 .

و منه 233 قاسم للعدد $(a - b^{163})$

إذن يوجد k من \mathbb{Z} بحيث $a = b^{163} + 233k$

التمرين الثالث

3 ج

نستنتج من خلال نتيجتي السؤالين (3 أ) و (3 ب) أن التطبيق f تبايني
 و شمولي من A نحو A . إذن فهو تقابل و تقابله العكسي نستنتجه من

جواب السؤال (ب) .

$f : A \rightarrow A$

$a \rightarrow f(a) \equiv a^{195} [233]$

$f^{-1} : A \rightarrow A$

$b \rightarrow f^{-1}(b) \equiv b^{163} [233]$

الحالة الثانية: إذا كان x سالب يعني $|x| = -x$

لدينا: $x + |x| = 0$ و $x - |x| = 2x$

ليكن $x \leq t \leq 0$ إذن $e^0 \leq e^{-t} \leq e^{-x}$

ومنه: $te^{-x} \leq te^{-t} \leq t$ (تغير الترتيب لأن t عدد سالب)

ندخل التكامل $\int_x^0 dt$ على هذه الدوال المتصلة حيث $x \leq 0$ نحصل على:

$$\int_x^0 te^{-x} dt \leq \int_x^0 te^{-t} dt \leq \int_x^0 t dt$$

$$\Rightarrow e^{-x} \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^0 \leq -J(x) \leq \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2}{2} e^{-x} \leq -J(x) \leq \frac{-x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} e^{-\frac{(x+|x|)}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{(x-|x|)}{2}}$$

الحالة الثالثة: إذا كان x منعدم فإن $J(0) = 0$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} e^{-\frac{(x+|x|)}{2}} \leq \underbrace{J(x)}_{=0} \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{(x-|x|)}{2}}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{x^2}{2} e^{-\frac{(x+|x|)}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{(x-|x|)}{2}}$$

التمرين الرابع

ج 4 II

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{x^2}{2} e^{-\frac{(x+|x|)}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{(x-|x|)}{2}}$$

إذن باستعمال نتيجة السؤال أ) نجد:

$$\frac{x^2}{2} e^{-\frac{(x+|x|)}{2}} \leq e^{-x} (e^x - 1 - x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{(x-|x|)}{2}}$$

نأخذ $x \neq 0$ ونضرب أطراف هذا التأيير في العدد الموجب قطعاً $\frac{e^x}{x^2}$ نحصل على:

$$\frac{1}{2} \cdot e^x \cdot e^{-\frac{(x+|x|)}{2}} \leq \frac{(e^x - 1 - x)}{x^2} \leq \frac{1}{2} \cdot e^x \cdot e^{-\frac{(x-|x|)}{2}}$$

وبالتالي بعد تبسيط الميمنة والميسرة نحصل في الأخير على التأيير التالي:

$$\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{(x-|x|)}{2}} \leq \frac{(e^x - 1 - x)}{x^2} \leq \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{(x+|x|)}{2}}$$

التمرين الرابع

د 4 II

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{(x-|x|)}{2}} = e^{\frac{(0-|0|)}{2}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{(x+|x|)}{2}} = e^{\frac{(0+|0|)}{2}} = e^0 = 1$$

إذن نحصل على الوضعية التالية:

$$\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{(x-|x|)}{2}} \leq \frac{(e^x - 1 - x)}{x^2} \leq \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{(x+|x|)}{2}}$$

$x \rightarrow 0$

$\frac{1}{2}$

$x \rightarrow 0$

$\frac{1}{2}$

إذن حسب خاصيات التأيير والنهيات نستنتج أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

التمرين الرابع

أ 3 II

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)' = \frac{(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{-1 - e^x(x - 1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

التمرين الرابع

ب 3 II

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2} ; (\forall x \in \mathbb{R}^*)$$

نعلم ان: $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; (e^x - 1)^2 > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $g(x)$

ولدينا: $g(0) = 0$ و $g(x) > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$

إذن تنعدم الدالة $f'(x)$ إذا كان $x = 0$

ولدينا: $f'(x) < 0$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$

يعني أن الدالة f تناقصية قطعاً على \mathbb{R}^*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x} \right) - \frac{1}{x}} = 0$$

نستنتج أن جدول تغيرات الدالة f كما يلي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$			-
f	$+\infty$	1	0

التمرين الرابع

أ 4 II

$$J(x) = \int_0^x \underbrace{t}_{u(t)} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{v'(t)} dt$$

$$= [u(t) \cdot v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t) \cdot v(t) dt$$

$$= [t(-e^{-t})]_0^x - \int_0^x (-e^{-t}) dt$$

$$= [-te^{-t}]_0^x - [-e^{-t}]_0^x$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

$$= e^{-x}(e^x - x - 1)$$

التمرين الرابع

ب 4 II

ليكن x عدداً حقيقياً ونفصل بين ثلاث حالات

الحالة الأولى: إذا كان x موجب يعني $|x| = x$

لدينا $x + |x| = 2x$ و $x - |x| = 0$

ليكن $0 \leq t \leq x$ إذن $e^0 \leq e^{-t} \leq e^{-x}$

أي: $te^{-x} \leq te^{-t} \leq t$

ندخل التكامل $\int_0^x dt$ على هذه الدوال المتصلة حيث $0 \leq x$ نجد:

$$\int_0^x te^{-x} dt \leq \int_0^x te^{-t} dt \leq \int_0^x t dt$$

$$\Rightarrow e^{-x} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x \leq J(x) \leq \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x$$

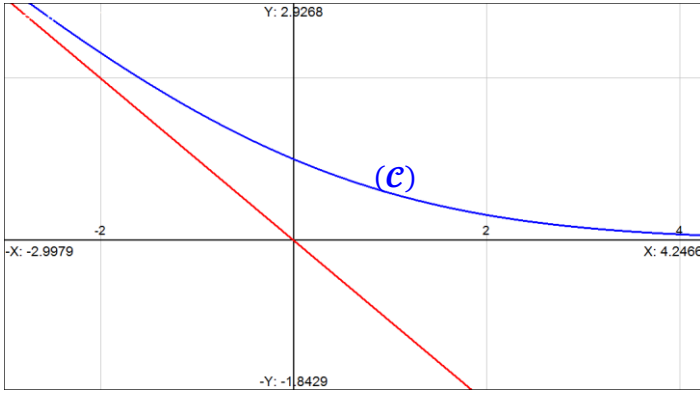
$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} e^{-x} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} e^{-\frac{(x+|x|)}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{(x-|x|)}{2}}$$

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}^* ; e^x > 0$ et $(e^x - 1)^2 > 0$.
 إذن إشارة $f''(x)$ تتعلق بإشارتي الكميبتين $\varphi(x)$ و $(e^x - 1)$.
 إذا كان $x > 0$ فإن $\varphi(x) > 0$ و $e^x > e^0 = 1$.
 إذن : $f''(x) > 0$.
 إذا كان $x < 0$ فإن $\varphi(x) < 0$ و $e^x < e^0 = 1$.
 إذن : $f''(x) > 0$.
 في كلتا الحالتين نلاحظ أن : $f''(x) > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$.
 وهذا يعني أن منحنى الدالة f محدب .

التمرين الأول

5 II



التمرين الرابع

1 II

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} = x ; x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = xe^x - x ; x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2 ; x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 2 ; x \neq 0$$

إذن $\ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$.

التمرين الرابع

2 II

لنبين أن : $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.
 لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f''(x) > 0$. إذن دالة f' تزايدية على \mathbb{R}^* .
 إذا كان $x \geq 0$ فإن $f'(x) \geq f'(0)$.
 يعني أن : $f'(x) \geq \frac{-1}{2}$ (1)
 من جهة أخرى لدينا : $f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2} \leq 0$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$.
 وذلك لأن : $g(x) \geq 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$.
 إذن من الكتابة $f'(x) \leq 0$ نستنتج أن $f'(x) \leq \frac{1}{2}$.
 يعني : $f'(x) \leq \frac{1}{2}$ (2)
 من (1) و (2) نستنتج أن : $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$.
 يعني : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$.

التمرين الرابع

2 II

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} . فإنه بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية TAF على أي مجال يوجد ضمن \mathbb{R} .
 نختار المجال الذي طرفاه $\ln 2$ و u_n والذي سوف أرمز له بالرمز $]\ln 2, u_n[$ فقط لتسهيل الكتابات .

$$\Rightarrow \exists c \in]\ln 2, u_n[; \frac{f(u_n) - f(\ln 2)}{u_n - \ln 2} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(u_n) - f(\ln 2)}{u_n - \ln 2} \right| = |f'(c)|$$

$$\Rightarrow |f(u_n) - f(\ln 2)| = |f'(c)| \cdot |u_n - \ln 2|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - e^x + 1}{xe^x - x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} - \left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right) \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} - \left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right) f(x)$$

$$= - \left(\frac{1}{2} \right) (1) = \frac{-1}{2}$$

وبالتالي : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \frac{-1}{2}$.
 وهذا يعني أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر .
 ولدينا : $f'(0) = \frac{-1}{2}$.

التمرين الرابع

5 II

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-g'(x)(e^x - 1)^2 + g(x)(2(e^x - 1)e^x)}{(e^x - 1)^4}$$

$$= \frac{-xe^x(e^x - 1)^2 + (1 + (x - 1)e^x)(2(e^x - 1)e^x)}{(e^x - 1)^4}$$

$$= \frac{-xe^x(e^x - 1)^2 + 2(e^x - 1)e^x + 2(x - 1)(e^x - 1)e^{2x}}{(e^x - 1)^4}$$

$$= \frac{-xe^x(e^x - 1) + 2e^x + 2(x - 1)e^{2x}}{(e^x - 1)^3}$$

$$= \frac{e^x(-xe^x + x + 2 + 2xe^x - 2e^x)}{(e^x - 1)^3}$$

$$= \frac{e^x(xe^x + x + 2 + 2xe^x - 2e^x)}{(e^x - 1)^3}$$

$$= \frac{e^x(e^x(x - 2) + (x + 2))}{(e^x - 1)^3}$$

وبالتالي : $f''(x) = \frac{e^x(e^x(x - 2) + (x + 2))}{(e^x - 1)^3}$.

التمرين الرابع

5 II

نضع : $\varphi(x) = e^x(x - 2) + (2 + x)$.

$$\Rightarrow \varphi'(x) = (xe^x - 2e^x + 2 + x)'$$

$$= xe^x + e^x - 2e^x + 1$$

$$= e^x(x - 1) + 1$$

$$= g(x) \geq 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi'(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}$$

ولدينا : $\varphi(0) = 0$ و f دالة تزايدية على \mathbb{R} .
 إذا كان $x \geq 0$ فإن $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$.
 إذا كان $x \leq 0$ فإن $\varphi(x) \leq \varphi(0) = 0$.

التمرين الرابع

5 II

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (e^x(x - 2) + (x + 2))$$

$$= \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \times \left(\frac{e^x(x - 2) + (x + 2)}{(e^x - 1)} \right)$$

$$= \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \times \frac{\varphi(x)}{(e^x - 1)}$$

ندخل التكامل على هذه الدوال المتصلة حيث $x < 2x$ نجد :

$$\int_x^{2x} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) dt \geq \int_x^{2x} \left(\frac{1}{e^t - 1} \right) dt \geq \int_x^{2x} \left(\frac{2x}{e^{2x} - 1} \right) dt$$

$$\left(\frac{x}{e^x - 1} \right) \int_x^{2x} 1 dt \geq F(x) \geq \left(\frac{2x}{e^{2x} - 1} \right) \int_x^{2x} 1 dt$$

$$\left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right) \geq F(x) \geq \left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right)$$

الحالة الثانية : إذا كان $x < 0$

$$2x \leq t \leq x \Rightarrow f(2x) \geq f(t) \geq f(x)$$

$$\Rightarrow \int_{2x}^x f(2x) dt \geq \int_{2x}^x f(t) dt \geq \int_{2x}^x f(x) dt$$

$$\Rightarrow - \int_x^{2x} f(2x) dt \geq - \int_x^{2x} f(t) dt \geq - \int_x^{2x} f(x) dt$$

$$\Rightarrow -x f(2x) \geq -F(x) \geq -x f(x)$$

$$\Rightarrow x f(2x) \leq F(x) \leq x f(x)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right)$$

خلاصة القول :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right) \quad (*)$$

التمرين الرابع

IV 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\left(\frac{e^{2x} - e^0}{2x - 0} \right)}$$

$$= \frac{0}{\lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - e^0}{2x - 0} \right)} = \frac{0}{e^0} = 0$$

و بنفس الطريقة لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\left(\frac{e^x - e^0}{x - 0} \right)} = \frac{0}{e^0} = 0$$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right)$$

$x \rightarrow 0 \quad \quad \quad x \rightarrow 0$

$0 \quad \quad \quad 0$

و بالتالي حسب خاصيات الترتيب و النهايات نستنتج أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0 = F(0) \quad \text{و هذا يعني أن الدالة } F \text{ متصلة في الصفر .}$$

بما أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

فإن : $|f'(c)| \leq \frac{1}{2}$ لأن $c \in \mathbb{R}^*$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب قطعا $|u_n - \ln 2|$ نجد :

$$|f'(c)| \cdot |u_n - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |f(u_n) - f(\ln 2)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$

أو بتعبير آخر : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$

التمرين الرابع

III 2

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \ln 2|$

$$\leq \left(\frac{1}{2} \right)^2 |u_{n-2} - \ln 2|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} \right)^3 |u_{n-3} - \ln 2|$$

⋮ ⋮ ⋮

$$\leq \left(\frac{1}{2} \right)^n |u_{n-n} - \ln 2|$$

نستنتج إذن أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{2} \right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و هو عدد موجب و أصغر من 1 .

إذن : $\lim \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$. و بذلك نحصل على الوضعية التالية :

$$|u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n |1 - \ln 2|$$

$n \rightarrow \infty$
0

أو بالأحرى نحصل على الوضعية التالية :

$$-\left(\frac{1}{2} \right)^n |1 - \ln 2| \leq (u_n - \ln 2) \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n |1 - \ln 2|$$

$n \rightarrow \infty$
0

$n \rightarrow \infty$
0

أو الوضعية التالية : $0 \leq (u_n - \ln 2) \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n |1 - \ln 2|$

$n \rightarrow \infty$
0

$n \rightarrow \infty$
0

و جميع هذه الوضعيات تمكننا حسب مصاديق تقارب المتتاليات من استنتاج

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \ln 2) = 0$$

أو بتعبير أبسط نحصل على النهاية التالية : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \ln 2$

و بالتالي $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و توول إلى $\ln 2$.

التمرين الرابع

IV 1

نستعمل في هذا السؤال البرهان بفصل الحالات .
الحالة الأولى : إذا كان $x > 0$ لدينا : $F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$

و نعلم أن f تناقصية على \mathbb{R} .

إذا كان $x \leq t \leq 2x$ فإن $f(x) \geq f(t) \geq f(2x)$.

$$\left(\frac{x}{e^x - 1} \right) \geq \left(\frac{1}{e^t - 1} \right) \geq \left(\frac{2x}{e^{2x} - 1} \right) \quad \text{ومنه :}$$

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{2x}{e^{2x} - 1} \right)}_{x \rightarrow 0} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \underbrace{\left(\frac{x}{e^x - 1} \right)}_{x \rightarrow 0}$$

1

1

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \right) = 1$$

$$\Rightarrow F'(0) = 1$$

لدينا f دالة متصلة على \mathbb{R} . وبالخصوص متصلة على كل مجال $[x, 2x]$ حيث $x \in \mathbb{R}^*$.

إذن f تقبل دالة أصلية h بحيث $F(x) = h(2x) - h(x)$ لدينا : $x \rightarrow h(x)$ و $x \rightarrow 2x$ دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}^* إذن F قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* لأنها مُركب دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}^* .
و بالتالي : $F(x) = h(2x) - h(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F'(x) &= 2h'(2x) - h'(x) \\ &= 2f(2x) - f(x) \\ &= 2 \left(\frac{2x}{e^{2x} - 1} \right) - \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) \\ &= \left(\frac{3 - e^x}{e^x + 1} \right) f(x) \end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; F'(x) = \left(\frac{3 - e^x}{e^x + 1} \right) f(x)$

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) > 0$ و $e^x + 1 > 0$.
ولدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; F'(x) = \left(\frac{3 - e^x}{e^x + 1} \right) f(x)$.
إذن : إشارة $F'(x)$ تتعلق بإشارة $(3 - e^x)$.
نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة F كما يلي :

x	$-\infty$	0	$\ln 3$	$+\infty$
$F'(x)$	+	1	0	-
F	$-\infty$	\emptyset	$F(\ln 3)$	0

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2007

التمرين الأول

1

لدينا p و q أوليان فيما بينهما .

إذن حسب مبرهنة Bezout يوجد عدنان نسبيان u_0 و v_0

بحيث $pu_0 + qv_0 = 1$.

التمرين الأول

1 ب

ليكن $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حلا للنظمة .

لدينا من خلال السؤال أ) : $qv_0 = 1 - pu_0$.

$$x_0 = \begin{cases} bpu_0 + a(1 - pu_0) \\ = bpu_0 + a - apu_0 \\ = p(bu_0 - au_0) + a \end{cases}$$

يعني أن : $(x_0 - a) = p(bu_0 - au_0)$

و منه نستنتج أن : $x_0 \equiv a [p]$ (1) لأن p يقسم العدد $(x_0 - a)$.

بنفس الطريقة لدينا من خلال السؤال أ) : $pu_0 = 1 - qv_0$

$$x_0 = \begin{cases} b(1 - qv_0) + v_0aq \\ = b - bq v_0 + v_0aq \\ = q(av_0 - bv_0) + b \end{cases}$$

و منه : $(x_0 - b) = q(av_0 - bv_0)$

و هذا يعني أن q يقسم $(x_0 - b)$.

إذن : $x_0 \equiv b [q]$ (2) .

من (1) و (2) نستنتج أن x_0 حل للنظمة (S) .

التمرين الأول

2

الخاصية التي سوف نعتمد عليها في الإجابة على هذا السؤال هي الآتية :

$$\begin{cases} m/a \\ n/a \\ m \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow mn/a$$

أو بتعبير آخر : إذا كان عدنان أوليان فيما بينهما و يقسمان عددا ثالثا

فإن جداءهما يقسم كذلك ذلك العدد .

في البداية سوف أبرهن على صحة هذه الخاصية ، مع العلم أنك لست مطالباً بهذا البرهان في الإمتحان الوطني .

إذا كان m يقسم a فإنه يوجد k من \mathbb{Z} بحيث $a = km$.

و إذا كان n يقسم a فإن n يقسم الجداء mk .

إذن حسب Gauss نستنتج أن n يقسم k لأن m و n أوليان فيما بينهما .

و بالتالي يوجد k' من \mathbb{Z} بحيث $k = nk'$.

من $a = km$ و $k = nk'$ نستنتج أن $a = mnk'$.

و هذا يعني أن mn يقسم كذلك العدد a .

إنتهى البرهان على الخاصية و نعود إلى التمرين لتوظيف هذه الخاصية .

ليكن x حلا للنظمة (S) و نريد أن نبين أن العدد pq يقسم الفرق $(x - x_0)$.

$$\begin{cases} x \equiv a [p] \\ x \equiv b [q] \\ x_0 \equiv a [p] \\ x_0 \equiv b [q] \end{cases}$$

لدينا x و x_0 حلان للنظمة (S) . إذن :

من هذه المتوافقات الأربع نستنتج وجود أعداد نسبية k_1 و k_2 و k_3 و k_4

بحيث : $\begin{cases} (x - a) = k_1p \\ (x - b) = k_2q \\ (x_0 - a) = k_3p \\ (x_0 - b) = k_4q \end{cases}$

من خلال هذه المتساويات الأربع نستنتج أن :

$$(x - x_0) = (x - a) - (x_0 - a) = k_1p - k_3p = (k_1 - k_3)p$$

و كذلك : $(x - x_0) = (x - b) - (x_0 - b) = k_2q - k_4q = (k_2 - k_4)q$

$$\begin{cases} (x - x_0) = (k_1 - k_3)p \\ (x - x_0) = (k_2 - k_4)q \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$$

نحصل إذن على ما يلي :

$$\begin{cases} p/(x - x_0) \\ q/(x - x_0) \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$$

يعني : $pq/(x - x_0)$.

إذن حسب الخاصية المذكورة نستنتج أن : $pq/(x - x_0)$.

التمرين الأول

3

لنبرهن الآن على أنه إذا كان x عددا صحيحا نسبيا بحيث يكون الجداء pq

قاسما للفرق $(x - x_0)$ فإن x حل للنظمة (S) .

نتطرق إذن من الإفتراض $pq/(x - x_0)$.

$$\begin{cases} x_0 \equiv a [p] \\ x_0 \equiv b [q] \end{cases}$$

لدينا x_0 حل للنظمة (S) إذن :

و منه يوجد عدنان نسبيان k_1 و k_2 بحيث $x_0 = k_1p + a$ (3)

و $x_0 = k_2q + b$ (4) .

بما أن $pq/(x - x_0)$ و ذلك حسب الإفتراض .

فإنه يوجد k_3 من \mathbb{Z} بحيث $(x - x_0) = k_3pq$ (5)

من (3) و (5) نستنتج أن : $x - (k_1p + a) = k_3pq$

يعني : $(x - a) = p(k_3q + k_1)$.

أي : $p/(x - a)$. و منه : $x \equiv a [p]$ (6) .

من (4) و (5) نستنتج أن : $x - (k_2q + b) = k_3pq$

يعني : $(x - b) = q(k_3p + k_2)$ أي : $q/(x - b)$.

يعني : $x \equiv b [q]$ (7) .

من (6) و (7) نستنتج أن x حل للنظمة (S) .

التمرين الأول

4

من خلال نتيجتي السؤالين السابقين نستطيع كتابة التكافؤ التالي :

$$x \text{ est solution de } (S) \Leftrightarrow pq/(x - x_0)$$

Autrement - dit :
 x est solution du système (S)
si et si et seulement si
 pq divise $(x - x_0)$

أو بتعبير أخير : $x \equiv x_0 [pq] \Leftrightarrow x$ حل للنظمة (S)

إذن مجموعة حلول النظمة (S) هي جميع الأعداد النسبية التي يكون باقي

قسمتها على pq مساويا لـ x_0 . أو بتعبير آخر نقول أن مجموعة حلول

النظمة (S) هو صنف التكافؤ \bar{x}_0 (classe d'équivalence)

التي هي عنصر من عناصر الفضاء المتجهي $\mathbb{Z}/(pq)\mathbb{Z}$.

التمرين الأول

5

$$(S_0) : \begin{cases} x \equiv 1 [8] \\ x \equiv 3 [13] \end{cases}$$

نريد أن نحل في \mathbb{Z} النظمة (S_0) التالية :

و أشير إلى أن النظمة (S_0) حالة خاصة للنظمة (S) و ذلك بحيث

$p = 8$ و $q = 13$ و $a = 1$ و $b = 3$ و $8 \wedge 13 = 1$.

و تُعتبر الأسئلة السابقة دراسة نظرية لحلول النظمة

مع $p \wedge q = 1$. و السؤال الخامس عبارة عن تطبيق عددي لنتائج

تلك الدراسة .

ليكن x حلا للنظمة (S_0) إذن حسب التكافؤ السابق $x \equiv x_0 [8 \times 13]$

لنحسب الآن x_0 الحل الخاص للنظمة (S_0) باستعمال خوارزمية القسمة

المتتالية لأقليدس حيث $p = 8$ و $q = 13$.

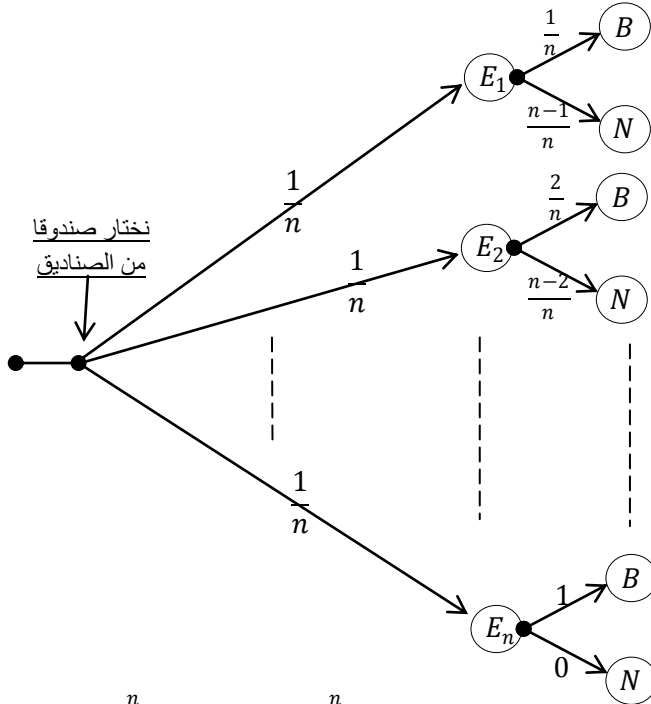
التمرين الثاني

1

يُنصح باستعمال نموذج شجرة الاحتمالات لدراسة أي تجربة عشوائية
و في كل مراحل هذا التمرين نشغل بـ $1 \leq i \leq n$.

- " اختيار الصندوق رقم E_i " =
- " سحب كرة بيضاء " = B
- " سحب كرة سوداء " = N

نحول التجربة الواردة في التمرين إلى شجرة الاحتمالات التالية :



من خلال هذه الشجرة نكتب : $p(B) = \sum_{i=1}^n p(B \cap E_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{i}{n}$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i$$

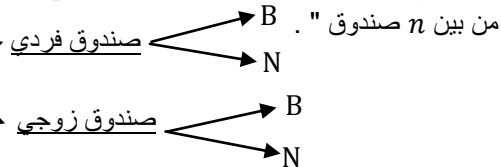
$$= \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$= \frac{n+1}{2n}$$

التمرين الثاني

2

لنحسب احتمال السحب من صندوق فردي (أي يحمل رقما فرديا)
نحن أمام تجربة عشوائية متعلقة بالصناديق و هي " اختيار صندوق



في البداية أذكر بما يلي :
إذا كان n عددا فرديا فإنه في المجموعة $\{1,2,3, \dots, n\}$
يوجد $\frac{n+1}{2}$ عدد فردي .
و إذا كان n عددا زوجيا فإنه في المجموعة $\{1,2,3, \dots, n\}$
يوجد $\frac{n}{2}$ عدد فردي .

إذن : $p(\text{صندوق فردي}) = \frac{\text{عدد الصناديق الفردية}}{\text{مجموع}}$

$$= \frac{\frac{n+1}{2}}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

$\begin{array}{r} 13 \\ 8 \\ \hline 1 \end{array} \mapsto \boxed{5 = 13 - 8} \quad (1)$	المرحلة الأولى
$\begin{array}{r} 8 \\ 5 \\ \hline 1 \end{array} \mapsto \boxed{3 = 8 - 5} \quad (2)$	المرحلة الثانية
$\begin{array}{r} 5 \\ 3 \\ \hline 1 \end{array} \mapsto \boxed{2 = 5 - 3} \quad (3)$	المرحلة الثالثة
$\begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ \hline 1 \end{array} \mapsto \boxed{1 = 3 - 2} \quad (4)$	المرحلة الرابعة
$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \\ \hline 2 \end{array} \mapsto \text{Stop right now !}$	المرحلة الخامسة

نوقف محركات هذه الماكينة عندما نحصل على أول باقي منعدم .
ننتقل من النتيجة (4) و نعوض فيها العدد 2 بالتعبير $(5 - 3)$ ثم نبسط .
ثم بعد ذلك نعوض العدد 3 بالتعبير $(8 - 5)$ ثم نبسط . ثم بعد ذلك
نعوض العدد 5 بالتعبير $(13 - 8)$ ثم نبسط نحصل أخيرا على المتساوية
المطلوبة . (let's do it now)

$$(4) \quad 1 = 3 - 2 \xrightarrow{\text{حساب (3)}} 1 = 3 - (5 - 3)$$

$$\xrightarrow{\text{حساب (2)}} 1 = 2(8 - 5) - 5$$

$$\xrightarrow{\text{حساب (1)}} 1 = 2 \times 8 - 3(13 - 5)$$

$$= 5 \times 8 - 3 \times 13$$

إذن : $1 = 5 \times 8 - 3 \times 13$. يعني : $1 = 8u_0 + 13v_0$ حيث $u_0 = 5$ و $v_0 = -3$ و منه :

$$x_0 = bpu_0 + aqv_0 = 3 \times 8 \times 5 - 1 \times 13 \times 3 = 81$$

إذن حلول النمطة (S_0) هي جميع الأعداد النسبية التي باقي قسمتها على 8×13 يساوي 81 .

يعني أن مجموعة الحلول هي صنف التكافؤ $\overline{81}$ في الفضاء $\mathbb{Z}/104\mathbb{Z}$.
أو باستعمال التكافؤ السابق نكتب :

$$(S_0) \quad x \equiv 81 [104] \Leftrightarrow \text{حل للنمطة } (S_0)$$

أي أن مجموعة الحلول هي :

$$\text{les solutions} = \{ 104k + 81 ; k \in \mathbb{Z} \}$$

مثال من تلك الحلول : من أجل $k = 1$ نحصل على الحل 185 .
و بالفعل لدينا : $185 \equiv 1 [8]$ و $185 \equiv 3 [13]$.

يعني :

$$((\bar{a}b)^2 + (\bar{a}b)^2) - (a^2|b|^2 + b^2|a|^2) + (\bar{a}^2|b|^2 + \bar{b}^2|a|^2)$$

$$= 1 - ((ab)^2 + (\bar{a}\bar{b})^2 - |ab|^2)$$

ولدينا : $\varphi\bar{\varphi} = (a\bar{b} + \bar{a}b - \bar{a}\bar{b})(\bar{a}b + a\bar{b} - ab)$

$$= 3|ab|^2 + ((\bar{a}\bar{b})^2 + (\bar{a}b)^2) - (a^2|b|^2 + b^2|a|^2) + (\bar{a}^2|b|^2 + \bar{b}^2|a|^2)$$

$$= 3|ab|^2 + 1 - ((ab)^2 + (\bar{a}\bar{b})^2) - |ab|^2$$

إن : $(*) \varphi\bar{\varphi} = 2|ab|^2 + 1 - ((ab)^2 + (\bar{a}\bar{b})^2)$

من جهة أخرى : $\varphi - \bar{\varphi} = (a\bar{b} + \bar{a}b - \bar{a}\bar{b}) - (\bar{a}b + a\bar{b} - ab)$

$$= ab - \bar{a}\bar{b}$$

إن : $(**) \varphi - \bar{\varphi} = ab - \bar{a}\bar{b}$

ومنه : $(\varphi - \bar{\varphi})^2 = \varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - 2\varphi\bar{\varphi}$

$$= (ab)^2 + (\bar{a}\bar{b})^2 - 2|ab|^2$$

يعني : $\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - 2\varphi\bar{\varphi} = (\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - \varphi\bar{\varphi}) - \varphi\bar{\varphi}$

$$= (ab)^2 + (\bar{a}\bar{b})^2 - 2|ab|^2$$

ومنه : $\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 = \varphi\bar{\varphi} + ((ab)^2 + (\bar{a}\bar{b})^2 - 2|ab|^2)$

باستعمال العلاقة $(*)$ نحصل على :

$$\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 = 2|ab|^2 - ((ab)^2 + (\bar{a}\bar{b})^2) + 1 + (ab)^2 + (\bar{a}\bar{b})^2 - 2|ab|^2 = 1$$

حصلنا إذن العلاقة التالية : $\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 = 1$

أو باستعمال الترميز الأصلي نكتب :

$$(\varphi(a, b))^2 + (\bar{\varphi}(a, b))^2 - |\varphi(a, b)|^2 = 1$$

و بالتالي $M(\varphi(a, b))$ نقطة من (H) .

التمرين الثالث

$$\varphi(z, 1) = z + \bar{z} - \bar{z} = z$$

$$\varphi(z, \bar{z}) = zz + \bar{z}\bar{z} - \bar{z}\bar{z} = z^2 + \bar{z}^2 - \bar{z}z$$

$$= z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1$$

التمرين الثالث

نريد أن نبين أن * قانون تجميعي و تبادلي و يقبل عنصرا محايدا و كل عنصر يمتلك ممتثلا في (H) بالقانون * .

نحتاج في البداية إلى أن نبين ما يلي :

$$(1) \varphi(a, b) - \varphi(\bar{a}, \bar{b}) = ab - \bar{a}\bar{b}$$

$$(2) \bar{\varphi}(a, b) = \varphi(\bar{a}, \bar{b})$$

لدينا : $\bar{\varphi}(a, b) = (\bar{a}b + \bar{a}\bar{b} - \bar{a}\bar{b}) = \bar{a}b + \bar{a}\bar{b} - ab = \varphi(\bar{a}, \bar{b})$

و لدينا كذلك :

$$\varphi(a, b) - \varphi(\bar{a}, \bar{b}) = (a\bar{b} + \bar{a}b - \bar{a}\bar{b}) - (\bar{a}b + a\bar{b} - ab) = ab - \bar{a}\bar{b}$$

الآن لتكن $M(a)$ و $M(b)$ و $M(c)$ ثلاث عناصر من (H) .

لدينا : $(M(a) * M(b)) * M(c) = M(\varphi(a, b)) * M(c)$

$$= M(\varphi(\varphi(a, b)); c)$$

$$= c\bar{\varphi}(a, b) + \bar{c}\varphi(a, b) - \bar{c}\varphi(a, b)$$

$$= c\bar{\varphi}(\bar{a}, \bar{b}) + \bar{c}\varphi(a, b) - \bar{c}\varphi(\bar{a}, \bar{b})$$

$$= c\bar{\varphi}(\bar{a}, \bar{b}) + \bar{c}(\varphi(a, b) - \varphi(\bar{a}, \bar{b}))$$

$$= c\bar{\varphi}(\bar{a}, \bar{b}) + \bar{c}(ab - \bar{a}\bar{b})$$

$$= c(\bar{a}b + \bar{a}\bar{b} - ab) + \bar{c}ab - \bar{a}\bar{b}c$$

$$= \bar{a}bc + \bar{b}ac + \bar{c}ab - (abc + \bar{a}\bar{b}c) \quad (3)$$

التمرين الثاني

3

نضع : $B_I =$ " الحصول على كرة بيضاء علما أن السحب تم من صندوق يحمل رقما فرديا " .

من خلال شجرة الاحتمالات السابقة نكتب :

$$p(B_I) = \sum_{i=1}^n p(B \cap E_i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (2k+1) = \frac{1}{n^2} \left(2 \left(\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} k \right) + \left(\frac{n-1}{2} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\frac{2 \left(\frac{(n-1)(n+1)}{2} \right)}{2} + \left(\frac{n-1}{2} \right) \right)$$

$$= \frac{n^2 - 1}{4n^2} + \frac{n-1}{2n^2} = \frac{n^2 - 1}{4n^2} + \frac{2(n-1)}{4n^2}$$

$$= \frac{n^2 + 2n - 3}{4n^2} = \frac{(n-1)(n+3)}{4n^2}$$

و بالتالي : $p(B_I) = \frac{(n-1)(n+3)}{4n^2}$

التمرين الثالث

1

لدينا : $(H) : \{ M(z) ; z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1 \}$

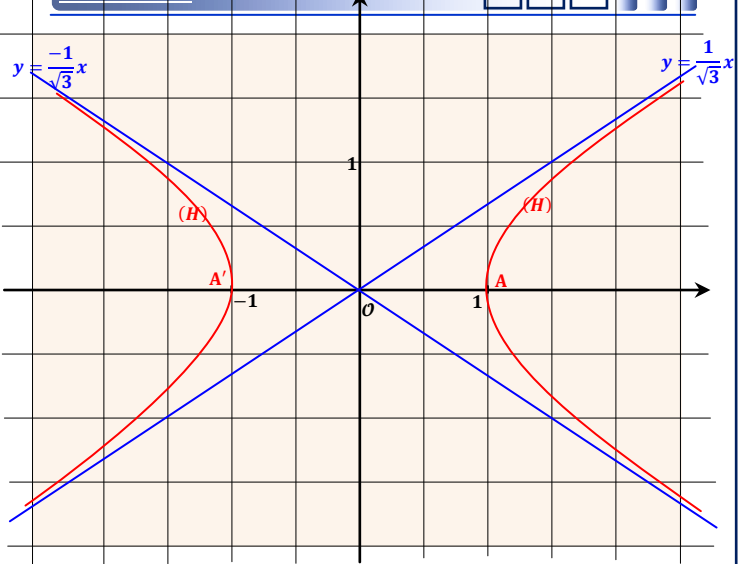
و نضع : $z = x + iy$

إذن المجموعة (H) عبارة عن هذلول مركزه أصل المعلم $O(0,0)$ ورأساه هما $A(1,0)$ و $A'(-1,0)$. و مقارباها هما المستقيمان

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \text{ و } y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

التمرين الثالث

1



التمرين الثالث

2

لتكن $M(b)$ و $M(a)$ نقطتان من (H) .

نضع : $\varphi(a, b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \bar{a}\bar{b}$

و من أجل اختصار الكتابة نضع مؤقتا $\varphi(a, b) := \varphi$.

لدينا $M(b)$ و $M(a)$ نقطتان من (H) : $a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2 = 1$

إذن : $b^2 + \bar{b}^2 - |b|^2 = 1$

نضرب المتساويتين طرفا طرفا نحصل على :

$$(a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2)(b^2 + \bar{b}^2 - |b|^2) = 1$$

$$\left(\forall M, M' \in F \right) ; \left\{ \begin{array}{l} \alpha \cdot (M + M') = \alpha \cdot M + \alpha \cdot M' \\ (\alpha + \beta) \cdot M = \alpha \cdot M + \beta \cdot M \\ (\alpha\beta) \cdot M = \alpha \cdot (\beta \cdot M) \\ 1 \cdot M = M \end{array} \right. ; \text{ ومنه } ;$$

و بالتالي $(F, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

ملاحظة: يمكن كذلك استعمال تقنية الفضاء المتجهي الجزئي

لكي تكون الأسرة (I, J) أساسا للفضاء المتجهي الحقيقي $(F, +, \cdot)$

يكفي أن تكون حرة و تُؤلد الفضاء $(F, +, \cdot)$.

لتكن $M(a, b)$ مصفوفة من $(F, +, \cdot)$.

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ 5b & -3b \end{pmatrix} \\ = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \\ = aI + bJ$$

إذن: $\forall M(a, b) \in F ; M(a, b) = aI + bJ$

و هذا يعني أن كل مصفوفة من F تُكتب على شكل تآلفية خطية للمصفوفتين

I و J و من تم فإن الأسرة (I, J) تُؤلد الفضاء المتجهي الحقيقي $(F, +, \cdot)$

لنبين أن الأسرة (I, J) حرة .

ليكن α و β عدنان حقيقيان بحيث $\alpha I + \beta J = 0$.

$$\text{يعني: } \begin{pmatrix} \alpha + \beta & -\beta \\ 5\beta & -3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{و منه: } \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\beta = 0 \\ 5\beta = 0 \\ \alpha - 3\beta = 0 \end{cases} \text{ أي: } \alpha = \beta = 0 \text{ إذن أسرة حرة .}$$

و بالتالي (I, J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي F و بُعد يساوي 2 .

(البُعد هو عدد عناصر الأساس)

التمرين الرابع

ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى \mathbb{R} .

هذا يعني أن: $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$; $(\exists \alpha_1 \in \mathbb{R})(\exists \alpha_2 \in \mathbb{R}^*)$;

ليكن $z = x + iy$ عددا عقديا . نضع: $z = m_1 + m_2\alpha$

إذن: $z = m_1 + m_2(\alpha_1 + i\alpha_2) = m_1 + m_2\alpha_1 + i m_2\alpha_2$

و بما أن: $z = x + iy$ فإن: $\begin{cases} x = m_1 + m_2\alpha_1 \\ y = m_2\alpha_2 \end{cases}$

$$\text{و منه: } \begin{cases} m_1 = \left(x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y\right) \in \mathbb{R} \\ m_2 = \left(\frac{y}{\alpha_2}\right) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

يعني: $(\forall z \in \mathbb{C})(\exists (m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2) ; z = m_1 + m_2\alpha$

و هذا يعني بكل بساطة أن الأسرة $(1, \alpha)$ مولدة للفضاء المتجهي

الحقيقي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ (8) .

لتكن $x + \alpha y$ تآلفية خطية منعقدة للعنصرين 1 و α .

يعني: $x + \alpha y = 0$ أي: $x + y(\alpha_1 + i\alpha_2) = 0$

$$\text{يعني: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} x + \alpha_1 y = 0 \\ \alpha_2 y = 0 \end{cases}$$

إذن أسرة حرة (9) .

من (8) و (9) نستنتج أن $(1, \alpha)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

التمرين الرابع

نضع $z = x + \alpha y$ حيث x و y عدنان حقيقيان

و نعتبر التطبيق المعرف بما يلي: $\psi : \mathbb{C} \rightarrow F$

$$z = x + \alpha y \rightarrow M(x, y)$$

لدينا $\alpha = 0 + \alpha 1$ إذن $\psi(\alpha) = M(0, 1) = J$

و لدينا كذلك: $J^2 + 2(I + J)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

إذن: $J^2 + 2(I + J) = 0$

يعني أن: $J^2 = -2(I + J)$

و بنفس الطريقة لدينا: $M(a) * (M(b) * M(c)) = M(a) * M(\varphi(b, c))$

$$= M(\varphi(a; \varphi(b, c))) \\ = \bar{a} \varphi(b, c) + a \varphi(\bar{b}, \bar{c}) - \bar{a} \varphi(\bar{b}, \bar{c}) \\ = a \varphi(\bar{b}, \bar{c}) + \bar{a} (\varphi(b, c) - \varphi(\bar{b}, \bar{c})) \\ = a \varphi(\bar{b}, \bar{c}) + \bar{a} (bc - \bar{b}\bar{c}) \\ = a (\bar{b}c + b\bar{c} - bc) + \bar{a} (bc - \bar{b}\bar{c}) \\ = \bar{a}bc + \bar{b}ac + \bar{c}ab - (abc + \bar{a}bc) \quad (4)$$

من النتيجة (3) و (4) نستنتج أن:

$$(M(a) * M(b)) * M(c) = M(a) * (M(b) * M(c))$$

و بالتالي * قانون تجميعي في (H) .

التبادلية:

$$\varphi(a, b) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b - \bar{a}\bar{b} \\ = \bar{b}\bar{a} + \bar{b}a - \bar{b}\bar{a} \\ = \varphi(b, a)$$

إذن: $\varphi(a, b) = \varphi(b, a)$ (5)

ليكن a و b عددين حقيقيين .

لدينا: $M(a) * M(b) = M(\varphi(a, b))$

$$= M(\varphi(b, a)) \\ = M(b) * M(a)$$

و بالتالي * قانون تبادلي في (H) .

العنصر المحايد: ننطلق من الكتابة $M(a) * M(e) = M(a)$

يعني: $M(\varphi(a, e)) = M(\varphi(a, 1))$

إذن: $\varphi(a, e) = \varphi(a, 1)$. يعني: $e = 1$

يعني: $M(a) * M(1) = M(1) * M(a) = M(a)$

لأن القانون * تبادلي .

و لدينا $1^2 + \bar{1}^2 - |1|^2 = 1$ إذن $M(1) \in (H)$

إذن $M(1)$ هو العنصر المحايد للقانون * في (H)

التماثل: ليكن $M(a)$ و $M(x)$ عنصرين من (H) .

ننطلق من الكتابة: $M(a) * M(x) = M(1)$

إذن: $M(\varphi(a, x)) = M(\varphi(a, \bar{a}))$

يعني: $\varphi(a, x) = \varphi(a, \bar{a})$. أي: $x = \bar{a}$

بما أن: $M(a) \in (H)$. فإن: $a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2 = 1$

و منه: $\bar{a}^2 + a^2 - |a|^2 = 1$ يعني: $\bar{a}^2 + \bar{a}^2 - |a|^2 = 1$

إذن: $M(\bar{a}) \in (H)$

و بالتالي كل عنصر $M(a)$ من (H) يقبل مائلا $M(\bar{a})$ من (H) بالقانون *

خلاصة: $(H, *)$ زمرة تبادلية $(H, *) \text{ est un groupe abélien}$

التمرين الرابع

لدينا F جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لأن: $M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$

لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصفوفتين من F

لدينا:

$$M(a, b) - M(c, d) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c+d & -d \\ 5d & c-3d \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (a-c) - (b+d) & -b-d \\ 5(b-d) & (a-c) - 3(b+d) \end{pmatrix} \\ = M((a-c); (b-d)) \in F$$

إذن $(F, +)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +)$

ليكن $\lambda \in \mathbb{R}$ و $M(a, b) \in F$

$$\lambda M(a, b) = \lambda \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda b & -\lambda b \\ 5\lambda b & \lambda a - 3\lambda b \end{pmatrix} \\ = M(\lambda a, \lambda b) \in F$$

إذن F جزء مستقر بالنسبة للقانون الخارجي (\cdot) .

و نعلم أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

إذن الخاصيات التالية و الخاصة بـ $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ تبقى صالحة في المجموعة F

إذن الجزآن الحقيقيان لطرفي هذه المتساوية متساويان و الجزآن التخيليان متساويان كذلك . و من ثم نحصل على النمطة العجيبة (S) التالية :

$$(S) : \begin{cases} \sqrt{2}^{2007} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = x + \sqrt{2}y \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ \sqrt{2}^{2007} \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}y \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{cases}$$

لدينا : $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

و كذلك : $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$$(S) : \begin{cases} \sqrt{2}^{2007} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = x + \sqrt{2}y \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \\ \sqrt{2}^{2007} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}y \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

من المعادلة الثانية نستنتج أن : $y = -2^{1003}$
و لدينا حسب المعادلة الأولى : $x = -2^{1003} - (2^{1003} \times 2^0) = -2^{1004}$

و بالتالي : $\alpha^{2007} = (-2^{1003}) + \alpha(-2^{1004})$

بعد حصولنا على هذه الصيغة الثمينة تصبح التتمة سهلة و في المتناول .
لدينا : $J^{2007} = J \times J \times \dots \times J$

$$= \psi(\alpha) \times \psi(\alpha) \times \psi(\alpha) \times \dots \times \psi(\alpha)$$

$$= \psi(\alpha \times \alpha \times \alpha \times \dots \times \alpha)$$

$$= \psi(\alpha^{2007})$$

$$= \psi((-2^{1003}) + \alpha(-2^{1004}))$$

$$= M((-2^{1003}) ; (-2^{1004}))$$

$$= (-2^{1003})I + (-2^{1004})J$$

و بالتالي : $J^{2007} = (-2^{1003})I + (-2^{1004})J$

التمرين الخامس

ليكن x عنصرا من \mathbb{R} . لدينا : $g(x) = 1 + x - e^{-x}$
 g دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها عبارة عن مجموع من الدوال المعرفة والقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$.

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) = 1 + e^{-x} > 0$
إذن g دالة تزايدية قطعاً على \mathbb{R} .

التمرين الخامس

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x - e^{-x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x - e^{-x}) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
g	$-\infty$	0	$+\infty$

التمرين الخامس

لدينا g متصلة و تزايدية قطعاً على \mathbb{R} إذن فهي تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} (g)

$$g(\mathbb{R}) = g(]-\infty ; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[=]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$$

بما أن 0 عنصر من \mathbb{R} و g تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} .

فإنه يوجد عدد وحيد x_0 من \mathbb{R} حيث $g(x_0) = 0$.

من جهة أخرى لدينا : $g(0) = 1 + 0 - e^{-0} = 0$.

إذن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$.

التمرين الرابع

3

ليكن z و $z' = c + ad$ عددين عقديين بحيث $z = x + \alpha y$
لكي يكون ψ تشاكلاً يكفي أن يحقق : $\psi(zz') = \psi(z) \times \psi(z')$
لدينا : $\psi(x + \alpha y) \times \psi(c + ad) = M(x, y) \times M(c, d)$

$$\begin{aligned} &= (xI + yJ) \times (cI + dJ) \\ &= xcI + xdJ + ycJ + ydJ^2 \\ &= xcI + xdJ + ycJ + yd(-2(I + J)) \\ &= (xc - 2yd)I + (xd + yc - 2yd)J \\ &= M((xc - 2yd) ; (xd + yc - 2yd)) \\ &= \psi((xc - 2yd) + (xd + yc - 2yd)\alpha) \end{aligned}$$

إذن لكي يكون ψ تشاكلاً يكفي أن نتحقق :

$$\psi((xc - 2yd) + (xd + yc - 2yd)\alpha) = \psi(xc + axd + ayc + \alpha^2 yd)$$

$$(xc - 2yd) + \alpha(xd + yc - 2yd) = xc + axd + ayc + \alpha^2 yd$$

بعد ترتيب حدود هذه المتساوية نحصل على :

$$(yd)\alpha^2 + (2yd)\alpha + (2yd) = 0$$

يعني : $\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0$.

نحل هذه المعادلة الظرفية من الدرجة الثانية نجد $\alpha = -1 + i$

أو $\alpha = -1 - i$.

و أشير كذلك إلى أن كل عنصر $M(x, y)$ يوجد عدد عقدي وحيد

للفضاء المتجهي الحقيقي \mathbb{C} . و كل عدد يُكتب بكيفية وحيدة على شكل تاليفة خطية لـ 1 و α .

خلاصة : من أجل $\alpha = -1 - i$ أو $\alpha = -1 + i$ يكون ψ تشاكلاً تقابلياً من (\mathbb{C}, \times) نحو (F, \times) .

التمرين الرابع

4

نأخذ : $\alpha = -1 + i$. لدينا : $\alpha = \sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = \left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \end{aligned}$$

و منه حسب Moivre : $\alpha^{2007} = \left[\sqrt{2}^{2007}, \frac{2007 \times 3\pi}{4} \right] = \left[\sqrt{2}^{2007}, \frac{6021\pi}{4} \right]$

$$\frac{6021\pi}{4} = 2 \times 752 \times \pi + \frac{5\pi}{4}$$

$$\frac{6021\pi}{4} \equiv \frac{5\pi}{4} [2\pi] \quad \text{فإن :}$$

$$\alpha^{2007} = \left[\sqrt{2}^{2007}, \frac{5\pi}{4} \right] \quad \text{ومنه :}$$

نكتب الآن α^{2007} في الأساس $(1, \alpha)$.

ليكن x و y عددين حقيقيين حيث $\alpha^{2007} = x \cdot 1 + y \cdot \alpha$ (*)
هدفنا هو تحديد x و y .

$$\begin{aligned} x + \alpha y &= [x, 0] + \left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \times [y, 0] \\ &= [x, 0] + \left[\sqrt{2}y ; \frac{3\pi}{4} \right] \end{aligned}$$

إذن بالإستعانة بالمتساوية (*) نكتب :

$$\left[\sqrt{2}^{2007} ; \frac{5\pi}{4} \right] = [x, 0] + \left[\sqrt{2}y ; \frac{3\pi}{4} \right]$$

التمرين الخامس

I 3 ب

نعلم أن: $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! x_n \in]0, +\infty[)$; $f(x_n) = n$
 لدينا: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (n+1) > n$
 إذن: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; f(x_{n+1}) > f(x_n)$
 وذلك لأن: $f(x_{n+1}) = n+1$ و $f(x_n) = n$
 وبما أن f متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$
 فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} تناقصية كذلك.
 إذن ندخل الدالة التناقصية f^{-1} على المتفاوتة $f(x_{n+1}) > f(x_n)$
 نحصل على: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; f^{-1}(f(x_{n+1})) > f^{-1}(f(x_n))$
 يعني: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_{n+1} > x_n$
 وبالتالي $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية.
 ولدينا: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n \in]0, +\infty[$
 إذن: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n > 0$
 إذن المتتالية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ مصغرة بالعدد 0.
 وبالتالي $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة لأنها تناقصية و مصغرة.
 ونضع $l = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$

التمرين الخامس

I 3 ج

نعلم أن: $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! x_n > 0)$; $f(x_n) = n$
 إذن: $(\forall n \in \mathbb{N}), (\exists! x_n > 0)$; $\frac{1}{1+x_n - e^{-x_n}} = n$
 أي: $(\forall n \in \mathbb{N}), (\exists! x_n > 0)$; $(1+x_n - e^{-x_n}) = \frac{1}{n}$
 عندما يؤول n إلى $+\infty$ نحصل على: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n - e^{-x_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)$
 أي: $1+l - e^{-l} = 0$ يعني: $1+l = e^{-l}$
 لنبين الآن على أن $l = 0$. و من أجل ذلك نستعين بالبرهان بالخلف
 ونفترض أن $l \neq 0$. إذن: $l > 0$ أو $l < 0$
 بما أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n > 0$ فإن $l > 0$.
 ومنه $1+l > 0$ و $e^{-l} < 1$
 لدينا $1+l = e^{-l}$ إذن $0 < (1+l) < 1$
 يعني: $-1 < l < 0$ وهذا تناقض مع كون $l > 0$
 وبالتالي: $l = \lim(x_n) = 0$

التمرين الخامس

I 1 II

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x - e^{-x}} = 1$$

$$\Leftrightarrow 1+x - e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = x$$

التمرين الخامس

I 1 II

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $\varphi(x) = e^{-x} - x$
 لدينا φ دالة متصلة على \mathbb{R} لأنها فرق دالتين متصلتين على \mathbb{R} .
 إذن φ متصلة على أي مجال من \mathbb{R} وبالخصوص نختار المجال $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$
 لدينا: $\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} - \frac{1}{e}$ و: $\varphi(1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1$
 لنحدد الآن إشارة كل من $\varphi\left(\frac{1}{e}\right)$ و $\varphi(1)$
 لدينا $-1 < 0$ إذن $e^{-1} < 1$ يعني: $e^{-1} - 1 < 0$
 ومنه: $\varphi(1) < 0$ (1)
 ولدينا: $e > 1$. إذن: $\frac{1}{e} < 1$
 يعني: $e^{\frac{1}{e}} < e$. أي: $e^{\frac{1}{e}} > \frac{1}{e}$. إذن: $\varphi\left(\frac{1}{e}\right) > 0$ (2)
 من (1) و (2) نستنتج أن $\varphi\left(\frac{1}{e}\right) \times \varphi(1) < 0$
 وبالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطة: $\varphi(\alpha) = 0$; $\alpha \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[$
 أو بتعبير آخر: $e^{-\alpha} = \alpha$; $\alpha \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[$

التمرين الخامس

I 2 I

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} = -\infty$$

التمرين الخامس

I 2 ب

ليكن x عنصراً من \mathbb{R} .
 $f'(x) = \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{-(1+e^{-x})}{(1+x-e^{-x})^2}$

التمرين الأول

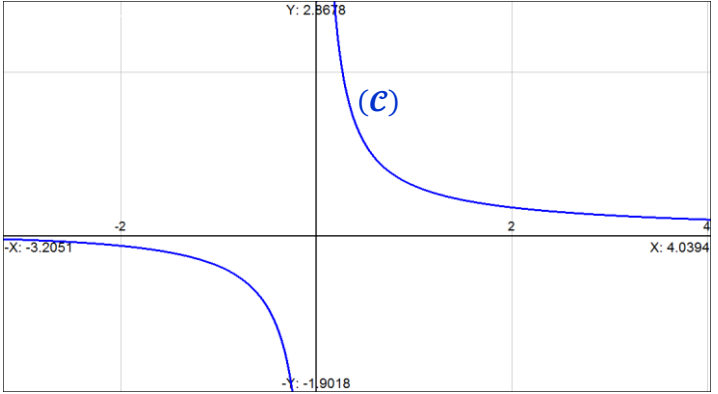
I 2 ج

لدينا: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{-(1+e^{-x})}{(1+x-e^{-x})^2}$
 ونعلم أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 1+e^{-x} > 0$
 إذن: $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) < 0$
 وهذا يعني أن الدالة f تناقصية على \mathbb{R}^*
 ونضع جدول تغيرات الدالة f كما يلي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	0	$+\infty$	0

التمرين الخامس

I 2 د



التمرين الأول

I 3 I

نعتبر الدوال العددية h_n المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي
 $h_n(x) = f(x) - n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$
 نلاحظ في البداية أن h_n متصلة على $]0, +\infty[$ لأن f متصلة على \mathbb{R}^* .
 ولدينا: $h'_n(x) = f'(x) < 0$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*_+)$
 إذن h_n تناقصية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$
 وبالتالي h_n تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو صورته $h_n(]0, +\infty[)$
 $h_n(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} h_n(x) \right[=]-n ; +\infty[$
 وبالتالي h_n تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو المجال $] -n ; +\infty[$.
 وبما أن 0 عنصر من مجموعة الوصول $] -n ; +\infty[$.
 فإنه يقبل سابقاً واحداً x_n في المجال $]0, +\infty[$ بالتقابل h_n .
 أو بتعبير أجمل: $h_n(x_n) = 0$; $\exists! x_n \in]0, +\infty[$
 يعني: $\exists! x_n \in]0, +\infty[; f(x_n) = n$ (*)

لنبين باستعمال البرهان بالترجع على صحة العبارة (P_n) التالية:

$$(P_n) : \frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$$

من أجل $n = 1$ لدينا $\frac{1}{e} \leq y_1 = 1 \leq 1$ إذن العبارة (P_1) صحيحة.

ليكن n عنصرا من \mathbb{N}^* ونفترض أن (P_n) صحيحة.

إذن: $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$ ومنه: $-1 \leq -y_n \leq \frac{-1}{e}$

أي: $e^{-1} \leq e^{-y_n} \leq e^{\frac{-1}{e}}$ إذن: $\frac{1}{e} \leq y_{n+1} \leq e^{\frac{-1}{e}}$ (3)

ولدينا كذلك $\frac{1}{e} > 0$ إذن $e^{\frac{1}{e}} > 0$ ومنه: $e^{\frac{-1}{e}} < 1$ (4)

من (3) و (4) نستنتج أن: $\frac{1}{e} \leq y_{n+1} \leq 1$ وهذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة.

وبذلك نحصل على الوضعية الترجعية التالية: $(P_1) \text{ est vraie} \implies (P_n) \implies (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

إذن حسب مبدأ التراجع: $(P_n) \text{ est toujours vraie}$

يعني: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$

سوف نستعمل في هذا السؤال مبرهنة التزايد المتناهية (TAF).

ومن أجل ذلك نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على \mathbb{R} بـ $\varphi(x) = e^{-x}$ نلاحظ أن φ متصلة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

إذن يمكن تطبيق مبرهنة التزايد المتناهية على الدالة φ في أي مجال يوجد ضمن \mathbb{R} .

نختار المجال الذي طرفاه α و y_n والذي سوف نرمز له بالرمز

$[\alpha, y_n]$ وذلك لأنه لا ندرى من الأكبر من α و y_n .

لدينا φ متصلة على $[\alpha, y_n]$ وقابلة للاشتقاق على $]\alpha, y_n[$

إذن حسب: $\exists! c \in]\alpha, y_n[; \left(\frac{\varphi(y_n) - \varphi(\alpha)}{y_n - \alpha} \right) = \varphi'(c)$

$$\implies \exists! c \in]\alpha, y_n[; \left| \frac{\varphi(y_n) - \varphi(\alpha)}{y_n - \alpha} \right| = |\varphi'(c)|$$

نعلم أن: $\begin{cases} \varphi(y_n) = e^{-y_n} = y_{n+1} \\ \varphi(\alpha) = e^{-\alpha} = \alpha \end{cases}$

إذن: $(*) \exists! c \in]\alpha, y_n[; |y_{n+1} - \alpha| = |\varphi'(c)| \cdot |y_n - \alpha|$

ونعلم أن $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ و $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$ و $\alpha < c < y_n$

إذن: $\frac{1}{e} < c < 1$

ومنه: $(5) -e^{-\frac{1}{e}} < -e^{-c} < -e^{-1}$

نعلم أن العدد الموجب يكون دائما أكبر من العدد السالب.

إذن: $(6) -e^{-1} < e^{\frac{-1}{e}}$

من (5) و (6) نستنتج أن: $-e^{-\frac{1}{e}} < -e^{-c} < e^{\frac{-1}{e}}$

يعني أن: $|\varphi'(c)| < e^{\frac{-1}{e}}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $|y_n - \alpha|$ نجد:

$$|y_n - \alpha| \cdot |\varphi'(c)| < e^{\frac{-1}{e}} |y_n - \alpha|$$

وباستعمال النتيجة (*) نكتب في الأخير:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; |y_{n+1} - \alpha| < e^{\frac{-1}{e}} |y_n - \alpha| \quad (**)$$

باستعمال النتيجة (***) نلاحظ أن: $|y_n - \alpha| < e^{\frac{-1}{e}} |y_{n-1} - \alpha|$

$$< \left(e^{\frac{-1}{e}} \right) \left(e^{\frac{-1}{e}} \right) |y_{n-2} - \alpha|$$

$$< \left(e^{\frac{-1}{e}} \right) \left(e^{\frac{-1}{e}} \right) \left(e^{\frac{-1}{e}} \right) |y_{n-3} - \alpha|$$

$$< \left(e^{\frac{-1}{e}} \right)^4 |y_{n-4} - \alpha|$$

⋮ ⋮ ⋮

$$< \left(e^{\frac{-1}{e}} \right)^{n-1} |y_{n-(n-1)} - \alpha|$$

إذن: $|y_n - \alpha| < \left(e^{\frac{-1}{e}} \right)^{n-1} |y_1 - \alpha|$

يعني: $|y_n - \alpha| = \left(e^{\frac{-1}{e}} \right)^{n-1} |1 - \alpha|$ لنحسب الآن نهاية المتتالية $\left(\left(e^{\frac{-1}{e}} \right)^{n-1} |1 - \alpha| \right)_{n \in \mathbb{N}}$

نعلم أن $\frac{1}{e} > 0$ إذن $\frac{-1}{e} < 0$ ومنه $e^{\frac{-1}{e}} < 1$.

إذن $\left(e^{\frac{-1}{e}} \right)^{n-1}$ متتالية هندسية أساسها عدد موجب وأصغر من 1.

إذن: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{-1}{e}} \right)^{n-1} = 0$ ومنه: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{-1}{e}} \right)^{n-1} |1 - \alpha| = 0$

نحصل إذن على الوضعية التالية:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; |y_n - \alpha| < \underbrace{\left(e^{\frac{-1}{e}} \right)^{n-1} |1 - \alpha|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

أو بتعبير أوضح نحصل على الوضعية التالية:

$$\underbrace{- \left(e^{\frac{-1}{e}} \right)^{n-1} |1 - \alpha|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} < (y_n - \alpha) < \underbrace{\left(e^{\frac{-1}{e}} \right)^{n-1} |1 - \alpha|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نكتب $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - \alpha) = 0$

أي: $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = \alpha$

وبالتالي $(y_n)_{n \geq 1}$ متتالية متقاربة وتؤول إلى العدد α .

ليكن $t > 0$ إذن $e^{-t} < 1$ أي $-e^{-t} > -1$

ومنه: $(t+1) - e^{-t} > (t+1) - 1$

$$\implies t+1 - e^{-t} > t$$

$$\implies \frac{1}{t+1 - e^{-t}} < \frac{1}{t}$$

$$\implies f(t) < \frac{1}{t} \quad (1)$$

ولدينا كذلك $-e^{-t} < 0$ إذن $(t+1) - e^{-t} < (t+1)$

$$\implies \frac{1}{t+1 - e^{-t}} > \frac{1}{t+1}$$

$$\implies f(t) > \frac{1}{t+1} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن: $\frac{1}{t+1} < f(t) < \frac{1}{t}$ ($\forall t > 0$)

لدينا : $(\forall t \geq 0) ; \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right) \geq e^{-t} \geq (1 - t)$

هذا التأيير صالح لأي عدد t من \mathbb{R}^* . إذن فهو صالح في أي مجال يوجد ضمن \mathbb{R}^* . ونختار المجال $]0; 4[$.

إذن نكتب : $(\forall t \in]0; 4[; \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right) \geq e^{-t} \geq (1 - t)$

يعني : $(\forall t \in]0; 4[; -(1 - t) \geq -e^{-t} \geq -\left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right)$
نضيف إلى أطراف هذا التأيير الكمية $(1 + t)$ نجد :

$$(\forall t \in]0; 4[) ; 2t \geq 1 + t - e^{-t} \geq 2t - \frac{t^2}{2}$$

يعني : $(\forall t \in]0; 4[; 2t \geq 1 + t - e^{-t} \geq \frac{4t - t^2}{2}$

و عند المرور إلى المقلوب نجد :

$$(\forall t \in]0; 4[) ; \frac{1}{2t} \leq \frac{1}{1 + t - e^{-t}} \leq \frac{2}{4t - t^2}$$

$$\Leftrightarrow (\forall t \in]0; 4[) ; \frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{2}{4t - t^2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4 - t} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4 - t + t}{4t - t^2} \right) = \frac{4}{2(4t - t^2)} = \frac{2}{4t - t^2}$$

و بالتالي : $(\forall t \in]0; 4[) ; \frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4 - t} \right)$

لدينا : $(\forall t \in]0; 4[) ; \frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4 - t} \right)$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} \left(\frac{1}{2t} \right) dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4 - t} \right) dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [\ln|t|]_x^{2x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2} [\ln|t|]_x^{2x} + \frac{1}{2} [\ln|4 - t|]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln 2}{2} \leq F(x) \leq \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4 - 2x}{4 - x} \right)$$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{4 - 2x}{4 - x} \right) = \ln \left(\frac{4 - 0}{4 - 0} \right) = \ln 1 = 0$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\left(\frac{\ln 2}{2} \right) \leq F(x) \leq \left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4 - 2x}{4 - x} \right) \right)$$

$x \rightarrow 0^+$

$x \rightarrow 0^+$

$\frac{\ln 2}{2}$

$\frac{\ln 2}{2}$

و بالتالي حسب خاصيات النهايات و التأيير نستنتج أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{\ln 2}{2} = F(0)$$

و بالتالي F دالة متصلة على يمين الصفر .

لدينا f دالة متصلة على \mathbb{R}^* .

إذن f دالة متصلة على المجال $]0; +\infty[$.

ليكن a عنصرا من المجال $]0; +\infty[$.

إذن f تقبل عدة دوال أصلية على المجال $]0; +\infty[$ وبالخصوص فهي

تقبل دالة أصلية \mathcal{T} والتي تنعدم في a و تحقق :

$$\begin{cases} \mathcal{T}(a) = 0 \\ \mathcal{T}'(x) = f(x) \end{cases}$$

و

$$\mathcal{T} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

لدينا : $(\forall t > 0) ; \frac{1}{t+1} < f(t) < \frac{1}{t}$

نلاحظ أن طرفي هذا التأيير عبارة عن دالتين متصلتين على $]0, +\infty[$.
و لدينا : $x < 2x$. إذن بعد إدخال التكامل $\int_x^{2x} dt$ على هذه المتفاوتة

$$\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t+1} \right) dt < \int_x^{2x} f(t) dt < \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} \right) dt$$

إذن : $[\ln|1+t|]_x^{2x} < F(x) < [\ln|t|]_x^{2x}$

نأخذ $x > 0$ و $t > 0$ نجد :

$$\ln(1+2x) - \ln(1+x) < F(x) < \ln(2x) - \ln x$$

$$\ln \left(\frac{1+2x}{1+x} \right) < F(x) < \ln 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1+2x}{1+x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{1}{x} + 1} \right) = \ln 2$$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall x > 0) ; \ln \left(\frac{1+2x}{1+x} \right) < F(x) < \ln 2$$

$\ln 2$

$\ln 2$

و بالتالي حسب خاصيات النهايات و التأيير نجد : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ln 2$

تذكير : إذا كانت f و g دالتين معرفتين على $[a, b]$ بحيث f و g متصلتين على $[a, b]$ و قابلتين للاشتقاق على $]a, b[$.

$$\begin{cases} \forall t \in [a, b] ; f'(t) \geq g'(t) \\ f(a) = g(a) \end{cases}$$

فإن : $\forall t \in [a, b] ; f(t) \geq g(t)$

ليكن t عددا حقيقيا موجبا و نعتبر الدوال العددية φ و ψ و h المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \varphi(t) = 1 - t \\ \psi(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} \\ h(t) = e^{-t} \end{cases}$$

لدينا φ و ψ و h كلها دوال متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

$$\begin{cases} \varphi'(t) = -1 \\ \psi'(t) = t - 1 \\ h'(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

لدينا $t \geq 0$ إذن $-t \leq 0$.

و منه $-e^{-t} \leq -1$ يعني $h'(t) \leq \varphi'(t)$.

و بما أن : $h(0) = \varphi(0) = 1$

فإن : $(\forall t \in [0, +\infty[) ; h(t) \leq \varphi(t)$

يعني : (1) $e^{-t} \leq 1 - t$ $(\forall t \in [0, +\infty[)$

و بنفس الطريقة لدينا : $-e^{-t} \geq t - 1$. إذن : $h'(t) \geq \psi'(t)$

و بما أن : $h(0) = \psi(0) = 1$ فإنه حسب الخاصية المذكورة :

$$(\forall t \in [0, +\infty[) ; h(t) \geq \psi(t)$$

يعني : (2) $(\forall t \in [0, +\infty[) ; e^{-t} \geq 1 - t + \frac{t^2}{2}$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall t \geq 0) ; \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right) \geq e^{-t} \geq (1 - t)$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعريف الدالة F نكتب :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{2x} f(t) dt = \int_x^a f(t) dt + \int_a^{2x} f(t) dt \\ &= \int_a^{2x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \mathcal{T}(2x) - \mathcal{T}(x) \end{aligned}$$

نحصل إذن على العلاقة التالية : $F(x) = \mathcal{T}(2x) - \mathcal{T}(x)$; $(\forall x > 0)$

و بما أن : $x \rightarrow 2x$ و $x \rightarrow \mathcal{T}(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق على

\mathbb{R}_+^* فإن الدالة $x \rightarrow \mathcal{T}(2x) - \mathcal{T}(x)$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* .

و لدينا : $F'(x) = 2\mathcal{T}'(2x) - \mathcal{T}'(x)$

$$= 2f(2x) - f(x)$$

$$= \frac{2}{g(2x)} - \frac{1}{g(x)}$$

$$= \frac{2g(x) - g(2x)}{g(2x) \times g(x)}$$

$$= \frac{2(1+x-e^{-x}) - (1+2x-e^{-2x})}{g(2x) \times g(x)}$$

$$= \frac{(e^{2x} - 2e^x + 1)}{e^{2x}g(2x)g(x)}$$

$$= \frac{(e^x - 1)^2}{e^{2x}g(2x)g(x)}$$

التمرين الخامس

III 3 ب

$$\begin{cases} g(2x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ e^{2x} > 0 \\ (e^x - 1)^2 > 0 \end{cases} \text{ نعلم أنه إذا كان } x \text{ عنصرا من } \mathbb{R}_+^* \text{ فإن :}$$

إذن : $F'(x) > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ و بالتالي F تزايدية قطعا على \mathbb{R}_+^* .

أجوبة امتحان الدورة العادية 2008

التمرين الأول

1

نلاحظ أن E جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لأن $M(0,0) \in E$.
ليكن γ و β عددين حقيقيين و $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E

$$\gamma M(a,b) + \beta M(c,d) = \gamma \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c & \sqrt{3}d \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma a + \beta c & \sqrt{3}(\gamma b + \beta d) \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}(\gamma b + \beta d) & \gamma a + \beta c \end{pmatrix}$$

إذن: $(\forall (\gamma, \beta) \in \mathbb{R}^2) ; \gamma M(a,b) + \beta M(c,d) \in E$; $(\forall M(\gamma, \beta), M(c,d) \in E)$

إذن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

التمرين الأول

1

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من المجموعة E .

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= aI + bJ$$

إذن كل مصفوفة من E تُكتب على شكل تآلفية خطية للمصفوفتين I و J .

وهذا يعني أن الأسرة (I, J) تُؤدِّد الفضاء المتجهي الحقيقي $(E, +, \cdot)$.

لنبين الآن أن (I, J) أسرة حرة.

$$\alpha I + \beta J = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{3}\beta \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

إذن (I, J) أسرة حرة (أو مستقلة خطياً).

وبالتالي (I, J) أساس الفضاء المتجهي الحقيقي $(E, +, \cdot)$.

التمرين الأول

2

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من الفضاء المتجهي E .

$$M(a,b) \times M(c,d) = (aI + bJ) \times (cI + dJ)$$

$$= acI + adJ + bcJ + bdJ^2$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$M(a,b) \times M(c,d) = (ac - bd)I + (ad + bc)J$$

$$= M(ac - bd ; ad + bc) \in E$$

إذن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

التمرين الأول

2

ليكن $(a+ib)$ و $(c+id)$ عددين عقديين غير منعدمين.

$$f((a+ib) \times (c+id)) = f((ac - bd) + i(ad + bc))$$

$$= M(ac - bd ; ad + bc)$$

$$= M(a,b) \times M(c,d)$$

$$= f(a+ib) \times f(c+id)$$

إذن f تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (E^*, \times) .

لنبين الآن أن f تقابل.

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E^* .

نريد الآن حل المعادلة التالية: $f(x+iy) = M(a,b)$

$$\Leftrightarrow M(x,y) = M(a,b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & \sqrt{3}y \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

إذن المعادلة $f(x+iy) = M(a,b)$ تقبل حلاً وحيداً في \mathbb{C}^* .

إذن f تقابل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (E^*, \times) .

خلاصة: f تشاكل تقابلي من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (E^*, \times) .

التمرين الأول

3

نعلم أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي. إذن زمرة تبادلية $(E, +)$ ولدينا كذلك (\mathbb{C}^*, \times) زمرة تبادلية.

إذن (E^*, \times) زمرة تبادلية لأن f تشاكل تقابلي.

بما أن الضرب \times توزيعي بالنسبة للجمع في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

وبما أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

فإن \times توزيعي بالنسبة للجمع في E (3).

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي.

التمرين الأول

4

لنحل في E المعادلة $J \times X^3 = I$

$$\Leftrightarrow -J \times J \times X^3 = -J$$

$$\Leftrightarrow -J^2 \times X^3 = -J$$

$$\Leftrightarrow X^3 = -J$$

$$\Leftrightarrow [M(a,b)]^3 = M(0,-1)$$

$$\Leftrightarrow [f(a+ib)]^3 = f(-i)$$

$$\Leftrightarrow f((a+ib)^3) = f(-i)$$

$$\Leftrightarrow (a+ib)^3 = -i$$

لنحل إذن في \mathbb{C} المعادلة $z^3 = -i$

من أجل ذلك نضع $z = re^{i\theta}$ إذن $r^3 e^{3i\theta} = e^{-\frac{i\pi}{2}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{-\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} ; k \in \{0; 1; 2\} \end{cases}$$

إذا كان $k = 0$ فإن $z_0 = e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

إذن المصفوفة $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{-1}{2}\right)$ حل للمعادلة الأولى في E

إذا كان $k = 1$ فإن $z_1 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

إذن المصفوفة $M(0,1)$ حل للمعادلة الأولى في E

إذا كان $k = 2$ فإن $z_2 = e^{\frac{7i\pi}{6}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

إذن المصفوفة $M\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{-1}{2}\right)$ حل للمعادلة الأولى في E

خلاصة: مجموعة حلول المعادلة $J \times X^3 = I$ تُكتب على الشكل:

$$S = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I - \frac{1}{2}J \right) ; J ; \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}I - \frac{1}{2}J \right) \right\}$$

التمرين الثاني

1

نعتبر المعادلة التالية: $(G) : iz^2 + (a + \bar{a} - i)z - \bar{a} - ia\bar{a}$

لدينا: $\Delta = (a + \bar{a} - i)^2 + 4i(\bar{a} + ia\bar{a})$

$$= a^2 + \bar{a}^2 - 1 + 2a\bar{a} - 2\bar{a}i - 2ai + 4i\bar{a} - 4a\bar{a}$$

$$= a^2 + \bar{a}^2 - 1 - 2a\bar{a} + 2\bar{a}a - 2ai$$

$$= (a - \bar{a} - i)^2$$

التمرين الثاني

1

لدينا: $\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$. إذن المعادلة G تقبل حلين:

$$z_1 = \frac{(i - a - \bar{a}) - (a - \bar{a} - i)}{2i} = 1 + ai$$

$$z_2 = \frac{(i - a - \bar{a}) + (a - \bar{a} - i)}{2i} = \bar{a}i$$

إذن مجموعة حلول المعادلة G هي: $S_a = \{1 + ai ; \bar{a}i\}$

لدينا المعادلة G تقبل الحلين $1 + ai$ و $\bar{a}i$.
 إذا كان a حلا للمعادلة (G) فهذا يعني أن: $a = \bar{a}i$ أو $a = 1 + ai$
 في حالة $a = \bar{a}i$ لدينا: $Re(a) + iIm(a) = i(Re(a) + iIm(a))$
 $= Im(a) + iRe(a)$

إذن: $Re(a) = Im(a)$
 وفي حالة $a = 1 + ai$ فإن: $Re(a) + iIm(a) = 1 + i(Re(a) + iIm(a))$
 $= 1 + i(Re(a) + iIm(a))$

$$\Leftrightarrow Re(a) + iIm(a) = (1 - Im(a)) + i(Re(a))$$

يعني: $\begin{cases} Re(a) = 1 - Im(a) \\ Im(a) = Re(a) \end{cases}$ أي: $Re(a) = Im(a)$

إذن في كلتا الحالتين نحصل على: $Re(a) = Im(a)$

عكسيا: ليكن a عددا عقديا مكتوبا على شكل $a = r + ri$

لدينا: $\bar{a}i = (r - ri)i = ri + r = a$

إذن a حل للمعادلة (G) لأنه مكتوب على شكل $\bar{a}i$.
 وبالتالي: $a \Leftrightarrow Im(a) = Re(a)$ حل لـ (G)

$$\bar{z} = \frac{\overline{(1 + ai) - a}}{i\bar{a} - a} = \frac{(1 - \bar{a}i) - \bar{a}}{-ia - \bar{a}}$$

$$= \frac{1 - i\bar{a} - \bar{a}}{-ia - \bar{a}} = \frac{1 - \bar{a}(i + 1)}{-ia - \bar{a}}$$

نضرب البسط والمقام في العدد العقدي $(-i)$ نجد:

نتطرق من كون $A(a)$ و $B(ia)$ و $C(1 + ai)$ نقط مستقيمة.

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(1 + ai) - a}{i\bar{a} - a} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{(1 + ai) - a}}{i\bar{a} - a} = \frac{(1 + ai) - a}{i\bar{a} - a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \bar{a}i) - \bar{a}}{-ia - \bar{a}} = \frac{(1 + ai) - a}{i\bar{a} - a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \bar{a}i) - \bar{a}}{-ia - \bar{a}} = \frac{(i - a) - ai}{-\bar{a} - ai}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \bar{a}i) - \bar{a} = (i - a) - ai$$

$$\Leftrightarrow i(a - \bar{a}) + (a - \bar{a}) = (i - 1)$$

$$\Leftrightarrow (a - \bar{a}) = \frac{i - 1}{i + i}$$

$$\Leftrightarrow (2Im(a))i = \frac{-2i}{-2} = i$$

$$\Leftrightarrow Im(a) = \frac{1}{2}$$

نتطرق من الكتابة $R_1(B) = B'$

$$\Leftrightarrow (z_{B'} - z_A) = e^{-\frac{i\pi}{2}}(z_B - z_A)$$

$$\Leftrightarrow (b' - a) = -i(i\bar{a} - a)$$

$$\Leftrightarrow b' = \bar{a} + ia + a$$

بنفس الطريقة نتطرق من الكتابة: $R_2(C) = C'$

$$\Leftrightarrow (z_{C'} - z_A) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_C - z_A)$$

$$\Leftrightarrow (c' - a) = i(1 + ai - a)$$

$$\Leftrightarrow c' = i(1 - a)$$

لدينا E هي منتصف القطعة $[BC]$.

$$z_E = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{i\bar{a} + ai + 1}{2} \quad \text{إذن:}$$

$$\frac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A} = \frac{i(1 - a) - (\bar{a} + ia + a)}{\frac{i\bar{a} + ai + 1}{2} - a} \quad \text{إذن:}$$

$$= 2 \left(\frac{i - 2ai - \bar{a} - a}{i\bar{a} + ai + 1 - 2a} \right)$$

$$= 2i \left(\frac{1 - 2a + \bar{a}i + ai}{i\bar{a} + ai + 1 - 2a} \right) = 2i$$

$$\text{(\#)} \quad \frac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A} = 2i \quad \text{إذن:}$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \overline{(AE, B'C')} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow (AE) \perp (B'C')$$

ولدينا كذلك حسب النتيجة (\#): $\left| \frac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A} \right| = 2$

إذن: $|z_{C'} - z_{B'}| = 2|z_E - z_A|$ يعني: $B'C' = 2AE$

لدينا: $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$

إذن حسب مبرهنة Bezout نكتب: $35 \wedge 96 = 1$

ليكن (u, v) الحل العام للمعادلة (E).

$$\begin{cases} 35u - 96v = 1 \\ 35 \times 11 - 96 \times 4 = 1 \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

نجز عملية الفرق بين المتساويتين فنحصل على:

$$35(u - 11) = 96(v - 4) \quad (\otimes)$$

إذن العدد 35 يقسم الجداء $96(v - 4)$

و بما أن $35 \wedge 96 = 1$

فإنه حسب مبرهنة Gauss نستنتج أن 35 يقسم $(v - 4)$.

إذن: $v = 35k + 4$; $(\exists k \in \mathbb{Z})$

نعوض v بقيمته في المتساوية \otimes نحصل على:

$$35(u - 11) = 96 \times 35k$$

إذن $u = 96k + 11$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) تُكتب على الشكل:

$$S = \{ (96k + 11 ; 35k + 4) ; k \in \mathbb{Z} \}$$

لدينا 2 و 3 و 5 و 7 هي الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من 97

و نلاحظ أنه لا أحد من هذه الأعداد يقسم العدد 97 عدد أولي.

ليكن $x \wedge 97 = d$ إذن يقسم العدد 97.

و بما أن 97 عدد أولي فإنه يمتلك قاسمين صحيحين طبيعيين فقط

وهما 1 و 97. إذن $d = 1$ أو $d = 97$.

إذا افترضنا أن $d = 97$ فسوف نحصل على $x \equiv 0 [97]$.

ومنه $x^{35} \equiv 0 [97]$. وهذا يعني أن x ليس حلا للمعادلة F .

وهذا يتناقض مع المعطيات الصريحة للتمرين.

إذن $d = 1$ ومنه $x \wedge 97 = 1$.

لدينا $x \wedge 97 = 1$ و 97 عدد أولي.

إذن حسب مبرهنة (Fermat): $x^{97-1} \equiv 1 [97]$

أي: $x^{96} \equiv 1 [97]$.

التمرين الرابع

1 I ج

لدينا f متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $[0; +\infty[$.
 إذن f متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $]0,1[$.
 ومنه f تقابل من المجال $]0,1[$ نحو صورته $]-1; 2 - \frac{1}{e}[$.
 نلاحظ أن $2 - \frac{1}{e} \approx 1,6$ إذن $2 - \frac{1}{e} \in]-1; 2 - \frac{1}{e}[$
 وبالتالي فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً في المجال $]0,1[$ بالتقابل f .
 أو بتعبير أجملي: $\exists! \alpha \in]0,1[; f(\alpha) = 0$

التمرين الرابع

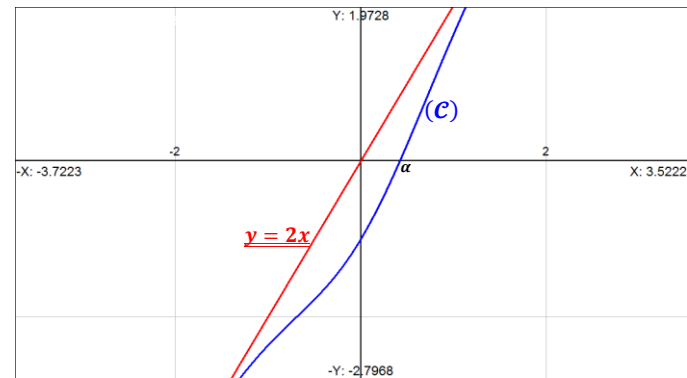
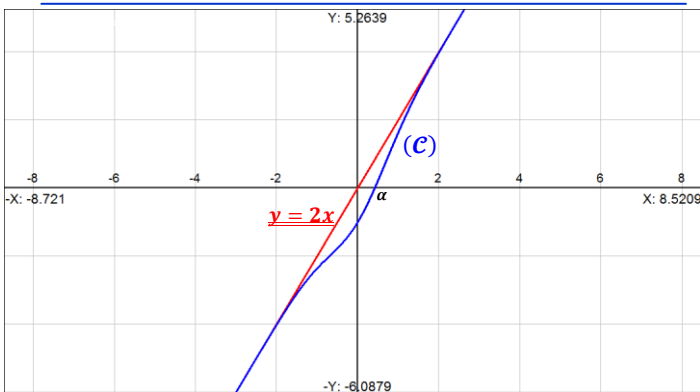
1 I د

لدينا $f(\alpha) = 0$ و $0 < \alpha < 1$.
 إذا كان $0 < x < \alpha$ فإن $f(x) < f(\alpha)$ لأن f تزايدية.
 ومنه $f(x) < 0$ على المجال $]0, \alpha[$.
 إذا كان $\alpha < x < 1$ فإن $f(x) > f(\alpha)$ لأن f تزايدية على $] \alpha, 1[$.
 ومنه $f(x) > 0$ على المجال $] \alpha, 1[$.
 وبالتالي f موجبة قطعاً على المجال $] \alpha, 1[$ و f سالبة قطعاً على المجال $]0, \alpha[$ و f تنعدم في α .

x	0	α	1
$f(x)$	-1	0	$2 - \frac{1}{e}$

التمرين الرابع

1 I د



التمرين الرابع

1 II أ

لدينا $t \mapsto e^{-t^2}$ دالة متصلة على \mathbb{R} و بالخصوص على $[0, x]$.
 إذن فهذه الدالة تقبل دالة أصلية h معرفة على \mathbb{R} وتحقق $h'(x) = e^{-x^2}$
 لدينا h دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على $[0, x]$. إذن حسب مبرهنة
 التزايديات المنتهية نكتب:
 $\exists c \in]0, x[; \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(c)$
 $\Leftrightarrow \exists c \in]0, x[; \frac{1}{x}(h(x) - h(0)) = e^{-c^2}$
 $\Leftrightarrow \exists c \in]0, x[; \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-c^2}$

التمرين الثالث

1 II ج

لدينا $x^{35} \equiv 2 [97]$ لأن x حل للمعادلة (F).
 إذن: $(x^{35})^{11} \equiv 2^{11} [97]$. يعني: $x^{35 \times 11} \equiv 2^{11} [97]$.
 ونعلم أن: $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$. إذن: $35 \times 11 = 1 + 96 \times 4$.
 ومنه: $x^{1+96 \times 4} \equiv 2^{11} [97]$ (1)
 من جهة أخرى لدينا: $x^{96} \equiv 1 [97]$
 إذن: $(x^{96})^4 \equiv 1^4 [97]$ يعني: $x^{96 \times 4} \equiv 1 [97]$
 نضرب طرفي هذه المتوافقة في العدد x نجد: $x^{1+96 \times 4} \equiv x [97]$ (2)
 من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن: $x \equiv 2^{11} [97]$

التمرين الثالث

2 II

عكسيا نفترض أن $x \equiv 2^{11} [97]$. إذن: $x^{35} \equiv 2^{11 \times 35} [97]$.
 يعني: $x^{35} \equiv 2^{96 \times 4 + 1} [97]$. أي: $x^{35} \equiv 2^{96 \times 4} \times 2 [97]$ (3)
 من جهة أخرى لدينا 97 و 2 عدنان أوليان.
 إذن حسب (Fmat) نكتب: $2^{96} \equiv 1 [97]$
 ومنه: $2^{96 \times 4} \equiv 1 [97]$ أي: $2^{96 \times 4} \times 2 \equiv 2 [97]$ (4)
 من المتوافتين (3) و (4) نستنتج أن: $x^{35} \equiv 2 [97]$
 وبالتالي x حل للمعادلة (F).

التمرين الثالث

3 II

في الأسئلة السابقة تمكنا من إثبات التكافؤ التالي:
 $x^{35} \equiv 2 [97] \Leftrightarrow x \equiv 2^{11} [97]$
 بعد ذلك نستعين بالآلة الحاسبة للحصول على: $2^{11} = 2048$
 ننجز القسمة الأقليدية للعدد 2048 على العدد 97 نحصل على:

$$\begin{array}{r} 2048 \quad | \quad 97 \\ \underline{194} \quad | \quad 21 \\ 108 \\ \underline{97} \\ \hline 11 \end{array}$$

إذن: $2^{11} \equiv 11 [97]$ و بالتالي: $x \equiv 11 [97]$
 أي: $x = 97k + 11$ ($\exists k \in \mathbb{Z}$)
 مجموعة حلول المعادلة (F) تُكتب على شكل:

$$S = \{ 97k + 11 ; k \in \mathbb{Z} \}$$

التمرين الرابع

1 I أ

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - e^{-x^2} - 2x) = 0$
 إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

التمرين الرابع

1 I ب

ليكن x عنصراً من \mathbb{R}^+ .
 لدينا: $f'(x) = 2 + 2x e^{-x^2} > 0$
 إذن f دالة تزايدية قطعاً على \mathbb{R}^+ .
 ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - e^{-x^2}) = +\infty$
 نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	-1	$+\infty$

التمرين الرابع

ب 3 II

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x \underbrace{1}_{u(t)} \cdot \underbrace{e^{-t^2}}_{v(t)} dt ; x > 0 \text{ لدينا :} \\ &= \frac{1}{x} ([uv] - \int uv') \\ &= \frac{1}{x} \left([t e^{-t^2}]_0^x + 2 \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \right) \\ &= e^{-x^2} + \frac{2}{x} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

التمرين الرابع

ج 3 II

$$\begin{aligned} M'(x) = x^2 e^{-x^2} \text{ : إذن } M(x) &= \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \text{ : نضع} \\ \varphi(x) &= e^{-x^2} + \frac{2M(x)}{x} \text{ : لدينا} \\ \varphi'(x) &= -2x e^{-x^2} + \frac{2x^3 e^{-x^2} - 2M(x)}{x^2} \text{ : إذن} \\ &= -2x e^{-x^2} + 2x e^{-x^2} - \frac{2}{x^2} M(x) \\ &= \frac{-2}{x^2} M(x) = \frac{-2}{x^2} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \varphi'(x) = \frac{-2}{x^2} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \text{ : وبالتالي}$$

التمرين الرابع

د 3 II

انطلاقاً من تعبير الدالة $\varphi'(x)$ نستنتج أن : $(\forall x > 0) ; \varphi'(x) < 0$
 إذن φ دالة تناقصية على \mathbb{R}_+^*
 وبالخصوص φ دالة متصلة و تناقصية على $[0,1]$
 ليكن $x \in [0,1]$ إذن $\varphi(x) \in [\varphi(0); \varphi(1)]$
 يعني : $\varphi(x) \in [0,1]$ ومنه : $1 \geq \varphi(x) \geq \int_0^1 e^{-t^2} dt > 0$
 وبذلك نحصل على الاستلزام التالي : $\varphi(x) \in [0,1] \Rightarrow x \in [0,1]$
 وهذا يعني أن : $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$

التمرين الرابع

أ 4 II

$$\begin{aligned} -t^2 \leq 0 &\Leftrightarrow e^{-t^2} \leq 1 \Leftrightarrow t^2 e^{-t^2} \leq t^2 \\ &\Leftrightarrow \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \int_0^x t^2 dt \\ &\Leftrightarrow \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

التمرين الرابع

ب 4 II

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt &\leq \frac{x^3}{3} \\ \Rightarrow 0 &\leq \left| \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \right| \leq \frac{x^3}{3} \\ \Rightarrow \left| \frac{2}{x^2} \cdot \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \right| &\leq \left| \frac{2}{x^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{3} \right| \\ \Rightarrow |\varphi'(x)| &\leq \frac{2}{3} |x| \end{aligned}$$

وبما أن $0 < x < 1$ فإن $|x| < 1$
 وبالتالي : $\forall x \in]0,1[; |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3}$

التمرين الرابع

ب 1 II

لدينا $0 < c < x$ إذن $-x^2 < -c^2 < 0$
 ومنه : $e^{-x^2} < e^{-c^2} < 1$
 باستعمال نتيجة السؤال (1) أ) نحصل على :
 $(\forall x > 0) ; \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt < 1$
 ومن أجل $x = 1$ نجد : $\int_0^1 e^{-t^2} dt < 1$

التمرين الرابع

أ 2 II

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha f(t) dt &= \int_0^\alpha (2t - e^{-t^2}) dt \text{ لدينا :} \\ &= 2 \int_0^\alpha t dt - \int_0^\alpha e^{-t^2} dt \\ &= \frac{2\alpha^2}{2} - \int_0^\alpha e^{-t^2} dt \\ &= \alpha^2 - \int_0^\alpha e^{-t^2} dt = g(\alpha) \end{aligned}$$

التمرين الرابع

ب 2 II

لدينا h قابلة للاشتقاق على $[0, x]$ لأنها فرق دالتين قابلتين للاشتقاق
 وهما h و $x \rightarrow x^2$. ولدينا : $g(x) = x^2 - h(x)$
 إذن : $g'(x) = 2x - h'(x) = 2x - e^{-x^2} = f(x)$

التمرين الرابع

ج 2 II

لدينا f موجبة على المجال $]\alpha, 1[$.
 إذن : $(\forall x \in]\alpha, 1[) ; g'(x) = f(x) > 0$
 يعني أن الدالة g متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $]\alpha, 1[$.
 ومنه : g تقابل من المجال $]\alpha, 1[$ نحو المجال $]g(\alpha); g(1)[$.
 ولدينا كذلك f سالبة قطعاً على المجال $[0, \alpha]$.
 إذن : $(\forall x \in [0, \alpha]) ; g'(x) = f(x) \leq 0$
 أي أن الدالة g تناقصية على المجال $[0, \alpha]$.
 وبما أن $\alpha > 0$ فإن $g(\alpha) < g(0)$. أي : $g(\alpha) < 0$ (1)
 من السؤال (II) ب) نستنتج أن : $1 - \int_0^1 e^{-t^2} dt > 0$
 إذن : $g(1) > 0$ (2)
 ومن (1) و (2) نستنتج أن : $g(\alpha) \cdot g(1) < 0$
 أي أن : $0 \in]g(\alpha); g(1)[$
 إذن 0 يمتلك سابقاً واحداً β في المجال $]\alpha, 1[$ بالتقابل f
 أو بتعبير أدق نكتب : $(\exists! \beta \in]\alpha, 1[) ; f(\beta) = 0$

التمرين الرابع

أ 3 II

$$\begin{aligned} 0 < c < x &\Rightarrow e^{-x^2} < e^{-c^2} < 1 \\ &\Rightarrow e^{-x^2} < \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt < 1 ; x > 0 \\ &\Rightarrow e^{-x^2} < \varphi(x) < 1 ; x > 0 \end{aligned}$$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x^2}) = 1$ إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$(e^{-x^2}) < \varphi(x) < 1$$

بالتالي حسب خاصيات النهايات و التأطير نستنتج أن :
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 1 = \varphi(0)$
 إذن φ دالة متصلة على اليمين في الصفر .

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq (u_n - \beta) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

و بما أن $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها عدد موجب و أصغر من 1 .

فإن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; -\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq (u_n - \beta) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \beta) = 0$

أي : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \beta$

و بالتالي $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى β .

$$\varphi(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = x ; x > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x e^{-t^2} dt = x^2 ; x > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \int_0^x e^{-t^2} dt = 0 ; x > 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 0 ; x > 0$$

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $0 \leq u_n \leq 1$: (P_n)

من أجل $n = 0$ لدينا $0 \leq u_n \leq 1$.

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عنصرا من \mathbb{N} و نفترض أن $0 \leq u_n \leq 1$.

إذن : $u_n \in [0,1]$ و منه : $\varphi(u_n) \in [0,1]$

و ذلك لأن : $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$.

إذن : $0 \leq u_{n+1} = \varphi(u_n) \leq 1$.

و هذا يعني أن العبارة (P_n) صحيحة .

و نحصل بذلك على الوضعية الترجعية التالية : $(P_0) \text{ est vraie}$ —

$$\left\{ \begin{array}{l} (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

و منه حسب مبدأ التراجع نستنتج أن (P_n) دائما صحيحة .

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$.

لدينا حسب نتائج الأسئلة السابقة .

φ دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* .

إذن نستطيع تطبيق مبرهنة التزايد المتناهية TAF على الدالة φ

في أي مجال يوجد ضمن \mathbb{R}_+^* .

لدينا $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ و $\beta \in \mathbb{R}_+^*$

نختار إذن المجال الذي طرفاه u_n و β .

إذن حسب TAF يوجد عدد حقيقي λ محصور بين β و u_n و يحقق :

$$\frac{\varphi(u_n) - \varphi(\beta)}{u_n - \beta} = \varphi'(\lambda)$$

$$\left| \frac{\varphi(u_n) - \varphi(\beta)}{u_n - \beta} \right| = |\varphi'(\lambda)| \quad \text{و منه :}$$

$$|\varphi(u_n) - \varphi(\beta)| = |\varphi'(\lambda)| \cdot |u_n - \beta|$$

بما أن $g(\beta) = 0$ فإنه حسب (II 4ج) نستنتج أن : $\varphi(\beta) = \beta$

و لدينا كذلك حسب (II 4ب) : $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3}$; $\forall x \in]0,1[$

إذن : $|\varphi'(\lambda)| \leq \frac{2}{3}$ لأن $\lambda \in]0,1[$

$$|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{2}{3} |u_n - \beta| \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{أي : } |u_{n+1} - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

و نحصل بذلك على الوضعية الترجعية التالية : $(P_0) \text{ est vraie}$ —

$$\left\{ \begin{array}{l} (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

إذن حسب مبدأ التراجع : $(P_n) \text{ est toujours vraie}$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$F : M \rightarrow M' \\ z \rightarrow z' = 2 e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)} (z_1 - i) \quad \text{لدينا:}$$

$$F(M) = M \Leftrightarrow z \left(2 e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)} - 1 \right) = 2i e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)} - i \\ \Leftrightarrow z = 2 e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)} (z - i) + i \\ \Leftrightarrow z \left(2 e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)} - 1 \right) = i \left(2 e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)} - 1 \right) \\ \Leftrightarrow z = i \\ \Leftrightarrow M \equiv \Omega$$

$$F(A) = B \Leftrightarrow (z_B - i) = 2 e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)} (z_A - i) \\ \Leftrightarrow b = 2 e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)} (a - i) + i \\ \Leftrightarrow b = 2 \left(\frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (a - i) + i \\ \Leftrightarrow b = (1 + i\sqrt{3}) (i - a) + i \\ \Leftrightarrow b = i - a - \sqrt{3} - a\sqrt{3}i + i \\ \Leftrightarrow b = -(a + \sqrt{3}) + i(2 - a\sqrt{3})$$

$$F(B) = C \Leftrightarrow c = 2 e^{\frac{4i\pi}{3}} (b - i) + i \\ \Leftrightarrow c = (1 + i\sqrt{3})(i - b) + i \\ \Leftrightarrow c = (1 + i\sqrt{3})(i - (a + \sqrt{3}) - i(2 - a\sqrt{3})) + i \\ \Leftrightarrow c = 2i + (a + \sqrt{3}) - i(2 - a\sqrt{3}) - \sqrt{3} + \\ + i\sqrt{3}(a + \sqrt{3}) + \sqrt{3}(2 - a\sqrt{3}) \\ \Leftrightarrow c = 2(\sqrt{3} - a) + i(2a\sqrt{3} + 3)$$

$$F(C) = D \Leftrightarrow z_D = 2 e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)} (z_C - i) + i \\ \Leftrightarrow d = 2 e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)} (c - i) + i \\ \Leftrightarrow d = (1 + i\sqrt{3})(i - c) + i \\ \Leftrightarrow d = (1 + i\sqrt{3})(i - 2(\sqrt{3} - a) - i(2a\sqrt{3} + 3)) + i \\ \Leftrightarrow d = 8a - 7i$$

$$\frac{z_\Omega - z_A}{z_D - z_A} = \frac{i - a}{d - a} = \frac{i - a}{8a - 7i - a} = \frac{-1}{7} \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow (z_\Omega - z_A) = \frac{-1}{7} (z_D - z_A) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} = \frac{-1}{7} \overrightarrow{AD} \\ \Leftrightarrow A \text{ et } \Omega \text{ et } D \text{ sont colinéaires}$$

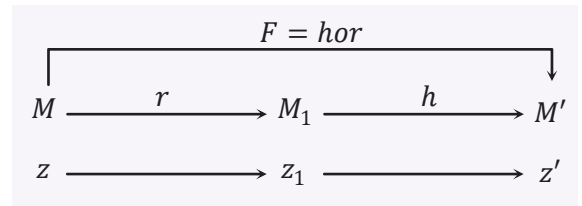
$$\frac{4z_B + 2z_C + z_D}{7} = \frac{7i}{7} = z_\Omega \\ \Rightarrow \Omega = \text{Barycentre}\{(B, 4); (C, 2); (D, 1)\}$$

$$r(M) = M_1 \Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) \\ \Leftrightarrow z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} \cdot z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i - \frac{1}{2} i \right) \\ \Leftrightarrow z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} \cdot z + i - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) \\ \Leftrightarrow z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} \cdot z + e^{\frac{i\pi}{2}} \\ \Leftrightarrow z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} \cdot z + e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{\frac{5\pi i}{6}} \\ \Leftrightarrow z_1 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}} \cdot z - e^{\frac{5\pi i}{6}} \right) + e^{\frac{i\pi}{2}} \\ \Leftrightarrow z_1 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}} \cdot z - e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot e^{\frac{5\pi i}{6}} \right) + e^{\frac{i\pi}{2}} \\ \Leftrightarrow \left(z_1 - e^{\frac{i\pi}{2}} \right) = e^{\frac{i\pi}{3}} \left(z - e^{\frac{i\pi}{2}} \right) \\ \Leftrightarrow (z_1 - i) = e^{\frac{i\pi}{3}} (z - i) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{VM_1} = e^{\frac{i\pi}{3}} \cdot \overrightarrow{VM}$$

و بالتالي r دوران مركزه $V(i)$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

$$h(M) = M_1 \Leftrightarrow z_2 = -2z + 3i \quad \text{بنفس الطريقة لدينا:} \\ \Leftrightarrow z_2 = -2z + 2i + i \\ \Leftrightarrow z_2 = -2(z - i) + i \\ \Leftrightarrow (z_2 - i) = -2(z - i) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{VM_2} = -2 \overrightarrow{VM}$$

و بالتالي h تحاكي مركزه $V(i)$ ونسبته -2 .



$$r(M) = M_1 \Leftrightarrow (z_1 - i) = e^{\frac{i\pi}{3}} (z - i) \\ \Leftrightarrow z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} (z - i) + i \quad (1)$$

$$h(z_1) = z' \Leftrightarrow (z' - i) = -2(z_1 - i) \\ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (z' - i) = -2 e^{\frac{i\pi}{3}} (z_1 - i) \\ \Leftrightarrow (z' - i) = -2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) (z_1 - i) \\ \Leftrightarrow (z' - i) = 2 \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \right) (z_1 - i) \\ \Leftrightarrow (z' - i) = 2 \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) (z_1 - i) \\ \Leftrightarrow (z' - i) = 2 e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)} (z_1 - i)$$

$$\Leftrightarrow x' = \left(\frac{-x}{1-3x} \right) \neq \frac{1}{3} ; \text{sinon } (1=0)$$

$$\Leftrightarrow x' = \left(\frac{-x}{1-3x} \right) \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

إذن كل عنصر x من $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ يقبل ماثلا $\left(\frac{-x}{1-3x} \right)$ من المجموعة $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ بالنسبة للقانون $*$.
خلاصة: $(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}; *)$ زمرة تبادلية.

التمرين الثاني

$$\varphi : (\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}; *) \rightarrow (\mathbb{R}^*; \times)$$

$$x \rightarrow (1-3x)$$

لدينا:

ليكن x و y عنصرين من المجموعة $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

$$\begin{aligned} \varphi(x * y) &= 1 - 3(x * y) = 1 - 3(x + y - 3xy) \\ &= 1 - 3x - 3y + 9xy \\ &= (1 - 3x) - 3y(1 - 3x) \\ &= (1 - 3x)(1 - 3y) \\ &= \varphi(x) \times \varphi(y) \end{aligned}$$

إذن: $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}; \varphi(x * y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$

إذن φ تشكل من $(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}; *)$ نحو $(\mathbb{R}^*; \times)$.

لنبين الآن أن φ تقابل. ليكن y عنصرا من \mathbb{R}^* .

المعادلة $\varphi(x) = y$ تقبل حلا وحيدا وهو $x = \left(\frac{1-y}{3} \right)$.
 بما أن $y \neq 0$ فإن $\frac{1-y}{3} \neq \frac{1}{3}$.

إذن المعادلة $\varphi(x) = y$ تقبل حلا وحيدا في المجموعة $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

و هو العدد $x = \left(\frac{1-y}{3} \right)$.

إذن φ تقابل من $(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}; *)$ نحو $(\mathbb{R}^*; \times)$.

و تقابله العكسي φ^{-1} معرف بما يلي:

$$\varphi^{-1} : (\mathbb{R}^*; \times) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}; *)$$

$$y \rightarrow \left(\frac{1-y}{3} \right)$$

التمرين الثاني

لدينا: $(\forall x \in \mathbb{R}); \varphi'(x) = -3 < 0$
 إذن φ دالة تناقصية على \mathbb{R} .

ومنه: $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \varphi^{-1}(]0; +\infty[)$

$$\begin{aligned} &= \left] \lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(y); \varphi^{-1}(0) \right[\\ &= \left] \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-y}{3} \right); \frac{1}{3} \right[\\ &= \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[\end{aligned}$$

التمرين الثاني

لدينا $\left] -\infty; \frac{1}{3} \right[$ جزء غير فارغ من المجموعة $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

يعني: $\left] -\infty; \frac{1}{3} \right[\subset \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

ليكن x و y عنصرين من $\left] -\infty; \frac{1}{3} \right[$.

التمرين الأول

$$\begin{aligned} D \in (\text{Axe réelle}) &\Leftrightarrow z_D \in \mathbb{R} \text{ --- } a = x + iy : \text{نضع} \\ &\Leftrightarrow (8a - 7i) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow 8x + i(8y - 7) \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow 8y - 7 = 0 \\ &\Rightarrow y = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

إذن مجموعة النقط $A(a)$ التي من أجلها النقطة D تنتمي إلى المحور الحقيقي تشكل مستقيما موازيا للمحور الحقيقي و معادلته $y = \frac{7}{8}$.

التمرين الثاني

$$\begin{aligned} 1 - 3(x * y) &= 1 - 3(x + y - 3xy) \\ &= 1 - 3x - 3y + 9xy \\ &= (1 - 3x) - 3y(1 - 3x) \\ &= (1 - 3x)(1 - 3x) \end{aligned}$$

التمرين الثاني

لنبين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

$$\begin{aligned} x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} &\Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3} \text{ et } y \neq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow (1 - 3x) \neq 0 \text{ et } (1 - 3y) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - 3x)(1 - 3y) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - 3(x * y) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (x * y) \neq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow (x * y) \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} \end{aligned}$$

إذن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

التجميعية: ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من المجموعة $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (y + z - 3yz) \\ &= x + (y + z - 3yz) - 3x(y + z - 3yz) \\ &= x + y + z - 3yz - 3xy - 3xz + 9xyz \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x + y - 3xy) * z \\ &= (x + y - 3xy) + z - 3z(x + y - 3xy) \\ &= x + y + z - 3yz - 3xy - 3xz + 9xyz \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow x * (y * z) = (x * y) * z$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} \text{ قانون تجميعي في } *$$

التبادلية:

$$x * y = x + y - 3xy = y + x - 3yx = y * x$$

إذن القانون $*$ تبادلي في المجموعة $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

العنصر المحايد: ليكن e العنصر المحايد لـ $*$ في المجموعة $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

$$\Rightarrow (\forall x \neq \frac{1}{3}); x * e = e * x = x$$

$$\Rightarrow (\forall x \neq \frac{1}{3}); x + e - 3xe = x$$

$$\Rightarrow (\forall x \neq \frac{1}{3}); e(1 - 3x) = 0$$

$$\Rightarrow e = 0 ; \text{car } (1 - 3x) \neq 0$$

$$\Rightarrow e = 0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

التمائل: ليكن x' ماثلا x بالنسبة لـ $*$.

$$\Leftrightarrow x * x' = x' * x = e$$

$$\Leftrightarrow x + x' - 3xx' = 0$$

$$\Leftrightarrow x'(1 - 3x) = -x$$

$$\Leftrightarrow x' = \left(\frac{-x}{1-3x} \right); \text{car } (1 - 3x) \neq 0$$

لدينا : $x * y' = x * \left(\frac{-y}{1-3y} \right)$

$$= x - \frac{y}{1-3y} + \frac{3xy}{1-3y}$$

$$= \frac{x-y}{1-3y}$$

$$x, y \in]-\infty; \frac{1}{3}[\Leftrightarrow x < \frac{1}{3} \text{ et } y < \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x < 1 \text{ et } 3y < 1$$

$$\Leftrightarrow (3x - 3y) < (1 - 3y) \text{ et } (1 - 3y) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3x - 3y}{1 - 3y} \right) < 1 ; \text{ car } \frac{1}{1 - 3y} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x - y}{1 - 3y} \right) < \frac{1}{3} ; \text{ car } \frac{1}{1 - 3y} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x - y}{1 - 3y} \right) \in]-\infty; \frac{1}{3}[$$

$$\Leftrightarrow x * y' \in]-\infty; \frac{1}{3}[$$

و بالتالي حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية نستنتج أن :

$$\left(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} ; * \right) \text{ زمرة جزئية للزمرة } \left(]-\infty; \frac{1}{3}[; * \right)$$

التمرين الثاني

3

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ و n عددا صحيحا طبيعيا .

لدينا : $\varphi(x^{(n)}) = \varphi \left(\underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois}} \right)$

$$= \underbrace{\varphi(x) \times \varphi(x) \times \dots \times \varphi(x)}_{n \text{ fois}}$$

$$= (\varphi(x))^n$$

التمرين الثاني

3

$$\varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n \Leftrightarrow 1 - 3x^{(n)} = (1 - 3x)^n$$

$$\Leftrightarrow x^{(n)} = \frac{1 - (1 - 3x)^n}{3}$$

التمرين الثاني

4

لدينا τ قانون تركيب داخلي في \mathbb{R} .
 لأن : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x + y - \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$.
 القانون τ تبادلي في \mathbb{R} لأن تبادلي في \mathbb{R} .

و لدينا : $x \tau (y \tau z) = x \tau \left(y + z - \frac{1}{3} \right)$

$$= x + y + z - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$$

$$= \left(x + y - \frac{1}{3} \right) + z - \frac{1}{3}$$

$$= (x \tau y) \tau z$$

إذن τ قانون تجميعي في \mathbb{R} .

ليكن e العنصر المحايد للقانون τ في \mathbb{R} .

$$\Rightarrow x \tau e = e \tau x = x$$

$$\Rightarrow x + e - \frac{1}{3} = x$$

$$\Rightarrow e = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$$

ليكن x عنصرا من \mathbb{R} و x' مماثله بالنسبة لـ τ .

$$\Rightarrow x \tau x' = x' \tau x = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x + x' - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x' = \left(\frac{2}{3} - x \right) \in \mathbb{R}$$

خلاصة : نستنتج أن τ قانون تركيب داخلي في \mathbb{R} ، تبادلي و تجميعي

و يقبل عنصرا محايدا و هو $\frac{1}{3}$. و كل عنصر x يقبل $\left(\frac{2}{3} - x \right)$

كمماثل في \mathbb{R} .

إذن $(\mathbb{R}; \tau)$ زمرة تبادلية .

التمرين الثاني

4

ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من \mathbb{R} .

لدينا : $x * (y \tau z) = x * \left(y + z - \frac{1}{3} \right)$

$$= 2x + y + z - 3(xy + xz) - \frac{1}{3}$$

و لدينا : $(x * y) \tau (x * z) = (x + y - 3xy) \tau (x + z - 3xz)$

$$= 2x + y + z - 3(xy + xz) - \frac{1}{3}$$

نستنتج إذن أن : $x * (y \tau z) = (x * y) \tau (x * z)$.

إذن القانون $*$ توزيعي بالنسبة للقانون τ (1) .

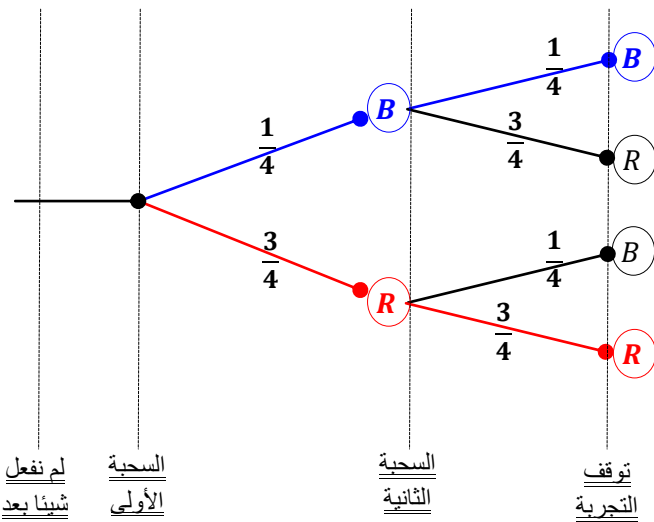
و لدينا $(\mathbb{R}; \tau)$ و $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} ; * \right)$ زمرتان تبادليتان .

إذن من (1) و (2) نستنتج أن $(\mathbb{R}, \tau, *)$ جسم تبادلي .

التمرين الثالث

1

للإجابة على السؤال نستعين بالشجرة التالية :



الحدث $[X = 2]$ هو توقف التجربة في السحبة رقم 2 .

أو بتعبير آخر : الحصول على كرتين من نفس اللون .

إذن : $p[X = 2] = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \right) = \frac{5}{8}$.

$p[X = 3]$ هو احتمال توقف التجربة في السحبة رقم 3 .

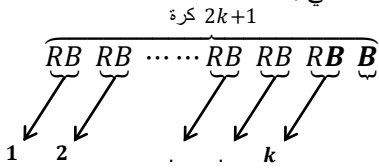
و من أجل ذلك نستعمل نموذج الشجرة التالية .

التمرين الثالث

2 ب

بنفس الطريقة نفصل بين حالتين :

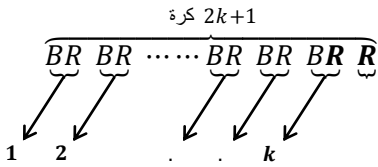
الحالة الأولى: توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين بيضاوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :



و هذا يعني : أننا نحصل على k كرة حمراء و $(k + 1)$ كرة بيضاء.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

الحالة الثانية: توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين حمراوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :



و هذا يعني : أننا نحصل على $(k + 1)$ كرة حمراء و k كرة بيضاء.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

و بالتالي احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبتين $2k$ و $(2k + 1)$ هو :

$$\begin{aligned} p[X = 2k + 1] &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^k + \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) \\ &= \left(\frac{3}{16}\right)^k \end{aligned}$$

التمرين الرابع

1 ا

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right) = \lim_{\substack{u \rightarrow 1 \\ u=1+2x}} \left(\frac{2 \ln u}{u-1}\right) \\ &= 2 \lim_{u \rightarrow 1} \left(\frac{\ln u - \ln 1}{u-1}\right) \\ &= 2(\ln u)'_{/u=1} = 2\left(\frac{1}{1}\right) = 2 = f(0) \end{aligned}$$

لقد استعملت القاعدة التالية : $\lim_{u \rightarrow 1} \left(\frac{\ln u - \ln x_0}{u - x_0}\right) = \frac{1}{x_0}$; $(\forall x_0 > 0)$; إذن f دالة متصلة في الصفر .

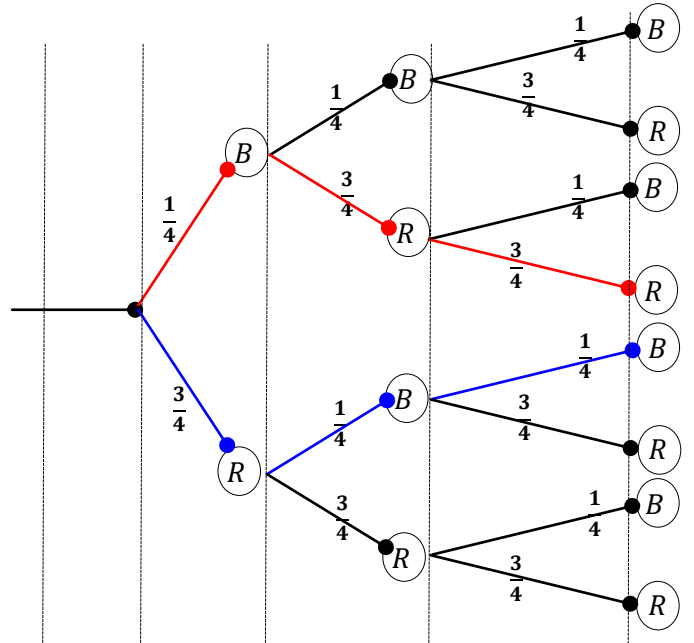
التمرين الرابع

2 ا

لدينا : $h_a(a) = (\ln(1+2a))a^2 - (\ln(1+2a) - 2a)a^2$ و لدينا : $h_a(0) = -(\ln 1)a^2 = 0$ و بما أن h_a متصلة و قابلة للاشتقاق على $[0, a]$ و $h_a(0) = h_a(a)$ فإنه حسب Rolle

يوجد عنصر b من $]0, a[$ بحيث $h'_a(b) = 0$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2(\ln(1+2a) - 2a)b &= a^2 \left(-2 + \frac{2}{1+2b}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} &= \frac{-2}{1+2b} \end{aligned}$$



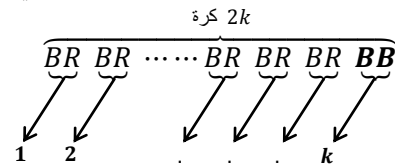
$$p[X = 3] = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$$

التمرين الثالث

2 ا

$p[X = 2k]$ هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبتين $2k$ و $(2k - 1)$ و هنا نفصل بين حالتين و ذلك حسب لون الكرتين

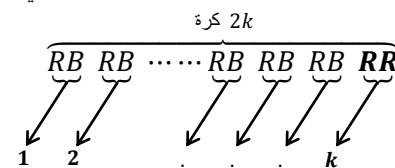
الحالة الأولى: توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين بيضاوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :



و هذا يعني : أننا نحصل على $(k + 1)$ كرة بيضاء و $(k - 1)$ كرة حمراء.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$$

الحالة الثانية: توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين حمراوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :



و هذا يعني : أننا نحصل على $(k + 1)$ كرة حمراء و $(k - 1)$ كرة بيضاء.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

و بالتالي احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبتين $(2k - 1)$ و $(2k)$ هو :

$$\begin{aligned} p[X = 2k] &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) \\ &= \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} \times \left(\frac{5}{8}\right) \end{aligned}$$

و نلاحظ حسب هذا الجدول أن g متصلة على I و تقبل 0 كقيمة قصوية .
لأن $g'(x)$ تنعدم في 0 و تتغير إشارتها بجوار 0 .
إذن : $(\forall x \in I) ; g(x) \leq 0$.
و بالتالي : $\forall x \in I \setminus \{0\} ; g(x) < 0$

التمرين الرابع

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة بإشارتي $g(x)$ و $(1+2x)$ و هذا ما يُلخصه الجدول التالي :

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	-
$(1+2x)$	0	1	+
$f'(x)$	-	-	-
f	$+\infty$	2	0

التمرين الرابع

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f(x) = \lim_{\substack{u \rightarrow 0^+ \\ u=2x+1}} \left(\frac{2 \ln u}{u-1} \right) = +\infty$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{1}{2}$ مقارب عمودي للمنحنى (C) .

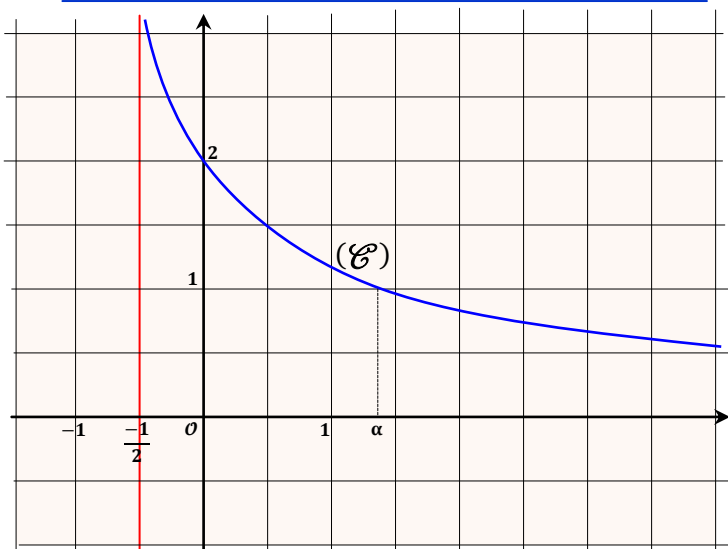
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ u=2x+1}} \left(\frac{2 \ln u}{u-1} \right) \\ &= 2 \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln u}{u} \right) \left(\frac{u}{u-1} \right) = 0 \end{aligned}$$

إذن محور الأفاصيل مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

التمرين الرابع

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.
إذن f متصلة و تناقصية قطعاً على $[1; 2]$ لأن $]-\frac{1}{2}; +\infty[\supset [1; 2]$.
و منه f تقابل من المجال $[1; 2]$ نحو صورته $[f(2); (1)]$.
يعني أن f تقابل من المجال $[1; 2]$ نحو المجال $[0,8; 1,1]$.
و بما أن العدد 1 ينتمي إلى المجال $[0,8; 1,1]$ فإنه يمتلك سابقاً واحداً بالتقابل f من المجال $[1; 2]$.
أو بتعبير رياضياتي جميل : $\exists! \alpha \in [1; 2] ; f(\alpha) = 1$

التمرين الرابع



التمرين الرابع

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} \right) : \text{لدينا} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} \right) \end{aligned}$$

نعلم حسب السؤال أ) وجود عدد b مرتبط بـ a حيث $a < b < 0$

$$\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$$

لاحظ أنه إذا كان a يؤول إلى الصفر فإن b يؤول كذلك إلى الصفر و ذلك بسبب التأطير التالي $a < b < 0$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} \right) = \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{-2}{1+2b} \right) = -2 \in \mathbb{R}$$

إذن f دالة قابلة للاشتقاق في الصفر و $f'(0) = -2$.

التمرين الرابع

لدينا f دالة قابلة للاشتقاق على $I \setminus \{0\}$ لأنها مجموع دوال اعتيادية قابلة للاشتقاق على المجموعة $I \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x}{1+2x} - \ln(1+2x) \right) : \text{ولدينا} \\ &= \left(\frac{2x - (1+2x) \ln(1+2x)}{x^2(1+2x)} \right) \\ &= \frac{g(x)}{x^2(1+2x)} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)} : \text{إذن}$$

التمرين الرابع

لدينا g دالة معرفة و متصلة و قابلة للاشتقاق على I .

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 - \left(2 \ln(1+2x) + \frac{2(1+2x)}{(1+2x)} \right) : \text{ولدينا كذلك} \\ &= -2 \ln(1+2x) \end{aligned}$$

إذا كان $x = 0$ فإن $g'(x) = 0$.
إذا كان $x > 0$ فإن $g'(x) < 0$.
إذا كان $x < 0$ فإن $g'(x) > 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} 2x - (1+2x) \ln(1+2x) : \text{لدينا} \\ &= -1 - \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} (1+2x) \ln(1+2x) \\ &= -1 - \lim_{\substack{u \rightarrow 0^+ \\ u=1+2x}} (u \ln u) \\ &= -1 - 0 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - (1+2x) \ln(1+2x) : \text{ولدينا} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \left(\frac{1}{x} + 2 \right) \ln(1+2x) \right) \\ &= (+\infty)(2 - 2(+\infty)) = -\infty \end{aligned}$$

نستنتج جدول تغيرات الدالة كما يلي :

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	-1	0	$-\infty$

$$\begin{cases} \varphi \text{ متصلة على }]\alpha; u_n[\\ \varphi \text{ قابلة للاشتقاق على }]\alpha; u_n[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]\alpha; u_n[; \frac{\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)}{u_n - \alpha} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)}{u_n - \alpha} \right| = |\varphi'(c)|$$

$$\Rightarrow |\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)| = |\varphi'(c)| \cdot |u_n - \alpha|$$

$$\begin{cases} \alpha > 1 \\ u_n \geq 1 \\ c \in]\alpha; u_n[\end{cases} \Rightarrow c \geq 1$$

$$\Rightarrow 0 < \varphi'(c) \leq \frac{2}{3} ; d'après (1)II)$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{3} < 0 < \varphi'(c) \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{3} < \varphi'(c) \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow |\varphi'(c)| \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow |\varphi'(c)| \cdot |u_n - \alpha| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha| ; \text{ pour } n$$

$$\Rightarrow |u_n - \alpha| \leq \frac{2}{3} |u_{n-1} - \alpha| ; \text{ pour } (n-1)$$

$$\leq \frac{22}{33} |u_{n-2} - \alpha|$$

$$\leq \frac{222}{333} |u_{n-3} - \alpha|$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha| \quad (3)$$

نعتبر العبارة (P_n) المعرفة على \mathbb{N} بما يلي : $(P_n) : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$
من أجل $n = 0$ لدينا $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| \leq 1$ وذلك لأن $1 \leq \alpha \leq 2$.
إذن العبارة (P_0) صحيحة .
ليكن n عنصرا من \mathbb{N} ونفترض أن (P_n) عبارة صحيحة .

$$(P_n) \text{ est vraie} \Rightarrow |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie}$$

وبذلك نحصل على الوضعية الترجيعية التالية : $(P_0) \text{ est vraie}$
 $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; (\forall n \in \mathbb{N})$
إذن حسب مبدأ التراجع : $(P_n) \text{ est toujours vraie}$
يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

التمرين الرابع I 1 II

الدالة φ عبارة عن مُركَّب دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال I .
ولدينا : $\varphi'(x) = \frac{2}{1+2x}$

$$x \geq 1 \Leftrightarrow 6 \leq 2 + 4x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+2x} \leq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x) \leq \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1 > \frac{-1}{2} \Leftrightarrow 1 + 2x > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+2x} > 0$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) > 0 \quad (2)$$

(1) et (2) $\Leftrightarrow (\forall x \geq 1) ; 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$

التمرين الرابع I 1 II

ننتقل من نتيجة السؤال (4I) :

$$f(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha} = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+2\alpha) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \varphi(\alpha) = \alpha$$

$$\varphi'(x) = \frac{2}{1+2x} > 0 \Rightarrow \varphi \text{ est strictement } \nearrow \text{ sur } I$$

$$\Rightarrow \varphi([1; \alpha]) = [\varphi(1); \varphi(\alpha)] = [\ln 3 ; \alpha]$$

$$\Rightarrow \varphi([1; \alpha]) \subset [1; \alpha]$$

$$\Rightarrow \varphi(J) \subset J$$

التمرين الرابع I 2 II

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : u_n \in J$
من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1 \in [1; \alpha] = J$
إذن العبارة (P_0) صحيحة .
ليكن n عددا صحيحا طبيعيا ونفترض أن العبارة (P_n) صحيحة .
إذن : $(P_n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n \in J$

$$\Rightarrow \varphi(u_n) \in \varphi(J) \subset J$$

$$\Rightarrow \varphi(u_n) \in J$$

$$\Rightarrow \ln(1 + 2u_n) \in J$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \in J$$

$$\Rightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie}$$

لقد حصلنا على الوضعية التالية : $(P_0) \text{ est vraie}$
 $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; (\forall n \in \mathbb{N})$
إذن حسب مبدأ التراجع في \mathbb{N} نستنتج أن : $(P_n) \text{ est toujours vraie}$
يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in J$

التمرين الرابع I 2 II

لدينا الدالة φ قابلة للاشتقاق على المجال I . نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة φ في أي مجال يوجد ضمن I . نختار إذن المجال الذي طرفاه u_n و α . والذي سوف نرمز له بالرمز $[\alpha; u_n]$ و ذلك لأننا نجهل من الأكبر من α و u_n .

$$\begin{aligned}
 & [(\ln(1+2t))^2]' = \frac{4 \ln(1+2t)}{(1+2t)} \\
 & \Rightarrow \frac{\ln(1+2t)}{1+2t} = \frac{1}{4} ((\ln(1+2t))^2)' \\
 & \Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{1+2t} \right) dt = \frac{1}{4} \int_1^x ((\ln(1+2t))^2)' dt \\
 & \Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{1+2t} \right) dt = \frac{1}{4} [(\ln(1+2t))^2]_1^x \\
 & \Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{1+2t} \right) dt = \frac{1}{4} ((\ln(1+2x))^2 - (\ln 3)^2) \\
 & \Rightarrow F(x) > \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{1+2t} \right) dt = \frac{1}{4} ((\ln(1+2x))^2 - (\ln 3)^2) \\
 & \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty
 \end{aligned}$$

ليكن $x \in I$. لدينا \tilde{F} دالة متصلة على المجال $\left] \frac{-1}{2}; x \right[$.
 ولدينا \tilde{F} قابلة للاشتقاق على المجال $\left] \frac{-1}{2}; x \right[$.
 وذلك انطلاقا من دراسة الدالة F .
 إذن حسب مبرهنة التزايد المتناهية.

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow \exists c \in \left] \frac{-1}{2}; x \right[; \frac{\tilde{F}(x) - \tilde{F}\left(\frac{-1}{2}\right)}{x - \left(\frac{-1}{2}\right)} = \tilde{F}'(c) \\
 & \Rightarrow \exists c \in \left] \frac{-1}{2}; x \right[; \frac{F(x) - l}{x + \frac{1}{2}} = f(c) \\
 & \Rightarrow \exists c \in \left] \frac{-1}{2}; x \right[; (F(x) - l) = f(c) \left(x + \frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

من جهة أخرى: $x > c$
 $\Rightarrow f(x) > f(c)$; car f est \searrow
 $\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right) f(x) > \left(x + \frac{1}{2}\right) f(c) = (F(x) - l)$
 $\Rightarrow (F(x) - l) > \left(x + \frac{1}{2}\right) f(x) (*)$

$$\begin{aligned}
 (*) & \Rightarrow \left(\frac{F(x) - l}{x + \frac{1}{2}} \right) \geq f(x); \text{ car } x > \frac{-1}{2} \\
 & \Rightarrow \left(\frac{F(x) - l}{x + \frac{1}{2}} \right) \geq \underbrace{f(x)}_{x \rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^+}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^+} \left(\frac{F(x) - l}{x + \frac{1}{2}} \right) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^+} \left(\frac{\tilde{F}(x) - \tilde{F}\left(\frac{-1}{2}\right)}{x - \left(\frac{-1}{2}\right)} \right) = +\infty \notin \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \tilde{F}$ n'est pas dérivable à droite de $\frac{-1}{2}$

لدينا $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و هو عدد موجب و أصغر من 1.
 إذن: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$
 ونحصل بذلك على الوضعية التالية: $|u_n - \alpha| = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$|u_n - \alpha| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

أو بتعبير آخر نحصل على الوضعية التالية:

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq (u_n - \alpha) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \alpha) = 0$
 يعني: $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$

لدينا f دالة متصلة على المجال I و $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ($\forall x \in I$)
 إذن F دالة أصلية للدالة f على المجال I .
 إذن F قابلة للاشتقاق على المجال I و مشتقتها هي الدالة f .
 يعني: $(\forall x \in I); F'(x) = f(x)$.

$x \in I \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow F'(x) = f(x) > 0$
 $\Rightarrow F$ est strictement \nearrow sur I

$$\begin{aligned}
 x \in I & \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow 2t + 1 > t \Rightarrow \frac{1}{t} > \frac{1}{2t + 1} \\
 & \Rightarrow \frac{\ln(2t + 1)}{t} > \frac{\ln(2t + 1)}{2t + 1}; \ln(2t + 1) > 0 \\
 & \Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(2t + 1)}{t} \right) dt > \int_1^x \left(\frac{\ln(2t + 1)}{2t + 1} \right) dt \\
 & \Rightarrow \int_1^x f(t) dt > \int_1^x \left(\frac{\ln(2t + 1)}{2t + 1} \right) dt \\
 & \Rightarrow \int_0^x f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt > \int_1^x \left(\frac{\ln(2t + 1)}{2t + 1} \right) dt \\
 & \Rightarrow F(x) - \int_0^1 f(t) dt > \int_1^x \left(\frac{\ln(2t + 1)}{2t + 1} \right) dt (*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t \in [0; 1] & \Rightarrow f(t) > 0 \Rightarrow \int_0^1 f(t) dt > 0 \\
 & \Rightarrow -\int_0^1 f(t) dt < 0 \\
 & \Rightarrow F(x) - \int_0^1 f(t) dt < F(x) (**).
 \end{aligned}$$

$$(*) \text{ et } (**) \Rightarrow F(x) > \int_1^x \left(\frac{\ln(2t + 1)}{2t + 1} \right) dt$$

أجوبة امتحان الدورة العادية 2009

التمرين الأول

1

لتكن $M(a, b)$ و $M(x, y)$ مصفوفتين من المجموعة F .

$$\begin{aligned} M(x, y) \times M(a, b) &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa & xb + \frac{y}{a} \\ 0 & \frac{1}{xa} \end{pmatrix} \\ &= M\left(xa; xb + \frac{y}{a}\right) \in F \end{aligned}$$

إذن $\forall M(a, b), M(x, y) \in F ; M(x, y) \times M(a, b) \in F$

التمرين الأول

1 ب

لدينا F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

إذن \times قانون تركيب داخلي في F .

لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ و $M(e, f)$ ثلاثة عناصر من F .

$$\begin{aligned} (M(a, b) \times M(c, d)) \times M(e, f) &= M\left(ac; ad + \frac{b}{c}\right) \times M(e, f) \\ &= M\left(eac; acf + \frac{ad}{e} + \frac{b}{ce}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(a, b) \times (M(c, d) \times M(e, f)) &= M\left(ce; cf + \frac{d}{e}\right) \times M(a, b) \\ &= M\left(eac; acf + \frac{ad}{e} + \frac{b}{ce}\right) \end{aligned}$$

إذن $(M(a, b) \times M(c, d)) \times M(e, f) = M(a, b) \times (M(c, d) \times M(e, f))$

يعني أن \times قانون تجميعي في F .

ليكن $M(e_1, e_2)$ العنصر المحايد للضرب في F .

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \forall M(a, b) \in F ; M(a, b) \times M(e_1, e_2) &= M(e_1, e_2) \times M(a, b) \\ &= M(a, b) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow M\left(ae_1; ae_2 + \frac{b}{e_1}\right) = M(a, b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ae_1 = a \\ ae_2 + \frac{b}{e_1} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 1 \in \mathbb{R}^* \\ e_2 = 0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

إذن المصفوفة $I = M(1, 0)$ هي العنصر المحايد لـ \times في F .

لتكن $M(x, y)$ مصفوفة من F ومائلتها بالنسبة لـ \times في F .

$$\Leftrightarrow M(x, y) \times M(x', y') = M(x', y') \times M(x, y) = I$$

$$\Leftrightarrow M\left(xx'; xy' + \frac{y}{x'}\right) = M(1, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^* \\ y' = -y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

إذن كل مصفوفة $M(x, y)$ تمتلك مصفوفة مماثلة $M\left(\frac{1}{x}, -y\right)$ بالنسبة

لـ \times في F . القانون \times ليس تبادلياً في F .

$$\begin{cases} M(x, y) \times M(y, x) = M(xy; x^2 + 1) \\ M(y, x) \times M(x, y) = M(xy; y^2 + 1) \end{cases} \text{ لأن:}$$

من أجل $x \neq 1$ و $y \neq -1$ نلاحظ أن:

$$M(x, y) \times M(y, x) \neq M(y, x) \times M(x, y)$$

الخلاصة: (F, \times) زمرة غير تبادلية.

التمرين الأول

2

لدينا G جزء غير فارغ من F لأنه يضم على الأقل العنصر $(1, 0)$.

لتكن $M(a, 0)$ و $M(b, 0)$ مصفوفتين من G .

$$\begin{aligned} M(b, 0) \times M(a, 0) &= M(b, 0) \times M\left(\frac{1}{a}, 0\right) \\ &= M\left(\frac{b}{a}; 0\right) \in G \text{ car } \frac{b}{a} \neq 0 \end{aligned}$$

و بالتالي حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية نستنتج أن (G, \times) زمرة جزئية للزمرة (F, \times) .

التمرين الأول

3

$$\begin{cases} (1; 1) \perp (2; 3) = \left(2; 3 + \frac{1}{2}\right) = \left(2; \frac{7}{2}\right) \\ (2; 3) \perp (1; 1) = \left(2; 2 + \frac{3}{1}\right) = (2; 5) \end{cases}$$

التمرين الأول

3 ب

لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصفوفتين من F . لدينا:

$$\begin{aligned} \varphi(M(c, d) \times M(a, b)) &= \varphi\left(M\left(ac; bc + \frac{d}{a}\right)\right) \\ &= \left(ac; bc + \frac{d}{a}\right) \\ &= (c, d) \perp (a, b) \\ &= \varphi(M(c, d)) \perp \varphi(M(a, b)) \end{aligned}$$

إذن φ تشاكل من (F, \times) نحو (E, \perp) .

ليكن (a, b) عنصراً من المجموعة E .

نريد حل المعادلة ذات المجهول $M(x, y)$ التالية: $\varphi(M(x, y)) = (a, b)$

هذه المعادلة تصبح: $(x, y) = (a, b)$

يعني أن $x = a$ و $y = b$.

إذن فالمعادلة تقبل حلاً وحيداً وهو $M(a, b)$.

ومنه: $\forall (a, b) \in E ; \exists ! M(x, y) \in F ; \varphi(M(x, y)) = (a, b)$

يعني أن φ تقابل من (F, \times) نحو (E, \perp) .

خلاصة: φ تشاكل تقابلي من (F, \times) نحو (E, \perp) .

و يمكننا أن نكتب $(F, \times) = (E, \perp)$.

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الانطلاق

و يُحوّلها إلى مجموعة الوصول.

بما أن (F, \times) زمرة غير تبادلية عنصراً للمحايد هو المصفوفة $M(1, 0)$

و كل مصفوفة $M(x, y)$ تقبل مماثلة $M\left(\frac{1}{x}; -y\right)$ بالنسبة لـ \times في F .

فإن (E, \perp) زمرة غير تبادلية عنصراً للمحايد هو الزوج $\varphi(M(1, 0))$

و كل زوج (x, y) يقبل مماثلاً $\varphi\left(M\left(\frac{1}{x}; -y\right)\right)$ بالنسبة لـ \perp في E .

$$\begin{cases} \varphi(M(1, 0)) = (1, 0) \\ \varphi\left(M\left(\frac{1}{x}; -y\right)\right) = \left(\frac{1}{x}; -y\right) \end{cases} \text{ لدينا:}$$

التمرين الثاني

1

$$\begin{aligned} \Delta &= (1 - i)^2(m + 1)^2 + 4i(m^2 + 1) \\ &= -2i(m^2 + 2m + 1) + 4i m^2 + 4i \\ &= 2i m^2 - 4i m + 2i \\ &= 2i(m^2 - 2m + 1) \\ &= (1 + i)^2(m - 1)^2 \\ &= ((1 + i)(m - 1))^2 \end{aligned}$$

$$z_2 = m - i = e^{i\theta} + (e^{-i\pi}) \left(e^{\frac{i\pi}{2}} \right) \text{ : وكذلك}$$

$$= 2 \cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) e^{i \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) e^{i \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) e^{i \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}$$

الطريقة الثانية: الإجابة دون استعمال تلك الطريقة .
في هذا السؤال يجب ضبط جميع قواعد الصيغ المثلثية .

نضع : $z_1 = r e^{i\varphi}$ لدينا :
 $z_1 = 1 - im$
 $= 1 - i e^{i\theta}$
 $= 1 - i(\cos \theta + i \sin \theta)$
 $= (1 + \sin \theta) - i \cos \theta$

إذن هدفنا هو إيجاد المجهولين r و φ بدلالة θ بحيث :

$$(1 + \sin \theta) - i \cos \theta = r \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r \cos \varphi = 1 + \sin \theta \\ r \sin \varphi = -\cos \theta \end{cases}$$

لدينا : $(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2$

إذن : $(1 + \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta = r^2$

ومنه : $r^2 = 2(1 + \sin \theta) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \theta \right)$
 $= 2 \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right)$
 $= 4 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$
 $= 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$

إذن : $r = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$

نعوض r بقيمته في المعادلة الثانية من النظمة نحصل على :

$$\sin \varphi = \frac{-\cos \theta}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} = \frac{\cos(\pi - \theta)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$= \frac{\sin \left(-\frac{\pi}{2} + \theta \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} = \frac{-\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$= \frac{-2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$= \frac{-2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$= -\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$$

إذن : $\varphi \equiv \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) [k\pi]$

و بالتالي : $z_1 = \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right) e^{i \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)}$

بنفس الطريقة نضع : $z_2 = r e^{i\varphi}$
 $z_2 = m - i = e^{i\theta} - i = \cos \theta + i(\sin \theta - 1)$

هدفنا هو البحث عن r و φ بدلالة θ بحيث :

$$r \cos \varphi + i r \sin \varphi = \cos \theta + i(\sin \theta - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = r \cos \varphi \\ \sin \theta - 1 = r \sin \varphi \end{cases}$$

التمرين الثاني

1 I

$$z_1 = (1 - im) \text{ و } z_2 = (m - i)$$

التمرين الثاني

1 I ج

نضع : $m = r e^{i\theta}$

$$z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow (1 - im)(m - i) = 1$$

$$\Leftrightarrow m - i - m^2 i - m = 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 = -1 + i$$

$$\Leftrightarrow r^2 e^{2i\theta} = \sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)$$

$$\Leftrightarrow r^2 e^{2i\theta} = \sqrt{2} e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi ; k \in \{0; 1\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} \text{ أو } \theta = \frac{11\pi}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{3i\pi}{8}} \\ m_2 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{11i\pi}{8}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2} \left(\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}+4}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} \right) \\ m_2 = \sqrt[4]{2} \left(-\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}+4}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} \right) \end{cases}$$

التمرين الثاني

2 I

للإجابة على هذا السؤال أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى: تستدعي استعمال القاعدة المهمة التالية :

$$e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) e^{i \left(\frac{x+y}{2} \right)}$$

لدينا : $m = e^{i\theta}$ و $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ و $-1 = e^{-i\pi}$

إذن : $z_1 = 1 - im = e^{i0} + (e^{-i\pi}) \left(e^{\frac{i\pi}{2}} \right) (e^{i\theta})$

$$= e^{i0} + e^{i \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)}$$

$$= 2 \cos \left(\frac{0 - \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)}{2} \right) e^{i \left(\frac{0 + \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)}{2} \right)}$$

$$= 2 \cos \left(-\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) e^{i \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$= 2 \cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) e^{i \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) e^{i \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) e^{i \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}$$

التمرين الثاني

I 2 II

نتطلق من $z' = 1 - iz$

نريد كتابة هذه المتساوية على شكل $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ بحيث ω عدد عقدي .

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{-\pi}{2} \\ \omega = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{array} \right. \text{ لدينا : } \left\{ \begin{array}{l} e^{i\theta} = -i \\ -\omega e^{i\theta} + \omega = 1 \end{array} \right. \text{ إذن :}$$

$$z' = e^{\frac{-\pi i}{2}} \left(z - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right)$$

إذن التحويل R عبارة عن دوران مركزه النقطة $\Omega \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right)$ وزاويته $\frac{-\pi}{2}$

التمرين الثاني

ج 2 II

نضع $m = x + iy$

$M \in (M_1 M_2) \Leftrightarrow M, M_1, M_2$ نقط مستقيمة

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{(z_1 - m)}{(z_2 - m)} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \frac{(1 - im - m)}{(m - i - m)} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow (i + m - im) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow i + (x + iy) - i(x + iy) \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow y - x + 1 = 0 \\ &\Rightarrow y = x - 1 \end{aligned}$$

إذن مجموعة النقط M تشكل مستقيما معادلته $y = x - 1$.

التمرين الثاني

I 2 II

سوف نحتاج إلى أن نكتب العدد $z' = 1 - iz$

على شكل $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$

بحيث ω و θ عددان مجهولان وجب تحديدهما : $z' = -iz + 1$
 $z' = e^{i\theta} z - \omega e^{i\theta} + \omega$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -iz + 1 = e^{i\theta} z - \omega e^{i\theta} + \omega \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -i = e^{i\theta} \\ 1 = -\omega e^{i\theta} + \omega \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{-\pi}{2} \\ \omega(1 + i) = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{-\pi}{2} \\ \omega = \frac{1}{1+i} \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{cases} \end{aligned}$$

$$z' = e^{\frac{-i\pi}{2}} \left(z - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right)$$

إذن التحويل R عبارة عن دوران مركزه $\Omega \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right)$. و زاويته $\frac{-\pi}{2}$

التمرين الثاني

ب 2 II

نضع $m = x + iy$

$$\begin{aligned} &\frac{(z_2 - z_1)}{(z_2 - m)} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(z_2 - z_1)}{(z_2 - m)} = -\frac{(z_2 - z_1)}{(z_2 - m)} \\ &\Leftrightarrow \frac{\bar{m} + i - 1 - i\bar{m}}{i} = \frac{m - i - 1 + im}{i} \\ &\Leftrightarrow (x - iy) + i - 1 - i(x - iy) = (x + iy) - i - 1 + i(x + iy) \\ &\Leftrightarrow -2ix + 2i - 2iy = 0 \\ &\Leftrightarrow x + y = 1 \\ &\Leftrightarrow \text{Re}(m) + \text{Im}(m) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{لدينا : } (r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2$$

$$\text{إذن : } (\cos \theta)^2 + (\sin \theta - 1)^2 = r^2$$

$$\text{و منه : } r^2 = 2(1 - \sin \theta)$$

$$\text{أي : } r^2 = 2(1 + \sin(-\theta))$$

نعلم حسب الجزء الأول من هذا السؤال أن :

$$2(1 + \sin \theta) = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\text{إذن : } 2(1 + \sin(-\theta)) = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\text{يعني : } r^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\text{و منه : } r = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$$

ملاحظة : لقد تم اختيار القيمة الموجبة لـ r لأن معيار عدد عقدي يكون دائما عددا موجبا.

نعوض r بقيمته في المعادلة الأولى من النظام نحصل على :

$$\cos \varphi = \frac{\cos \theta}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{-\cos(\pi - \theta)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{-\sin \left(\frac{-\pi}{2} + \theta \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{-2 \sin \left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \cos \left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\text{إذن : } \varphi \equiv \left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) [k\pi]$$

$$\text{و بالتالي : } z_2 = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) e^{i \left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)}$$

التمرين الثاني

I 2 II

$M \in (M_1 M_2) \Leftrightarrow M, M_1, M_2$ نقط مستقيمة .

$$\Leftrightarrow \frac{z_1 - m}{z_2 - m} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - im - m}{m - i - m} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow i + m - im \in \mathbb{R}$$

نضع $m = x + iy$

$$\Leftrightarrow (x + y) + i(y - x + 1) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y - x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x - 1$$

إذن مجموعة النقط M تشكل مستقيما معادلته $y = x - 1$.

نجمع المتوافقات (1) و (2) و (3) و (4) طرفاً بطرف نجد :

$$3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6 \cdot 6^{p-2} \equiv 0 [p]$$

- . يعني : $6 \cdot 2^{p-2} + 6 \cdot 3^{p-2} + 6 \cdot 6^{p-2} - 6 \equiv 0 [p]$
- . يعني : $6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1) \equiv 0 [p]$
- . يعني : $6(a_{p-2}) \equiv 0 [p]$. إذن : $p/6(a_{p-2})$ (5)
- . نؤكد العدد 6 إلى جداء عوامل أولية نجد : $6 = 2^1 \times 3^1$
- . ولدينا p عدد أولي أكبر قطعاً من 3 إذن : $6 \wedge p = 1$ (6)
- من (5) و (6) نستنتج حسب Gauss أن : p/a_{p-2}

التمرين الثالث

ليكن q عدداً أولياً . و نفضلُ بين ثلاث حالات للعدد q .

الحالة الأولى : إذا كان $q = 2$.
فإنه حسب نتيجة السؤال (1) أ : $2/a_n$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$;
إذن : $a_n \wedge q = q$; $(\exists n \in \mathbb{N}^*)$

الحالة الثانية : إذا كان $q = 3$.
فإنه حسب نتيجة السؤال (1) ب : $3/a_n$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$;
إذن : $a_n \wedge q = q$; $(\exists n \in \mathbb{N}^*)$

الحالة الثالثة : إذا كان $q > 3$.
فإنه حسب نتيجة السؤال (2) ب : q/a_{q-2} ; $(\forall q > 3)$;
إذن : $a_n \wedge q = q$; $(\exists n \in \mathbb{N}^*)$

خلاصة : $(\forall q \in \mathbb{P}), (\exists n \in \mathbb{N}^*) ; a_n \wedge q = q$.

التمرين الرابع

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x)^n \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ x=t^n}} t^n (1 - \ln(t^n))^n \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t^n (1 - n \ln(t))^n \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (t - tn \ln(t))^n \\ &= 0 = f_n(0) \end{aligned}$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = f_n(0)$

و هذا يعني أن الدالة f_n متصلة على اليمين في الصفر .

التمرين الرابع

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x)^n \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ t = \ln x}} (1 - t)^n \\ &= \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y = 1 - t}} y^n \\ &= +\infty \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

إذن f_n غير قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر .

التمرين الرابع

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f_2(x)}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x)^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x)^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f_1(x)}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty \end{aligned}$$

التمرين الثاني

M_2 و M_1 و M و Ω نقطة متداورة

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \right) \equiv \arg \left(\frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega} \right) [\pi] \\ &\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \right) \equiv \arg(-i) [\pi] \\ &\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \right) \equiv \frac{-\pi}{2} [\pi] \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \right) \in i\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \text{Re}(m) + \Im m(m) = 1 \text{ d'après (2)(II)} \\ &\Leftrightarrow y = -x + 1 \end{aligned}$$

إذن مجموعة النقط M التي من أجلها Ω و M و M_2 و M_1 متداورة تُشكل المستقيم (Δ) الذي معادلته الديكارتية هي $y = -x + 1$: (Δ) .

التمرين الثالث

لدينا : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 = (2^n - 1) + 3^n(1 + 2^n)$ و لدينا : $2 \equiv 0 [2]$ و $3 \equiv 1 [2]$

إذن : $2^n \equiv 0 [2]$ و $3^n \equiv 1 [2]$; $(\forall n \geq 1)$

ومنه : $(1) \begin{cases} 2^n - 1 \equiv 1 [2] \\ 2^n + 1 \equiv 1 [2] \end{cases}$ و $(2) \begin{cases} 3^n - 1 \equiv 1 [2] \\ 3^n + 1 \equiv 1 [2] \end{cases}$ (3)

من (3) و (2) نحصل على : $3^n(1 + 2^n) \equiv 1 [2]$ و من (1) و (4) نحصل على : $(2^n - 1) + 3^n(1 + 2^n) \equiv 2 [2]$

يعني : $(2^n - 1) + 3^n(1 + 2^n) \equiv 0 [2]$

ومنه : $a_n \equiv 0 [2]$

و بالتالي : a_n عدد زوجي و ذلك كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي n .

التمرين الثالث

لدينا : $a_n = 2^n + 3^n + 3^n 2^n - 1 = 2^n(3^n + 1) + (3^n - 1)$ و نعلم أن : $3 \equiv 0 [3]$. إذن : $3^n \equiv 0 [3]$

ومنه : $(3^n - 1) \equiv -1 [3]$. وكذلك : $(3^n + 1) \equiv 1 [3]$. و من (5) و (6) نجد : $2^n(3^n + 1) + (3^n - 1) \equiv (2^n - 1) [3]$

يعني : $a_n \equiv (2^n - 1) [3]$ (7)

ولدينا : $2 \equiv -1 [3]$. إذن : $2^n \equiv (-1)^n [3]$

ومنه : $(2^n - 1) \equiv (-1)^n - 1 [3]$ (8)

من المتوافقتين (7) و (8) نستنتج أن : $a_n \equiv (-1)^n - 1 [3]$ من أجل n عدد زوجي لدينا : $(-1)^{2k} - 1 = 0$

أي : $a_n \equiv 0 [3]$; $(\forall n \text{ pair})$

و من أجل n عدد فردي لدينا : $(-1)^{2k+1} - 1 = -2$

أي : $a_n \equiv -2 [3]$; $(\forall n \text{ impair})$

إذن قيم n التي يكون من أجلها $a_n \equiv 0 [3]$ هي جميع الأعداد الزوجية .

التمرين الثالث

p عدد أولي و أكبر قطعاً من العدد 3 .

إذن : $p \wedge 2 = 1$ و $p \wedge 3 = 1$

ومنه حسب Fermat : $2^{p-1} \equiv 1 [p]$ و $3^{p-1} \equiv 1 [p]$. نضرب (1) و (2) طرفاً بطرف فنحصل على : $3^{p-1} \cdot 2^{p-1} \equiv 1 [p]$

إذن : $6^{p-1} \equiv 1 [p]$

التمرين الثالث

لدينا : $2^{p-1} \equiv 1 [p]$ إذن : $3 \cdot 2^{p-1} \equiv 3 [p]$ (1)

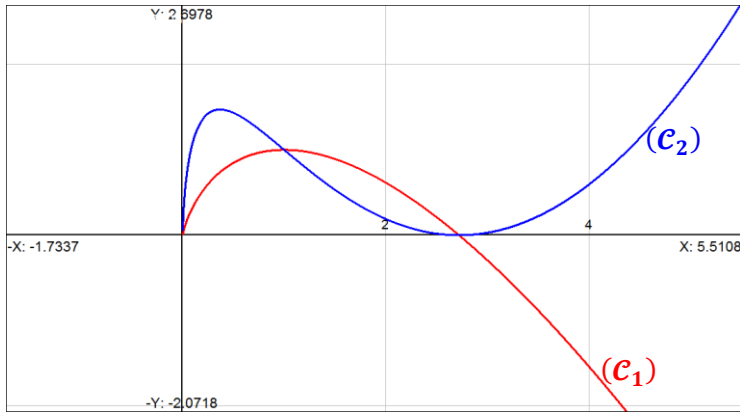
ولدينا : $3^{p-1} \equiv 1 [p]$ إذن : $2 \cdot 3^{p-1} \equiv 2 [p]$ (2)

ولدينا : $6^{p-1} \equiv 1 [p]$ إذن : $6 \cdot 6^{p-2} \equiv 1 [p]$ (3)

ولدينا : $-6 \equiv -6 [p]$ (4)

التمرين الرابع

I 3 ب



التمرين الرابع

II 1 أ

لدينا الدالة $x \rightarrow \frac{f_1(x)}{1+x^2}$ متصلة على المجال $]0; +\infty[$.

إذن فهي تقبل دالة أصلية نرمز لها بالرمز ψ وتحقق:

$$\begin{cases} \psi'(x) = \frac{f_1(x)}{1+x^2} ; \forall x > 0 \\ F(x) = \psi(1) - \psi(e^x) \end{cases}$$

و هذا يعني أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $] -\infty, 0[$.

$$\begin{aligned} \text{ولدينا : } F'(x) &= (\psi(1))' - (\psi(e^x))' = 0 - e^x \psi'(e^x) \\ &= \frac{-e^x f_1(e^x)}{1+e^{2x}} = \frac{(x-1)e^{2x}}{(1+e^{2x})} \end{aligned}$$

التمرين الرابع

II 1 ب

$$\text{لدينا : } F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{(1+e^{2x})} ; (\forall x \leq 0)$$

$$\text{و بما أن : } \left(\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} \right) > 0 ; (\forall x \in \mathbb{R})$$

فإن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(x-1)$.

$$\text{ولدينا : } x \leq 0 \Rightarrow x < 1$$

ومنه : $x-1 < 0$ أي أن : $F'(x) < 0$.

وبالتالي F دالة تناقصية قطعاً على المجال $] -\infty, 0[$.

التمرين الرابع

II 2 أ

$$t \in [e^x, 1] \Leftrightarrow e^x \leq t \leq 1 ; x > 0$$

$$\Rightarrow e^{2x} \leq t^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 + e^{2x} \leq 1 + t^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow 1 + e^{2x} \leq 1 + t^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} f_1(t) \leq \frac{f_1(t)}{1+t^2} \leq \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}} ; f_1(t) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq \int_{e^x}^1 \left(\frac{f_1(t)}{1+t^2} \right) dt \leq \int_{e^x}^1 \left(\frac{f_1(t)}{1+e^{2x}} \right) dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \left(\frac{1}{1+e^{2x}} \right) \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$$

التمرين الرابع

II 2 ب

$$\begin{aligned} \left(x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right) \right)' &= 2x \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right) + x^2 \left(\frac{-1}{2x} \right) \\ &= \frac{3x}{2} - x \ln x - \frac{x}{2} \\ &= x(1 - \ln x) = f_1(x) \end{aligned}$$

إذن الدالة $x \rightarrow x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right)$ دالة أصلية للدالة f_1 على $]0; +\infty[$

التمرين الرابع

I 2 أ

ليكن x عنصراً من المجال $]0; +\infty[$.

$$f_1'(x) = (x - x \ln x)' = 1 - (\ln x + 1) = -\ln x$$

$$x = 1 \Rightarrow f_1'(x) = 0$$

$$x > 1 \Rightarrow f_1'(x) < 0$$

$$x < 1 \Rightarrow f_1'(x) > 0$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة كما يلي :

x	0	1	e	$+\infty$
$f_1'(x)$		+	0	-
f_1	0	↗	1	↘
			0	$-\infty$

التمرين الرابع

I 2 ب

ليكن x عنصراً من المجال $]0; +\infty[$.

$$f_2'(x) = (x(1 - \ln x)^2)' = (1 - \ln x)^2 - \frac{2x}{x}(1 - \ln x)$$

$$= (1 - \ln x)^2 - 2(1 - \ln x)$$

$$= (1 - \ln x)(1 - \ln x - 2)$$

$$= (1 - \ln x)(-1 - \ln x)$$

$$= (\ln x - 1)(\ln x + 1)$$

$$= (\ln x)^2 - 1$$

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$\ln x - 1$		-	0	+
$\ln x + 1$		-	0	+
$f_2'(x)$		+	0	+
f_2	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘
			0	$+\infty$

التمرين الرابع

I 3 أ

$$\text{لدينا : } f_1(x) - f_2(x) = x(1 - \ln x) - x(1 - \ln x)^2 = x(1 - \ln x)(\ln x)$$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln x$		-	0	+
$1 - \ln x$		+	+	0
$f_1(x) - f_2(x)$		-	0	+
الوضع النسبي للمنحنيين		المنحنى (C_2) يوجد فوق المنحنى (C_1)	المنحنى (C_2) يوجد تحت المنحنى (C_1)	المنحنى (C_2) يوجد فوق المنحنى (C_1)

التمرين الرابع

II 2 ب

التمرين الرابع

د 1 III

المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ مصغورة بالعدد 0 لأنه لدينا : $u_n \geq 0$; $(\forall n \geq 1)$.
 إذن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية و مصغورة إذن فهي متقاربة .

التمرين الرابع

أ 2 III

$$u_{n+1} = \int_1^e f_{n+1}(x) dx = \int_1^e \frac{x}{u'(x)} \frac{(1 - \ln x)^n}{v(x)} dx$$

$$= [uv] - \int uv'$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} (1 - \ln x)^{n+1} \right]_1^e - \left(\frac{n+1}{2} \right) \int_1^e x^2 \left(\frac{-1}{x} \right) (1 - \ln x) dx$$

$$= \frac{-1}{2} + \left(\frac{n+1}{2} \right) u_n$$

و بالتالي : $(\forall n \geq 1)$; $u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \left(\frac{n+1}{2} \right) u_n$

التمرين الرابع

ب 2 III

لتكن \mathcal{A} مساحة الحيز المطلوب حساب مساحته بالوحدة cm^2 .
 $\mathcal{A} = \int_1^e |f_2(x) - f_1(x)| dx$ (unité)²

بما أن (C_1) يوجد فوق (C_2) على المجال $[1, e]$.
 فإن : $\forall x \in [1, e]$; $|f_2(x) - f_1(x)| = f_2(x) - f_1(x)$

إذن : $\mathcal{A} = \int_1^e f_2(x) dx - \int_1^e f_1(x) dx$ (unité)²

$$= (u_1 - u_2) (unité)^2$$

ولدينا : $(\forall n \geq 1)$; $u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \left(\frac{n+1}{2} \right) u_n$

ولدينا : $u_0 = \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$

إذن : $u_1 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} \right)$

و : $u_2 = \frac{-1}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \left(\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4} \right)$

و بالتالي : $\mathcal{A} = (u_1 - u_2) (unité)^2$

$$= \left(\frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{5}{4} \right) (2 cm)^2$$

$$= \frac{1}{2} (2 cm)^2 = 2 cm^2$$

التمرين الرابع

أ 3 III

$u_{n+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{-1}{2} + \left(\frac{n+1}{2} \right) u_n \geq 0$

$\Rightarrow \left(\frac{n+1}{2} \right) u_n \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow u_n \geq \left(\frac{1}{n+1} \right)$ (1)

$u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow \frac{-1}{2} + \left(\frac{n+1}{2} \right) u_n \leq u_n$

$\Rightarrow \frac{-1}{2} + \frac{n u_n}{2} + \frac{u_n}{2} \leq u_n$

$\Rightarrow u_n \left(\frac{n+1-2}{2} \right) \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow u_n \left(\frac{n-1}{2} \right) \leq \frac{1}{2}$; $n \geq 2$

$\Rightarrow u_n \leq \left(\frac{1}{n-1} \right)$; $n \geq 2$ (2)

التمرين الرابع

ج 2 III

لدينا : $\int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \left[x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right) \right]_{e^x}^1$

$$= \frac{3}{4} - e^{2x} \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3e^{2x}}{4} + \frac{x e^{2x}}{2}$$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{2x} = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} (te^t) \right) = 0$

إذن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{4} - \frac{3e^{2x}}{4} + \frac{x e^{2x}}{2} \right)$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}(0) + \frac{1}{2}(0) \right) = \frac{3}{4}$$

التمرين الرابع

3 III

من خلال التأطير الوارد في جواب السؤال (2) أ) نستنتج الوضعية التالية :

$$\left(\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \right) \leq F(x) \leq \left(\frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \right)$$

$\frac{3}{8}$

l

$\frac{3}{4}$

إذن : $\frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}$

التمرين الرابع

أ 1 III

$x \in [1, e] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq e \Leftrightarrow 0 \leq \ln x \leq 1$

$\Rightarrow (1 - \ln x) \geq 0$

$\Rightarrow x(1 - \ln x)^n \geq 0$; $(\forall n \geq 1)$

$\Rightarrow \int_1^e x(1 - \ln x)^n dx \geq 0$; $(\forall n \geq 1)$

$\Rightarrow \int_1^e f_n(x) dx \geq 0$; $(\forall n \geq 1)$

$\Rightarrow u_n \geq 0$; $(\forall n \geq 1)$

التمرين الرابع

ب 1 III

لدينا : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x(1 - \ln x)^{n+1} - x(1 - \ln x)^n$

$$= x(1 - \ln x)^n (-\ln x)$$

$x \in [1, e] \Rightarrow 1 \leq x \leq e$

$\Rightarrow (1 - \ln x) \geq 0$ et $(-\ln x) \leq 0$

$\Rightarrow f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$

$\Rightarrow f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

التمرين الرابع

ج 1 III

$x \in [1, e] \Rightarrow f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

$\Rightarrow \int_1^e f_{n+1}(x) dx \leq \int_1^e f_n(x) dx$

$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$; $(\forall n \geq 0)$

$\Rightarrow (u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall n \geq 2) ; \left(\frac{1}{n+1} \right) \leq u_n \leq \left(\frac{1}{n-1} \right) \quad (3)$$

التمرين الرابع

III 3 ب

$$\text{لدينا : } \left(\frac{1}{n+1} \right) \leq u_n \leq \left(\frac{1}{n-1} \right)$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0$

$$\begin{aligned} \text{ولدينا : } & (3) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n+1} \right) \leq u_n \leq \left(\frac{1}{n-1} \right) \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1} \right) \leq n u_n \leq \left(\frac{n}{n-1} \right) \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) \leq n u_n \leq \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}} \right) \\ & \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n u_n) = 1 \end{aligned}$$

التمرين الرابع

III 4 ب

الطريقة الأولى :

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } d_n &= |v_n - u_n| ; n \geq 1 \\ &= \left| \frac{-1}{2} + \frac{n}{2} v_{n-1} + \frac{1}{2} - \frac{n}{2} u_{n-1} \right| \\ &= \frac{n}{2} |v_{n-1} - u_{n-1}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{إذن : } d_n &= |v_n - u_n| = \frac{n}{2} |v_{n-1} - u_{n-1}| \\ &= \left(\frac{n}{2} \right) \left(\frac{n-1}{2} \right) |v_{n-2} - u_{n-2}| \\ &= \left(\frac{n}{2} \right) \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{n-2}{2} \right) |v_{n-3} - u_{n-3}| \\ &\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ &= \left(\frac{n}{2} \right) \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{n-2}{2} \right) \dots \left(\frac{2}{2} \right) |v_1 - u_1| \\ &= \left(\frac{n!}{2^{n-1}} \right) d_1 \end{aligned}$$

$$\text{وبالتالي : } (\forall n \geq 1) ; d_n = \left(\frac{n!}{2^{n-1}} \right) d_1$$

الطريقة الثانية (la récurrence)

$$\text{نعتبر العبارة } (P_n) \text{ التالية : } d_n = \left(\frac{n!}{2^{n-1}} \right) d_1$$

$$\text{من أجل } n = 1 \text{ لدينا } d_1 = \left(\frac{1!}{2^0} \right) d_1$$

إذن العبارة (P_1) صحيحة .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من 1 و نفترض أن (P_n) صحيحة .

$$\text{يعني : } d_n = \left(\frac{n!}{2^{n-1}} \right) d_1$$

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } d_{n+1} &= |v_{n+1} - u_{n+1}| \\ &= \left| \frac{-1}{2} + \left(\frac{n+1}{2} \right) v_n + \frac{1}{2} - \left(\frac{n+1}{2} \right) u_n \right| \\ &= \left(\frac{n+1}{2} \right) |v_n - u_n| \\ &= \left(\frac{n+1}{2} \right) d_n \\ &= \left(\frac{n+1}{2} \right) \left(\frac{n!}{2^{n-1}} \right) d_1 \\ &= \left(\frac{(n+1)n!}{2 \cdot 2^{n-1}} \right) d_1 \\ &= \left(\frac{(n+1)!}{2^n} \right) d_1 \end{aligned}$$

$$\text{إذن : } d_{n+1} = \left(\frac{(n+1)!}{2^n} \right) d_1$$

و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

وبذلك نحصل على الوضعية الترجعية التالية : $(P_1) \text{ est vraie}$ و $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; (\forall n > 1)$

إذن حسب مبدأ التراجع نقول : $(P_n) \text{ est toujours vraie}$

$$\text{يعني : } (\forall n \geq 1) : d_n = \left(\frac{n!}{2^{n-1}} \right) d_1$$

التمرين الرابع

III 4 ب

نعتبر العبارة (Q_n) المعرفة بما يلي : $(Q_n) : \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$

لنبين بالتراجع أن : $(Q_n) \text{ est vraie} ; (\forall n \geq 2)$

من أجل $n = 2$ لدينا : $\frac{2!}{2} \geq 3^0$ إذن العبارة (Q_2) صحيحة .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2 .

و نفترض أن العبارة (Q_n) صحيحة . يعني : $\frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$

$$\text{لدينا : } \frac{(n+1)!}{2} = (n+1) \frac{n!}{2} \geq (n+1) 3^{n-2}$$

$$\begin{aligned} n \geq 2 & \Rightarrow (n+1) \geq 3 \\ & \Rightarrow (n+1) 3^{n-2} \geq 3 \cdot 3^{n-2} \\ & \Rightarrow (n+1) 3^{n-2} \geq 3^{n-1} \\ & \Rightarrow \frac{(n+1)!}{2} \geq 3^{(n+1)-2} \\ & \Rightarrow (Q_{n+1}) \text{ est vraie} \end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية الترجعية التالية : $(Q_2) \text{ est vraie}$ و $(Q_n) \Rightarrow (Q_{n+1}) ; (\forall n \geq 2)$

إذن حسب مبدأ التراجع نقول : $(Q_n) \text{ est toujours vraie}$

$$\text{يعني : } (\forall n \geq 2) ; \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$$

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2 .

$$\begin{aligned} \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} &\Leftrightarrow n! \geq 3^{n-2} \cdot 2 \\ &\Leftrightarrow n! \geq \frac{3^{n-2} \cdot 2^{n-1}}{2^{n-2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{n!}{2^{n-1}} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \\ &\Leftrightarrow d_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} d_1 \end{aligned}$$

و بما أن $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$ متتالية هندسية أساسها هو العدد $\frac{3}{2}$ و هو عدد موجب و أكبر من 1 . إذن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = +\infty$

$$d_n \geq \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}}_{n \rightarrow \infty} d_1 \rightarrow +\infty$$

و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n) = +\infty$ أي أن المتتالية $(d_n)_{n \geq 2}$ متباعدة .

بالخلف نفترض أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ متقاربة .

$$d_n = |v_n - u_n|$$

بما أن $(u_n)_{n > 2}$ متتالية متقاربة و $(v_n)_{n \geq 1}$ متقاربة كذلك .

فإن $(d_n)_{n \geq 2}$ متتالية متقاربة كذلك لأن فرق متتاليتين متقاربتين

هو متتالية متقاربة .

و هذا يتناقض مع كون $\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n) = +\infty$ متتالية متباعدة حسب (4 ج) .

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2009

التمرين الأول

1

لدينا V جزء غير فارغ من $M_2(\mathbb{R})$ لأنه يضم على الأقل المصفوفة

$$O = M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ المنعدمة}$$

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من V . وليكن u و v عددين حقيقيين.

$$\begin{aligned} \text{لدينا: } uM(a,b) + vM(c,d) &= \begin{pmatrix} ua & ub \\ 4ub & ua \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} vc & vd \\ 4vd & vc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ua + vc & ub + vd \\ 4(ub + vd) & ua + vc \end{pmatrix} \\ &= M(ua + vc; ub + vd) \in V \end{aligned}$$

إذن V فضاء جزئي من الفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

نضع: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. ولتكن $M(a,b)$ مصفوفة من V

$$\text{لدينا: } M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = aI + bJ$$

إذن: $(\forall M(a,b) \in V), (\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2) : M(a,b) = aI + bJ$

وهذا يعني أن (I, J) أسرة مولدة للفضاء المتجهي V (1).

لتكن $(xI + yJ)$ تآليفة خطية منعدمة للمصفوفتين I و J .

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow xI + yJ = O \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 4y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

إذن (I, J) أسرة حرة (أو مستقلة خطيا) (2).

من (1) و (2) نستنتج أن (I, J) أساس للفضاء المتجهي V .

وبما أن عدد عناصر هذه الأسرة هو 2 فإن $\dim(V) = 2$

التمرين الأول

2

في البداية لدينا: $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4I$$

إذن: $J^2 = 4I$

لتكن $M(a,b)$ و $M(x,y)$ مصفوفتين من V .

$$\begin{aligned} \text{لدينا: } M(x,y) \times M(a,b) &= (xI + yJ)(aI + bJ) \\ &= xaI + xbJ + yaJ + ybJ^2 \\ &= xaI + xbJ + yaJ + 4ybl \\ &= (xa + 4yb)I + (xb + ya)J \\ &= M(xa + 4yb; xb + ya) \in V \end{aligned}$$

إذن: $\forall M(a,b), M(x,y) \in V ; M(x,y) \times M(a,b) \in V$

يعني أن V جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.

التمرين الأول

2

من خلال كون V فضاء متجهي جزئي من $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

نستنتج أن $(V, +)$ زمرة تبادلية.

و من خلال كون V جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.

و كون $I = M(1,0)$ حلقة واحدة وحدتها

نستنتج أن الضرب \times تبادلي و تجميعي و توزيعي بالنسبة لـ $+$ في V .

و كذلك المصفوفة $I = M(1,0)$ هي العنصر المحايد لـ \times في V .

و بالتالي $(V, +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها $I = M(1,0)$

التمرين الأول

3

$$M\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}\right) \times M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = M(0,0) = O$$

التمرين الأول

3

نعلم أن الجسم هو الحلقة الكاملة.

يعني أن الجسم هو الحلقة التي تتحقق فيها الخاصية التالية:

$$\forall a, b \in \text{Anneau} ; ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ أو } b = 0$$

من خلال السؤال (3) أ) نستنتج أن الحلقة $(V, +, \times)$ ليست كاملة نظرا

لوجود مصفوفتين غير منعدمتين لكن جدائهما منعدم.

و بالتالي $(V, +, \times)$ ليس جسما.

التمرين الأول

4

سوف نستعمل العلاقة $J^2 = 4I$ أثناء الحساب.

نضع: $X = M(a,b) = aI + bJ$

$$= X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I$$

$$= (aI + bJ)^2 - 2a(aI + bJ) + (a^2 - 4b^2)I$$

$$= a^2I + b^2J^2 + 2abJ - 2a^2I - 2abJ + (a^2 - 4b^2)I$$

$$= (a^2 + 4b^2 - 2a^2 + a^2 - 4b^2)I + (2ab - 2ab)J$$

$$= 0I + 0J = O$$

التمرين الأول

4

$$X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I = O$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 2aX = (4b^2 - a^2)I$$

$$\Leftrightarrow X \times (X - 2aI) = (4b^2 - a^2)I$$

$$\Leftrightarrow X \times \left(\frac{X - 2aI}{4b^2 - a^2}\right) = I ; (4b^2 - a^2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow X \times \left(\frac{aI + bJ - 2aI}{4b^2 - a^2}\right) = I ; (4b^2 - a^2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow X \times \left(\frac{-aI + bJ}{4b^2 - a^2}\right) = I ; (4b^2 - a^2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow X \times M\left(\frac{-a}{4b^2 - a^2}, \frac{b}{4b^2 - a^2}\right) = I ; (4b^2 - a^2) \neq 0$$

و بالتالي المصفوفة $M(a,b)$ تقبل مقلوبا في V .

و هي المصفوفة: $M\left(\frac{-a}{4b^2 - a^2}, \frac{b}{4b^2 - a^2}\right)$

التمرين الثاني

1

$$(iu - 1 - i)^2 = -u^2 + (2 - 2i)u + 2i$$

التمرين الثاني

1

$$\Delta = (-2(u + 1 - i))^2 - 4(2u^2 - 4i)$$

$$= 4(-u^2 + 2u + 2i - 2iu)$$

$$= 4(iu - 1 - i)^2$$

$$= (2(iu - 1 - i))^2$$

إذن: $z_2 = (1 + i)u - 2i$ و $z_1 = (1 - i)u + 2$

التمرين الثاني

2

ليكن z لحق المتجهة \vec{t} . و T هي الإزاحة التي متجهتها \vec{t} والتي تحول U

إلى I لدينا: $U \rightarrow T_{\vec{t}}(U) = I$

• لدينا $T_{\vec{t}}(U) = I$ إذن نرسم النقطة I باستعمال العلاقة المتجهية

$$\vec{t} = \overrightarrow{UI}$$

• نرسم المستقيم (D) المار من I و العمودي على (ΩI) و سوف

نحدد فيما بعد A و B على هذا المستقيم لأن $(\Omega I) \perp (AB)$.

• لدينا ΩAB مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين رأسه Ω و

منتصف $[AB]$. إذن $IA = IB = I\Omega$ يعني أن A و B و Ω نقط

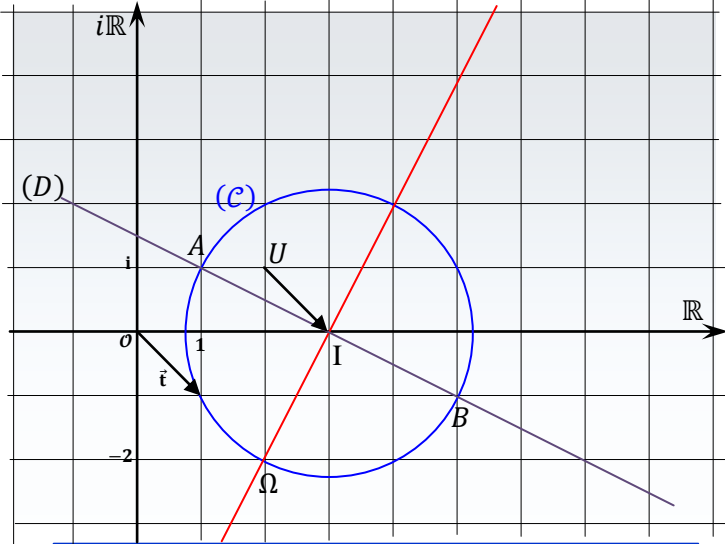
من الدائرة التي مركزها التي مركزها I و شعاعها ΩI .

• و بالتالي للحصول على A و B نرسم الدائرة (C) التي مركزها I

و شعاعها ΩI و نلاحظ أن (D) يقطع (C) في نقطتين هما A و B

يتعلق الرسم بأكمله بمعرفة العدد العقدي u . و نأخذ كمثال $u = (2 + i)$

و نحصل على الشكل التالي.



التمرين الثاني

1 3

لدينا: $z_{\overline{AB}} = z_B - z_A$

$$= ((1 - i)u + 2) - ((1 + i)u - 2i)$$

$$= -2iu + 2 + 2i$$

$$= -4 - 2ia(1 + i) + 2 + 2i$$

$$= 2(i - 1 - ia(1 + i))$$

$$= 2(i - 1 - ia + a)$$

$$= 2(i - 1)(1 - a)$$

و لدينا: $z_{\overline{AU}} = z_U - z_A$

$$= a(1 + i) - 2i - (1 + i)u + 2i$$

$$= (1 + i)(a - u)$$

$$= (1 + i)(2i - ai)$$

$$= i(1 + i)(2 - a)$$

$$= (i - 1)(2 - a)$$

التمرين الثاني

ب 3

لدينا: $z_{\overline{AB}} = 2(i - 1)(1 - a)$

$$= \frac{2(1 - a)}{(2 - a)} (i - 1)(2 - a)$$

$$= \frac{2(1 - a)}{(2 - a)} \cdot z_{\overline{AU}}$$

$$= k \cdot z_{\overline{AU}} ; k = \frac{2(1 - a)}{(2 - a)} \in \mathbb{R}$$

إذن: $z_{\overline{AB}} = k z_{\overline{AU}}$ و منه: $\overline{AB} = k \overline{AU}$

يعني أن المتجهتان \overline{AB} و \overline{AU} مستقيمتان.

و منه فإن النقط A و B و U نقط مستقيمية.

إذن حسب التعريف العقدي للإزاحة نكتب:

$$T_{\vec{t}}(U) = I \Leftrightarrow \overrightarrow{UI} = \vec{t}$$

$$\Leftrightarrow z_{\vec{t}} = z_I - z_U$$

$$\Leftrightarrow z_{\vec{t}} = \left(\frac{z_A + z_B}{2} \right) - z_U$$

$$\Leftrightarrow z_{\vec{t}} = (u - i + 1) - u$$

$$\Leftrightarrow z_{\vec{t}} = (1 - i)$$

و بالتالي: $\vec{t}(1 - i)$ هي متجهة الإزاحة T .

التمرين الثاني

ب 2

لدينا R دوران معرف بما يلي:

$$R_{\Omega(2-2i)}\left(\frac{-\pi}{2}\right) : M(z) \rightarrow M'(z')$$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب:

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' - (2 - 2i) = e^{-\frac{i\pi}{2}}(z - (2 - 2i))$$

$$\Leftrightarrow z' = -iz + 4$$

إذن: $R(M) = M' \Leftrightarrow aff(M') = -i aff(M) + 4$ (*)

من جهة أخرى لدينا: $-iz_A + 4 = -i((1 + i)u - 2i) + 4$

$$= -2 - iu(1 + i) + 4$$

$$= 2 + u(-i + 1) = z_B$$

$$z_B = -iz_A + 4$$

و باستعمال التكافؤ (*) نستنتج أن: $R(A) = B$

التمرين الثاني

ج 2

نضع: $\omega = 2 - 2i = aff(\Omega)$

$$R(A) = B \Leftrightarrow (z_B - \omega) = e^{-\frac{i\pi}{2}}(z_A - \omega)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_B - \omega}{z_A - \omega} \right) = e^{-\frac{i\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_B - \omega}{z_A - \omega} \right| = \left| e^{-\frac{i\pi}{2}} \right| \\ \arg\left(\frac{z_B - \omega}{z_A - \omega} \right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|z_B - \omega|}{|z_A - \omega|} = 1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B} \right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_A - \omega| = |z_B - \omega| \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B} \right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B} \right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \Omega AB$ مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في Ω

و بما أن I هي منتصف القطعة $[AB]$ فإنه حسب الخاصية المميزة لواسط

قطعة نستنتج أن (ΩI) هو واسط القطعة $[AB]$ و بالتالي: $(\Omega I) \perp (AB)$

التمرين الثاني

د 2

ننطلق من ورقة بيضاء و نرسم عليها المعلم (O, \vec{u}, \vec{v}) و النقطتان U

و Ω و المتجهة $\vec{t}(1 - i)$.

التمرين الثالث

3

" نسحب الكرتين من الصندوق U_3 $E_3 =$ احتمال أن يكون السحب قد تم من الصندوق U_3 مع العلم أننا حصلنا على كرتين حمراوين هو الاحتمال الشرطي التالي :

$$P_{[X=2]}(E_3) = \frac{p(E_3 \cap [X=2])}{p[X=2]} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{C_3^2}{C_n^2}}{\frac{8}{3n(n-1)}} = \frac{2}{\frac{n(n-1)}{8}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

التمرين الرابع

1 I

لدينا : $g'(x) = 2e^{-x} - 1$

- إذا كان $x = \ln 2$ فإن $g'(x) = 0$
- إذا كان $x > \ln 2$ فإن $g'(x) < 0$
- إذا كان $x < \ln 2$ فإن $g'(x) > 0$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2(1 - e^{-x}) - x$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{xe^x} \right) - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{xe^x} \right) - 1 \right) = -\infty$$

" = " $(-\infty)(2(0^- - -\infty) - 1)$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(1 - e^{-x}) - x = -\infty$

$$= 2(1 - 0) - \infty$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	$-\infty$	$1 - \ln 2$	$-\infty$

التمرين الرابع

2 I

لدينا g دالة متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $[\ln 2; +\infty[$.

إذن g دالة متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $[\ln 4, \ln 6[$

إذن g تقابل من $[\ln 4, \ln 6[$ نحو $g([\ln 4, \ln 6[)$.

ولدينا : $g([\ln 4, \ln 6[) = \left] \frac{5}{3} - \ln 6; \frac{3}{2} - \ln 4 \right[\approx \left] \frac{-1}{10}; \frac{1}{10} \right[$

نلاحظ أن : $0 \in \left] \frac{-1}{10}; \frac{1}{10} \right[$.

إذن 0 يمتلك سابقاً واحداً في المجال $[\ln 4, \ln 6[$.

أو بتعبير آخر نكتب : $(\exists! \alpha \in [\ln 4, \ln 6[) ; g(\alpha) = 0$

التمرين الرابع

2 I

لدينا g دالة تناقصية على المجال $[\ln 2; +\infty[$.

إذن g تناقصية على كل من المجالين $[\ln 2; \alpha[$ و $[\alpha; +\infty[$.

و ذلك لأن $\ln 2 < \ln 4 < \alpha < \ln 6$

إذا كان $x > \alpha$ فإن : $g(x) < g(\alpha) = 0$

أي : $\forall x > \alpha ; g(x) < 0$

إذا كان $\ln 2 < x < \alpha$ فإن : $\ln 2 < x < \alpha$

التمرين الثالث

1

عندما نسحب كرتين من أحد الصناديق فإنه يُحتمل أن نسحب :

- كرتين حمراوين .
- أو كرة حمراء و الأخرى سوداء .
- أو كرتين سوداوين .

إذن قيم المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2 .

أو بتعبير آخر نكتب : $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

بحيث Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية

التمرين الثالث

2

عندما نسحب كرتين من أحد الصناديق فإنه توجد :

- C_3^1 إمكانية لاختيار الصندوق
- و C_n^2 إمكانية لسحب كرتين في آن واحد من بين n كرة .

إذن : $card(\Omega) = C_3^1 \cdot C_n^2 = \frac{3n!}{2!(n-2)!} = \frac{3n(n-1)}{2}$

الحدث $[X=2]$ هو الحصول على كرتين حمراوين . و من أجل ذلك توجد :

- 0 إمكانية لسحب الكرتين من الصندوق U_1
- إمكانية واحدة لسحب الكرتين من الصندوق U_2
- C_3^2 إمكانية لسحب الكرتين من الصندوق U_3

إذن : $p[X=2] = \frac{card[X=2]}{card(\Omega)} = \frac{0+1+C_3^2}{\frac{3n(n-1)}{2}} = \frac{8}{3n(n-1)}$

التمرين الثالث

2 ب

الحدث $[X=1]$ هو الحصول على كرة حمراء واحدة و الأخرى بطبيعة الحال ستكون سوداء . و من أجل ذلك توجد :

- $C_1^1 \times C_{n-1}^1$ إمكانية لسحب كرة حمراء و الأخرى سوداء من U_1
- $C_2^1 \times C_{n-2}^1$ إمكانية لسحب كرة حمراء و الأخرى سوداء من U_2
- $C_3^1 \times C_{n-3}^1$ إمكانية لسحب كرة حمراء و الأخرى سوداء من U_3

إذن عدد الإمكانيات التي نحصل فيها على كرة حمراء و الأخرى سوداء هو

$$card[X=1] = (C_1^1 \times C_{n-1}^1) + (C_2^1 \times C_{n-2}^1) + (C_3^1 \times C_{n-3}^1) = (6n - 14)$$

و بالتالي : $p[X=1] = \frac{card[X=1]}{card(\Omega)} = \frac{6n-14}{\frac{3n(n-1)}{2}} = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

التمرين الثالث

2 ج

في البداية وجب علينا حساب احتمال الحدث $[X=0]$.

نعلم أن : $p[X=0] + p[X=1] + p[X=2] = 1$

إذن : $p[X=0] = 1 - p[X=1] - p[X=2]$

$$= 1 - \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)} - \frac{8}{3n(n-1)}$$

$$= \frac{3n^2 - 15n + 20}{3n(n-1)}$$

نضع : $x_1 = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$ و $x_0 = \frac{3n^2 - 15n + 20}{3n(n-1)}$

و : $x_2 = \frac{8}{3n(n-1)}$

إذن قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعروف بما يلي :

$$P_X : \{0,1,2\} \rightarrow [0,1]$$

$$k \rightarrow P_X(k) = x_k$$

التمرين الرابع

3 I

نعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $h(x) = 2(1 - e^{-x})$
 لدينا h دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $[1, \alpha[$.
 لأن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; h'(x) = 2e^{-x} > 0$
 و لدينا : $h([1, \alpha[) \subset [1, \alpha[$ و $u_0 = 1 \in [1, \alpha[$
 لدينا $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية معرفة بما يلي :

$\begin{cases} u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n}) = h(u_n) \\ u_0 = 1 \end{cases}$
 بما أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية و مكبورة بالعدد α
 (لأن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n < \alpha$)
 فإن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و نهايتها l تحقق $h(l) = l$
 أو بتعبير آخر النهاية l تحقق : $g(l) = 0$
 المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α من المجال $] \ln 4 ; \ln 6 [$
 و بالتالي : $l = \lim(u_n) = \alpha$

التمرين الرابع

1 II

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - e^x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{x}{2} \right)^2 \right) \\ &= \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ u = \frac{x}{2}}} \left(\frac{1}{4u^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{e^u}{u} \right)^2 \right) \\ &= (0 - \infty) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - e^x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-1}{x} \right) \left(\frac{e^x - e^0}{x - 0} \right) \\ &= (-\infty)(1) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - e^x}{x^3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{27} \left(\frac{x}{3} \right)^3 \right) \\ &= \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ u = \frac{x}{3}}} \left(\frac{1}{27u^3} - \frac{1}{27} \left(\frac{e^u}{u} \right)^3 \right) = -\infty \end{aligned}$$

التمرين الرابع

2 II

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow 2(1 - e^{-\alpha}) = \alpha \\ &\Leftrightarrow e^\alpha = \frac{2}{2 - \alpha} \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - e^\alpha}{\alpha^2} = \frac{1 - \left(\frac{2}{2 - \alpha} \right)}{\alpha^2} = \frac{-\alpha}{\alpha^2(2 - \alpha)} \\ &= \frac{1}{\alpha(\alpha - 2)} \\ &\Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha - 2)} \end{aligned}$$

أي : $\forall x \in] \ln 2 ; \alpha [; g(x) > 0$
 و لدينا g دالة تزايدية على المجال $] 0 ; \ln 2 [$.
 إذا كان $0 < x < \ln 2$ فإن : $0 = g(0) < g(x) < g(\ln 2)$
 يعني : $\forall x \in] 0 ; \ln 2 [; g(x) > 0$
 نستنتج إذن جدول إشارة الدالة g كما يلي :

x	0	$\ln 2$	α	$+\infty$
$g(x)$	0	+	0	-

التمرين الرابع

3 I

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $1 \leq u_n < \alpha$; $(\forall n \in \mathbb{N})$
 من أجل $n = 0$ لدينا $1 \leq u_0 = 1 < \alpha$
 و هذا يعني أن العبارة (P_0) صحيحة .
 ليكن n عنصراً من \mathbb{N} و نفترض أن (P_n) صحيحة .

$$\begin{aligned} (P_n) \text{ est vraie} &\Rightarrow 1 \leq u_n < \alpha \\ &\Rightarrow -\alpha < -u_n \leq -1 \\ &\Rightarrow e^{-\alpha} < e^{-u_n} \leq e^{-1} \\ &\Rightarrow \frac{-1}{e} \leq -e^{-u_n} < e^{-1} \\ &\Rightarrow 2 \left(1 - \frac{1}{e} \right) \leq 2(1 - e^{-u_n}) < 2(1 - e^{-\alpha}) \\ g(\alpha) = 0 &\Rightarrow 2(1 - e^{-\alpha}) - \alpha = 0 \\ &\Rightarrow 2(1 - e^{-\alpha}) = \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e > 2 &\Rightarrow \frac{1}{e} < \frac{1}{2} \text{ : لدينا} \\ &\Rightarrow \frac{-1}{e} > \frac{-1}{2} \\ &\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{e} \right) > \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow 2 \left(1 - \frac{1}{e} \right) > 1 \\ &\Rightarrow 1 \leq 2(1 - e^{-u_n}) < \alpha \\ &\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < \alpha \\ &\Rightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie} \end{aligned}$$

لقد حصلنا لحد الآن على الوضعية التالية : $(P_{n+1}) \text{ est vraie}$
 $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N}$

إذن حسب مبدأ التراجع : $(P_n) \text{ est vraie} ; (\forall n \in \mathbb{N})$
 يعني : $1 \leq u_n < \alpha ; (\forall n \in \mathbb{N})$

التمرين الرابع

3 I

$$u_{n+1} - u_n = 2(1 - e^{-u_n}) - u_n = g(u_n)$$

التمرين الرابع

3 I

نعلم أن g دالة موجبة على المجال $] \ln 2 ; \alpha [$.
 إذن g دالة موجبة قطعاً على $[1, \alpha[$. لأن : $[1, \alpha[\subset] \ln 2 ; \alpha [$
 و نعلم كذلك أن $u_n \in [1, \alpha[; (\forall n \in \mathbb{N})$
 إذن : $g(u_n) > 0 ; (\forall n \in \mathbb{N})$
 يعني : $u_{n+1} - u_n > 0 ; (\forall n \in \mathbb{N})$
 أي : $u_{n+1} > u_n ; (\forall n \in \mathbb{N})$
 إذن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تزايدية قطعاً .

التمرين الرابع

ب 1 III

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعاً . $x \leq t \leq 2x \Leftrightarrow e^x \leq e^t \leq e^{2x}$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t} ; \text{ avec } t > 0$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} \left(\frac{e^x}{t}\right) dt \leq \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt \leq \int_x^{2x} \left(\frac{e^{2x}}{t}\right) dt$$

car ces fonctions sont continues
et aussi $x < 2x$

$$\Rightarrow e^x [\ln t]_x^{2x} \leq \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt \leq e^{2x} [\ln t]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt \leq e^{2x} \ln 2 \quad (*)$$

التمرين الرابع

ج 1 III

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \ln 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x} \ln 2 = \ln 2$

إذن التأيير يصبح :

$$\left(\frac{e^x \ln 2}{x \rightarrow 0^+}\right) \leq \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt \leq \left(\frac{e^{2x} \ln 2}{x \rightarrow 0^+}\right)$$

$\ln 2$

$\ln 2$

إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt = \ln 2$$

ولدينا : $F(x) = \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x}\right) - \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x}\right) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt$$

$$= \lim_{\substack{u \rightarrow 0^+ \\ u=2x}} \left(\frac{e^u - e^0}{u - 0}\right) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - e^0}{x - 0}\right) - \ln 2$$

$$= e^0 - e^0 - \ln 2$$

$$= -\ln 2 = F(0)$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0)$

أي F دالة متصلة على اليمين في الصفر .

التمرين الرابع

أ 2 III

$x \leq t \leq 2x \Leftrightarrow (1 - e^{2x}) \leq (1 - e^t) \leq (1 - e^x)$

سوف نهتم فقط بالشق الأيمن : $(1 - e^t) \leq (1 - e^x)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1 - e^t}{t^2}\right) \leq \left(\frac{1 - e^x}{t^2}\right) ; t \geq x > 0$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} \left(\frac{1 - e^t}{t^2}\right) dt \leq (1 - e^x) \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t^2}\right) dt$$

car la continuité est vérifiée
et aussi $x < 2x$

$$\Rightarrow F(x) \leq (1 - e^x) \left[\frac{-1}{t}\right]_x^{2x}$$

التمرين الرابع

ب 2 II

$$f'(x) = \left(\frac{1 - e^x}{x^2}\right)' = \frac{-x^2 e^x - 2x(1 - e^x)}{x^4}$$

$$= \frac{-x^2 e^x - 2x e^x (e^{-x} - 1)}{x^4}$$

$$= \frac{x e^x (2(1 - e^{-x}) - x)}{x^4}$$

$$= \frac{e^x g(x)}{x^3}$$

نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $g(x)$.

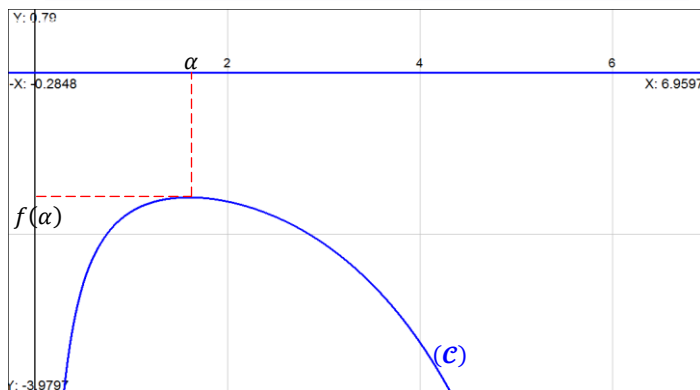
لأن : $(\forall x > 0) ; \frac{e^x}{x^3} > 0$

لدينا $g(x)$ تنعدم في α إذن $f'(x)$ تنعدم كذلك في α .
نستنتج جدول إشارة f انطلاقاً من جدول تغيرات الدالة g :

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	0	+	-
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$	$-\infty$

التمرين الرابع

3 II



التمرين الرابع

أ 1 III

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعاً . لدينا :

$$F(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{1 - e^t}{t^2}\right) dt = \int_x^{2x} \left(\frac{-1}{\frac{t^2}{v'}}\right) \cdot \frac{(e^t - 1)}{u}$$

$$= [uv] - \int vu'$$

$$= \left[\frac{e^t - 1}{t}\right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t}\right) e^t dt$$

$$= \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x}\right) - \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt$$

التمرين الرابع

III 4 I

لدينا F متصلة وقابلة للاشتقاق على كل مجال على شكل $]0, x[$ حيث $x > 0$

إذن حسب مبرهنة التزايد المتناهية (TAF) نستنتج أن :

$$\exists \omega \in]0, x[; \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(\omega)$$

$$\exists \omega \in]0, x[; (F(x) - F(0)) = \left(\frac{-x}{2}\right) \left(\frac{e^\omega - 1}{\omega}\right)^2$$

و لدينا كذلك الدالة Exp متصلة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} بأكمله .

نستطيع تطبيق (TAF) على أي مجال يوجد ضمن \mathbb{R} .

نختار بالضبط المجال $[0, \omega]$ نحصل على :

$$\exists c \in]0, \omega[; \left(\frac{e^\omega - 1}{\omega}\right) = e^c (**)$$

من النتيجتين (*) و (**) نستنتج أن :

$$\exists c \in]0, \omega[\subset]0, x[; F(x) - F(0) = \frac{-x}{2} e^{2c}$$

التمرين الرابع

III 4 I

$$0 < c < x \Leftrightarrow e^0 < e^{2c} < e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-x}{2}\right) e^{2x} < \left(\frac{-x}{2}\right) e^{2c} < \left(\frac{-x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-e^{2x}}{2}\right) < \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} < \left(\frac{-1}{2}\right) \quad (\blacksquare)$$

التمرين الرابع

III 4 I

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^{2x}}{2} = \frac{-1}{2}$ إذن التأطير ■ يصبح :

$$\left(\frac{-e^{2x}}{2}\right) < \left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0}\right) < \left(\frac{-1}{2}\right)$$

$x \rightarrow 0^+ \qquad \qquad \qquad x \rightarrow 0^+$

نستنتج إذن حسب خاصيات الترتيب و النهايات أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0}\right) = \frac{-1}{2} \in \mathbb{R}$$

و بالتالي F دالة قابلة للاشتقاق على يمين الصفر و العدد المشتق على اليمين

هو $\frac{-1}{2}$. أو بتعبير أجمل نكتب : $F'_d(0) = \frac{-1}{2}$.

$$\Rightarrow F(x) \leq (1 - e^x) \left(\frac{-1}{2x} + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow F(x) \leq \left(\frac{1 - e^x}{2x}\right) \quad (***)$$

التمرين الرابع

III 2 I

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - e^x}{2x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2x}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{e^x}{x}\right) = -\infty$$

0 +∞

↓ ↓

$$F(x) \leq \left(\frac{1 - e^x}{2x}\right)$$

↓

$x \rightarrow +\infty$

-∞

إذن التأطير (***) يصبح :

و منه حسب خاصيات الترتيب و النهايات نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$

التمرين الرابع

III 3 I

ليكن a عنصرا من المجال $]0, +\infty[$.

$$F(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{1 - e^t}{t^2}\right) dt$$

لدينا :

$$= \int_a^{2x} \left(\frac{1 - e^t}{t^2}\right) dt - \int_a^x \left(\frac{1 - e^t}{t^2}\right) dt$$

لدينا الدالة $t \rightarrow \left(\frac{1 - e^t}{t^2}\right)$ متصلة على المجال $]0; +\infty[$ لأنها عبارة

عن خارج دالتين متصلتين على المجال $]0; +\infty[$. مع $t^2 \neq 0$.

إذن $t \rightarrow \left(\frac{1 - e^t}{t^2}\right)$ تقبل عدة دوال أصلية على المجال $]0; +\infty[$.

و بالخصوص تقبل دالة أصلية وحيدة نرمز لها بالرمز h و هي معرفة بما يلي :

$$\begin{cases} h(a) = 0 \\ h(x) = \int_a^x \left(\frac{1 - e^t}{t^2}\right) dt ; (\forall x > 0) \\ h'(x) = \left(\frac{1 - e^x}{x^2}\right) ; (\forall x > 0) \end{cases}$$

$$F(x) = \int_a^{2x} \left(\frac{1 - e^t}{t^2}\right) dt - \int_a^x \left(\frac{1 - e^t}{t^2}\right) dt$$

إذن :

$$= h(2x) - h(x)$$

و بما أن الدالتين h و $x \rightarrow 2x$ قابلتين للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$

فإن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$

حيث $h(]0; +\infty[) \subset]0; +\infty[$.

إذن : $F'(x) = (h(2x) - h(x))'$

$$= 2 h'(2x) - h'(x)$$

$$= 2 \left(\frac{1 - e^{2x}}{(2x)^2}\right) - \left(\frac{1 - e^x}{x^2}\right)$$

$$= \frac{2 - e^{2x} - 4(1 - e^x)}{(2x)^2} = \frac{-2(e^{2x} - 2e^x + 1)}{4x^2}$$

$$= \frac{-1(e^x - 1)^2}{2 \left(\frac{x}{e^x}\right)^2}$$

و بالتالي : $(\forall x > 0) ; F'(x) = \frac{-1(e^x - 1)^2}{2 \left(\frac{x}{e^x}\right)^2}$

أجوبة امتحان الدورة العادية 2010

التمرين الأول

1 I I I I

لنبين أن * قانون تبادلي في المجموعة I .

ليكن a و b عنصرين من I .

لدينا : $a * b = e^{(\ln a)(\ln b)} = e^{(\ln b)(\ln a)} = b * a$

إذن : $\forall (a, b) \in I^2 ; a * b = b * a$

أي أن القانون * تبادلي في المجموعة I .

لنبين أن * قانون تجميعي في المجموعة I .

لتكن a و b و c ثلاثة عناصر من المجموعة I .

لدينا : $a * (b * c) = e^{(\ln a)(\ln(b * c))} = e^{(\ln a)(\ln b)(\ln c)}$
 $= e^{(\ln(a * b))(\ln c)} = (a * b) * c$

إذن : $\forall (a, b, c) \in I^3 ; a * (b * c) = (a * b) * c$

أي أن القانون * تجميعي في المجموعة I .

التمرين الأول

2 I I I I

ليكن ε العنصر المحايد للقانون * في المجموعة I .

إذن : $(\forall a \in I) ; a * \varepsilon = \varepsilon * a = a$

لتحديد القيمة العددية لـ ε ننطلق من إحدى المتساويتين .

لدينا : $a * \varepsilon = a \Leftrightarrow e^{(\ln a)(\ln \varepsilon)} = a$

$\Leftrightarrow (\ln a)(\ln \varepsilon) = (\ln a)$

$\Leftrightarrow \varepsilon = e \in]0, +\infty[= I$

إذن e هو العنصر المحايد للقانون * في المجموعة I .

التمرين الأول

3 I I I I

$a, b \in I \setminus \{1\} \Leftrightarrow a \neq 1 \text{ et } b \neq 1$

$\Leftrightarrow \ln a \neq 0 \text{ et } \ln b \neq 0$

$\Leftrightarrow (\ln a)(\ln b) \neq 0$

$\Leftrightarrow e^{(\ln a)(\ln b)} \neq 1 \text{ et } e^{(\ln a)(\ln b)} > 0$

$\Leftrightarrow e^{(\ln a)(\ln b)} \in I \setminus \{1\}$

$\Leftrightarrow a * b \in I \setminus \{1\}$

نستنتج إذن أن : $\forall (a, b) \in I \setminus \{1\} ; a * b \in I \setminus \{1\}$

تركيب داخلي في المجموعة I \setminus \{1\} .

تبادلية و تجميعية القانون * في المجموعة I \setminus \{1\} نستنتجها من خلال

المجموعة I لأن I \setminus \{1\} جزء من I .

بما أن القانون * تبادلي و تجميعي في I فإن I تبادلي و تجميعي كذلك في

المجموعة I \setminus \{1\} . و ذلك لأن I \setminus \{1\} \subset I .

لدينا e هو العنصر المحايد للقانون * في المجموعة I .

إذن حسب وحدانية العنصر المحايد نستنتج أن e هو نفسه العنصر المحايد

للقانون * في المجموعة I \setminus \{1\} . و ذلك لسببين و هما وحدانية العنصر

المحايد و e \neq 1 أي e \in I \setminus \{1\} .

لندرس الآن التماثل في المجموعة I \setminus \{1\} .

ليكن a عنصرا من I \setminus \{1\} و x مماثله بالنسبة لـ * في I \setminus \{1\} .

$\Rightarrow a * x = e$

$\Rightarrow e^{(\ln a)(\ln x)} = e$

$\Rightarrow (\ln a)(\ln x) = 1$

$\Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{\ln a}$

من جهة أخرى لدينا : $a \in I \setminus \{1\} \Rightarrow a \neq 1$

$\Rightarrow \ln a \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\ln a} \neq 0$

$\Rightarrow e^{(\frac{1}{\ln a})} \neq 1 \text{ et } e^{(\frac{1}{\ln a})} > 0$

$\Rightarrow x \in I \setminus \{1\}$

نستنتج إذن أن كل عنصر a من I \setminus \{1\} يقبل ممثلا من I \setminus \{1\}

و هو العنصر $e^{(\frac{1}{\ln a})}$.

الخلاصة : لقد تمكنا من أن نبين أن * قانون تركيب داخلي في المجموعة I \setminus \{1\}

و يمتلك عنصرا محايدا و هو e و كل عنصر a يقبل ممثلا و هو $e^{(\frac{1}{\ln a})}$

إذن (I \setminus \{1\}, *) **زمرة تبادلية** .

• * تبادلي

- * قانون تركيب داخلي
- * تجميعي
- * يقبل عنصرا محايدا
- كل عنصر يقبل ممثلا

التمرين الأول

3 I I I I

في البداية نلاحظ أن $I \setminus \{1\} \subset]1, +\infty[$.

و ذلك لأن : $I \setminus \{1\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

و لدينا كذلك : $]1, +\infty[\neq \emptyset$

إذن $]1, +\infty[$ جزء غير فارغ من المجموعة I \setminus \{1\} .

يكفي الآن أن نبرهن على أنه إذا كان a و b عنصرين من المجال

$]1, +\infty[$ فإن $a * b' \in]1, +\infty[$.

بحيث b' هو مقلوب b في المجموعة I \setminus \{1\} .

ننطلق من الكتابة : $a * b' = a * e^{(\frac{1}{\ln b})} = e^{\ln a \cdot \ln(e^{(\frac{1}{\ln b})})}$
 $= e^{(\ln a) \cdot (\frac{1}{\ln b})} = e^{\frac{\ln a}{\ln b}}$

من جهة أخرى . لدينا : $a > 1 \text{ et } b > 1$

$\Leftrightarrow \ln a > 0 \text{ et } \ln b > 0$

$\Rightarrow \frac{\ln a}{\ln b} > 0 \Rightarrow e^{(\frac{\ln a}{\ln b})} > 1$

$\Rightarrow e^{(\frac{\ln a}{\ln b})} \in]1, +\infty[$

$\Rightarrow a * b' \in]1, +\infty[$

إذن : $\forall a, b \in]1, +\infty[; a * b' \in]1, +\infty[$

نحن الآن أمام الوضعية التالية :

• (I \setminus \{1\}, *) زمرة تبادلية

• $]1, +\infty[$ جزء غير فارغ من I \setminus \{1\}

• $\forall (a, b) \in]1, +\infty[; a * b' \in]1, +\infty[$

نستنتج إذن حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية أن (]1, +\infty[, *)

زمرة جزئية للزمرة (I \setminus \{1\}, *) .

التمرين الأول

4 I I I I

لتكن a و b و c ثلاثة عناصر من المجموعة I .

يكون * توزيعيا بالنسبة للقانون × إذا كان :

$\{ a * (b \times c) = (a * b) \times (a * c)$

$\{ (a \times b) * c = (a * c) \times (b * c)$

لدينا : $a * (b \times c) = e^{(\ln a)(\ln(bc))} = e^{(\ln a)(\ln b + \ln c)}$

$= e^{(\ln a)(\ln b) + (\ln a)(\ln c)}$

$= e^{(\ln a)(\ln b)} \times e^{(\ln a)(\ln c)}$

$= e^{(\ln a)(\ln b)} \times e^{(\ln a)(\ln c)}$

$= (a * b) \times (a * c)$

و نستنتج المتساوية الثانية من خلال تبادلية القانونين × و * أو باستعمال

نفس الطريقة المبينة أعلاه .

و بالتالي * قانون توزيعي بالنسبة للقانون × .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + iy = 2 + i \\ x + iy = -2 - i \\ x + iy = -2 - i \\ x + iy = 2 + i \end{cases}$$

و بالتالي $(3 + 4i)$ يقبل جذرين مربعين و هما $(2 + i)$ و $(-2 - i)$

التمرين الثاني

ب 1

لنحل في \mathbb{C} المعادلة : $4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$ (E)

بعد حساب المميز Δ نجد : $\Delta = 4(3 + 4i)$

لدينا حسب السؤال (1) أ) : $(3 + 4i)$ يقبل جذرين مربعين و هما :

$(2 + i)$ و $(-2 - i)$.

نختار $(2 + i)$ فنحصل على $\Delta = [2(2 + i)]^2$.

إذن المعادلة (E) تقبل الحلين a و b المعرفين بما يلي : $b = \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}$

و $a = i - \frac{1}{2}$

عندما نختار الجذر المربع الثاني للعدد العقدي $(3 + 4i)$

نحصل على نفس النتيجة .

التمرين الثاني

أ 2

لدينا : $a(1 - i) = (i - \frac{1}{2})(1 - i)$

$$= i + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i = b$$

إذن : $\frac{b}{a} = (1 - i)$

التمرين الثاني

ب 2

لدينا : $\frac{b - a}{0 - a} = \frac{-b}{a} + 1 = -(1 - i) + 1 = i = e^{\frac{i\pi}{2}}$

$$\frac{b - a}{0 - a} = e^{\frac{i\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{b - a}{0 - a} \right| = \left| e^{\frac{i\pi}{2}} \right| \\ \arg\left(\frac{b - a}{0 - a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{AO} = 1 \\ \arg(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AO \\ \arg(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

و بالتالي : المثلث AOB متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة O .

التمرين الثاني

أ 3

لدينا R دوران معرف بما يلي : $R_C\left(\frac{\pi}{2}\right) : B \rightarrow D$

$$R(B) = D \Leftrightarrow (d - c) = e^{\frac{i\pi}{2}}(b - c)$$

$$\Leftrightarrow d = c + i(b - c)$$

$$\Leftrightarrow d = c + ib - ic$$

$$\Leftrightarrow c(1 - i) = d - ib$$

$$\Leftrightarrow c(1 - i) = d - i\left(\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow c(1 - i) = d + \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$$

$$\Leftrightarrow c = \left(\frac{1}{1 - i}\right)d + \left(\frac{\frac{3}{2} - \frac{i}{2}}{1 - i}\right)$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{2}(1 + i)d + \left(1 + \frac{i}{2}\right)$$

التمرين الأول

ب 4 I

لدينا I جزء غير فارغ من المجموعة \mathbb{R}^* .

ليكن x و y عنصرين من المجال I .

$$(x, y) \in I^2 \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } y > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} > 0$$

$$\Rightarrow x \times y^{-1} > 0$$

$$\Rightarrow x \times y^{-1} \in I$$

$$\Rightarrow (I, \times) \text{ زمرة جزئية للزمرة } (\mathbb{R}^*, \times)$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

• زمرة (I, \times) زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد 1

• زمرة $(I \setminus \{1\}, *)$.

• * توزيعي بالنسبة للقانون \times .

إذن من خلال هذه الوضعية نستنتج أن : $(I, \times, *)$ جسم تبادلي .

التمرين الأول

ب 1 II

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

التمرين الأول

ب 2 II

نفترض أن A تقبل مقلوبا A^{-1} في المجموعة $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

إذن : $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$

بحيث \times هو ضرب المصفوفات في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

و I هي المصفوفة الوحدة : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ننطلق من الكتابة : $A \times A^{-1} = I$ و نضرب طرفيها في A^2

نحصل على : $A^3 \times A^{-1} = A^2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ يعني :}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ أي :}$$

و هذا تناقض واضح .

و بالتالي المصفوفة A لا تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

التمرين الثاني

أ 1

ليكن العدد العقدي $x + iy$ جذرا مربعا للعدد العقدي $3 + 4i$.

$$\Leftrightarrow (x + iy)^2 = 3 + 4i$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + i(2xy) = 3 + 4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 = \frac{4}{y^2} ; y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{y^2} - y^2 = 3 \\ x^2 = \frac{4}{y^2} ; y \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^4 + 3y^2 - 4 = 0 \\ x^2 = \frac{4}{y^2} ; y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 3t - 4 = 0 ; t = y^2 \\ x^2 = \frac{4}{t} ; t \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = 1 \text{ et } t_2 = -4 \\ t_1 = y_1^2 \text{ et } t_2 = y_2^2 \\ x_1^2 = \frac{4}{t_1} \text{ et } x_2^2 = \frac{4}{t_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 \Rightarrow x = -2 \\ y = 2i \Rightarrow x = -i \\ y = -2i \Rightarrow x = i \end{cases}$$

التمرين الثالث

2

ليكن p عددا أوليا و k و n عددين صحيحين طبيعيين .
 $n^2 + 1 \equiv 0 [p] \Leftrightarrow n^2 \equiv -1 [p]$
 $\Leftrightarrow (n^2)^{(عدد فردي)} \equiv (-1)^{(عدد فردي)} [p]$
 $\Leftrightarrow (n^2)^{(2k+1)} \equiv -1 [p]$

التمرين الثالث

2

$(n^2)^{(2k+1)} \equiv -1 [p] \Leftrightarrow (\exists u \in \mathbb{Z}) ; (n^2)^{2k+1} + 1 = pu$
 $\Leftrightarrow pu + n \underbrace{(-n^{4k})}_v = 1$
 $\Leftrightarrow (\exists u, v \in \mathbb{Z}) ; pu + nv = 1$
 $\Leftrightarrow n \wedge p = 1 ; d'après Bezout$

التمرين الثالث

2

لدينا p عدد أولي . و $n \wedge p = 1$.
 إذن حسب Fermat نكتب : $n^{p-1} \equiv 1 [p]$.
 ونعلم أن : $p = 4k + 3$. إذن : $(n^2)^{2k+1} \equiv 1 [p]$.

التمرين الثالث

2

باستعمال البرهان بالخلف نفترض وجود n حيث $n^2 + 1 \equiv 0 [p]$.
 لدينا : $\begin{cases} (n^2)^{2k+1} \equiv -1 [p] \\ (n^2)^{2k+1} \equiv 1 [p] \end{cases}$

إذن : $[p] \equiv -1$ أي أن p قاسم للعدد 2 .
 وبما أن p أولي و يقسم العدد الأولي 2 فإن $p = 2$ أي $4k + 3 = 2$.
 وهذا بطبيعة الحال مستحيل و تناقض في وضوح النهار .
 إذن ما افترضناه كان خاطئا .
 يعني لا وجود لعدد صحيح طبيعي n يحقق $n^2 + 1 \equiv 0 [p]$.

التمرين الرابع

1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x e^{-x^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x} \right) \left(\frac{1}{e^{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ u=x^2}} \left(\frac{4}{\sqrt{u}} \right) \left(\frac{1}{e^u} \right)$$

$$= 0 \times 0 = 0$$

التمرين الرابع

2

ليكن x عنصرا من المجموعة \mathbb{R} .
 لدينا : $f'(x) = 4e^{-x^2} + (4x)(-2xe^{-x^2})$
 $= (1 - 2x^2)(4e^{-x^2})$
 و بما أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 4e^{-x^2} > 0$.
 فإن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $(1 - 2x^2)$.
 إذا كان : $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن : $f'(x) = 0$
 إذا كان : $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن : $f'(x) < 0$
 إذا كان : $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن : $f'(x) > 0$
 و نلخص النتائج المحصل عليها في الجدول التالي :

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f	0	$\frac{2\sqrt{2}}{e}$	0

التمرين الثاني

3

لدينا الإزاحة معرفة بما يلي : $T_{AO} : D \rightarrow L$
 $T_{AO}(D) = L \Leftrightarrow \overline{DL} = \overline{AO}$
 $\Leftrightarrow (l - d) = (0 - a)$
 $\Leftrightarrow \left(l + (i - 1)c + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -a$
 $\Leftrightarrow l + (i - 1)c + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2} - i$
 $\Leftrightarrow l = (1 - i)c - \frac{i}{2} - 1$

التمرين الثاني

3

لدينا : $\frac{l - c}{a - c} = \frac{(1 - i)c - 1 - \frac{i}{2} - c}{i - \frac{1}{2} - c}$
 $= \frac{-ic - 1 - \frac{i}{2}}{i - \frac{1}{2} - c} = \frac{i(-c + i - \frac{1}{2})}{(i - \frac{1}{2} - c)}$
 $= i = e^{\frac{i\pi}{2}}$
 من جهة أخرى : $\frac{l - c}{a - c} = e^{\frac{i\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{l - c}{a - c} \right| = \left| e^{\frac{i\pi}{2}} \right| \\ \arg \left(\frac{l - c}{a - c} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{CL}{CA} = 1 \\ \frac{CL}{(\overline{CA}, \overline{CL})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} CL = CA \\ \frac{CL}{(\overline{CA}, \overline{CL})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

و بالتالي ALC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة C .

التمرين الثالث

1

الإجابة على هذا السؤال سوف نستعمل الخاصيتين التاليتين :
الخاصية الأولى : إذا كان العدد a قاسما مشتركا للعددين b و c فإنه يقسم كل تاليفة لهما .

أو بتعبير آخر : $\left\{ \frac{a}{b} \Rightarrow (\forall u, v \in \mathbb{Z}) ; a/(ub + vc) \right.$

الخاصية الثانية : (*un premier qui divise un produit*)

إذا كان p عددا أوليا و يقسم الجداء ab فإن p يقسم أحد طرفي هذا الجداء .

أو بتعبير آخر : $\left\{ \begin{matrix} p \in \mathbb{P} \\ p/ab \Rightarrow (p/a) \text{ ou bien } (p/b) \end{matrix} \right.$

ننتقل من الكتابة : $m^2 + 1 \equiv 0 [5]$ إذن : $5/(m^2 + 1)$.
 ونعلم أن $5/(-5)$ إذن حسب الخاصية الأولى $5/(m^2 + 1 - 5)$.
 يعني : $5/(m^2 - 4)$ أي : $5/(m - 2)(m + 2)$.
 بما أن 5 عدد أولي فإنه حسب الخاصية الثانية نستنتج أن : $5/(m + 2)$ أو $5/(m - 2)$.

و باستخدام الخاصية الأولى نجد : $5/(m + 2 - 5)$ أو $5/(m - 2)$.
 يعني : $5/(m - 2)$ أو $5/(m - 3)$.
 يعني : $m \equiv 2 [5]$ أو $m \equiv 3 [5]$.
 في المجموعة $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ نكتب $m \in \{2; 3\}$.

لدينا : $f'_n(x) = 4e^{-x^2} x^{n-1}(n - 2x^2)$;
 بما أن : $(\forall n > 1) ; (\forall x \in \mathbb{R}) : 4e^{-x^2} x^{n-1} \geq 0$;
 فإن إشارة $f'_n(x)$ تتعلق فقط بإشارة $(n - 2x^2)$.

إذا كان $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$: فإن $f'_n(x) = 0$

إذا كان $x > \sqrt{\frac{n}{2}}$: فإن $f'_n(x) < 0$

إذا كان $x < \sqrt{\frac{n}{2}}$: فإن $f'_n(x) > 0$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (4x^n e^{-x^2}) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

نجمع إذن النتائج في الجدول التالي :

x	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		0	-
f_n	0	$f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)$	0

لنبين في البداية أن $[0, 1] \subset \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$:

$$\begin{aligned} x \in [0, 1] &\Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq 2x^2 \leq n, \text{ car } 0 \leq 2 \leq n \\ &\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq \frac{n}{2} \\ &\Rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{n}{2}} \Rightarrow x \in \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right] \end{aligned}$$

إذن : $x \in [0, 1] \Rightarrow x \in \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$

يعني : $[0, 1] \subset \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$

نعلم أن دالة متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$.

إذن f_n متصلة و تزايدية قطعاً على $[0, 1]$ لأن $[0, 1] \subset \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$.

و بالتالي f_n تقابل من المجال $[0, 1]$ نحو صورته $\left[0, \frac{4}{e}\right]$.

نضع : $g_n(x) = f_n(x) - 1$

إذن g_n تقابل من المجال $[0, 1]$ نحو صورته $g_n([0, 1])$.

$$\begin{aligned} g_n([0, 1]) &= [g_n(0); g_n(1)] = \left[0 - 1; \frac{4}{e} - 1\right] \\ &= \left[-1; \frac{4-e}{e}\right] \approx [-1; 0,4] \end{aligned}$$

يعني أن g_n تقابل من المجال $[0, 1]$ نحو المجال $[-1; 0,4]$.
 و بما أن : $0 \in [-1; 0,4]$. فإن الصفر يمتلك سابقاً وحيداً u_n

من المجال $[0; 1]$ بالتقابل g_n حيث $g_n(u_n) = 0$.

لدينا : $g_n(0) = -1 \neq 0$ و $g_n(1) = \frac{4-e}{e} \neq 0$

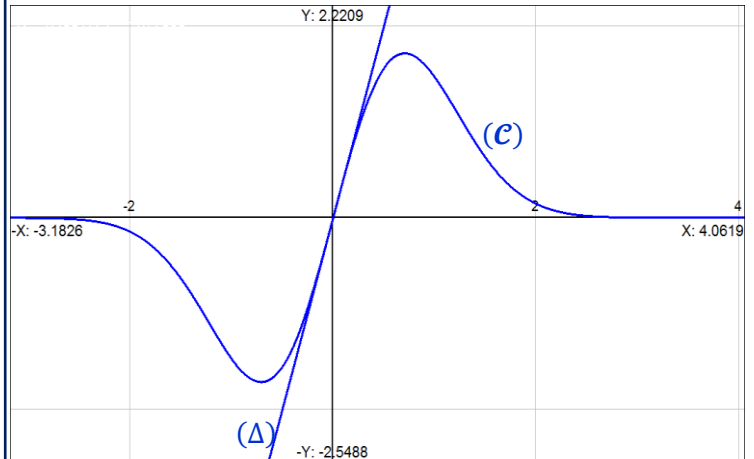
إذن $u_n \neq 0$ و $u_n \neq 1$

و بالتالي 0 يمتلك سابقاً وحيداً u_n من $]0; 1[$ حيث $g_n(u_n) = 0$.

أي : $\exists! u_n \in]0; 1[; g_n(u_n) = 0$

أي : $\exists! u_n \in]0; 1[; f_n(u_n) = 1$

معادلة المماس لـ (C) في O هي : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$:
 أي : $y = 4x ; x \geq 0$: (Δ)



لاحظ أن : $(e^{-x^2})' = -2x e^{-x^2}$ يعني : $-2(e^{-x^2})' = 4x e^{-x^2}$

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 (4x e^{-x^2}) dx = -2[e^{-x^2}]_0^1 \\ &= -2(e^{-1} - 1) = 2(1 - e^{-1}) \end{aligned}$$

مساحة الحيز (S) تقاس باستعمال التكامل التالي :

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 |f(x)| dx ; \text{ car } f(x) \geq 0 \\ &= \int_0^1 f(x) dx \\ &= 2(1 - e^{-1}) (\text{unité})^2 = 2(1 - e^{-1}) (2 \text{ cm})^2 \\ &= 8(1 - e^{-1}) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

ليكن x عدداً حقيقياً أكبر قطعاً من 1 .
 $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$
 $\Rightarrow -x^2 < -x$
 $\Rightarrow e^{-x^2} < e^{-x}$

إذن : $(\forall x > 1) ; e^{-x^2} < e^{-x}$

لدينا : $(\forall x > 1) ; 0 < e^{-x^2} < e^{-x}$

إذن : $(\forall x > 1) ; 0 < 4x^n e^{-x^2} < 4x^n e^{-x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n e^{-x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{\frac{-nx}{n}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{\frac{-x}{n}}\right)^n \\ &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(-n u e^u\right)^n = 0 \end{aligned}$$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall x > 1) ; 0 < 4x^n e^{-x^2} < 4x^n e^{-x}$$

و منه حسب خاصيات النهايات و التأطير نستنتج أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^n e^{-x^2}) = 0$$

أي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

$$\begin{aligned}
 F(-x) &= \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt \text{ : إذن} \\
 &= \int_x^{2x} \frac{-1}{\ln(1+y^2)} dy \\
 &= - \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+y^2)} dy \\
 &= -F(x) \text{ إذن } F \text{ دالة فردية.}
 \end{aligned}$$

التمرين الخامس

أ 2

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt \text{ : } x > 0 \\
 &= \int_x^1 \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt + \int_1^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt \\
 &= - \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt + \int_1^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt \\
 &= -\varphi(x) + \varphi(2x)
 \end{aligned}$$

$$F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x) \text{ : إذن}$$

التمرين الخامس

ب 2

لدينا : $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$
 نلاحظ أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$.
 وذلك لأن الدالة $x \rightarrow \frac{1}{\ln(1+x^2)}$ متصلة و φ دالة من دوالها الأصلية
 على هذا المجال . ولدينا : $\varphi'(x) = \frac{1}{\ln(1+x^2)}$
 ولدينا كذلك $x \rightarrow \varphi(2x)$ دالة قابلة للاشتقاق لأنها عبارة عن مُركب
 دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.
 وبالتالي : F قابلة للاشتقاق لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق .

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= (\varphi(2x) - \varphi(x))' = 2\varphi'(x) - \varphi'(x) \\
 &= \frac{1}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)} \\
 &= \frac{2 \ln(1+x^2) - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2) \ln(1+x^2)} \\
 &= \frac{\ln((1+x^2)^2) - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2) \ln(1+x^2)} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x}\right)}{\ln(1+4x^2) \cdot \ln(1+x^2)}
 \end{aligned}$$

التمرين الخامس

ج 2

$$\begin{aligned}
 x > 0 &\Rightarrow \begin{cases} 1+x^2 > 1 \\ 1+4x^2 > 1 \end{cases} \text{ : لدينا} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} \ln(1+x^2) > 0 \\ \ln(1+4x^2) > 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \ln(1+4x^2) \cdot \ln(1+x^2) > 0
 \end{aligned}$$

إذن إشارة $F'(x)$ تتعلق فقط بإشارة الكمية $\ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x}\right)$.

$$\begin{aligned}
 \ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x}\right) &= 0 \text{ لنحل المعادلة :} \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^4+2x^2+1}{1+4x} = 1 \\
 &\Leftrightarrow x^4+2x^2+1 = 1+4x^2 \\
 &\Leftrightarrow x^4-2x^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2(x^2-2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x = \sqrt{2} \text{ أو } x = -\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

التمرين الرابع

أ 4 II

$$\begin{aligned}
 f_n(x) = 4x^n e^{-x^2} &\Rightarrow f_{n+1}(x) = 4x^{n+1} e^{-x^2} \\
 &\Rightarrow f_{n+1}(x) = x(4x^n e^{-x^2}) \\
 &\Rightarrow f_{n+1}(x) = x f_n(x)
 \end{aligned}$$

إذن من أجل $x = u_n$ نحصل على : $f_{n+1}(u_n) = u_n f_n(u_n)$
 ونعلم أن : $f_n(u_n) = 1$. إذن : $f_{n+1}(u_n) = u_n \cdot 1 = u_n$.

التمرين الرابع

ب 4 II

لدينا : $u_n \in]0,1[\Rightarrow u_n < 1$
 $\Rightarrow f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$
 $\Rightarrow f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(u_n)) < f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(u_{n+1}))$, avec $f_{n+1}^{-1} \nearrow$
 $\Rightarrow u_n < u_{n+1} ; (\forall n \geq 2)$
 $\Rightarrow (u_n)_{n \geq 2}$ est croissante
 $\Rightarrow (u_n)_{n \geq 2}$ est convergente car $u_n < 1$

التمرين الرابع

أ 5 II

لدينا : $(\forall n \geq 2) ; 0 < u_n < 1$
 إذن : $0 < \lim_{\infty}(u_n) \leq 1$. يعني : $0 < l \leq 1$.
 المتتالية $(u_n)_{n > 2}$ تزايدية و مكبورة إذن يستحيل أن تكون نهايتها الصفر
 وهذا ما يبرر الكتابة $0 < l \leq 1$. و هذه النهاية يمكن أن تساوي 1
 الذي ليس قيمة من قيمها لأنها تزايدية .
 وفي هذه الحالة نقول بأن العدد 1 محد علوي للمجموعة $\{u_n ; n \geq 2\}$

التمرين الرابع

ب 5 II

لدينا : $f_n(u_n) = 1 \Rightarrow 4(u_n)^n e^{-(u_n)^2} = 1$
 $\Rightarrow e^{(u_n)^2} = 4(u_n)^n$
 من جهة أخرى لدينا : $0 < u_n < 1 \Rightarrow 0 < (u_n)^2 < 1$
 $\Rightarrow 1 < e^{(u_n)^2} < e$
 $\Rightarrow 1 < 4(u_n)^2 < e$
 $\Rightarrow \ln 1 < \ln(4(u_n)^2) < \ln e$
 $\Rightarrow 0 < \ln 4 + n \ln(u_n) < 1$
 $\Rightarrow \frac{-\ln 4}{n} < \ln(u_n) < \frac{1 - \ln 4}{n}$

التمرين الرابع

ج 5 II

$$\left(\frac{-\ln 4}{n}\right) < \ln(u_n) < \left(\frac{1 - \ln 4}{n}\right) \text{ : لدينا}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty}(\ln(u_n)) = 0$
 ومنه : $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln(u_n)} = e^0 = 1$
 وبالتالي : $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n) = 1$

التمرين الخامس

1

لدينا : $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$
 نضع : $y = -t$ إذن : $dt = -dy$
 إذا كان $t = -x$ فإن $y = x$
 إذا كان $t = -2x$ فإن $y = 2x$

ندرس تغيرات الدالة F على $x = \sqrt{2}$ إذن نهتم بالحالة $x = \sqrt{2}$.

إذا كان $x = \sqrt{2}$ فإن $F'(x) = 0$

إذا كان $x > \sqrt{2}$ فإن $F'(x) > 0$

إذا كان $x < \sqrt{2}$ فإن $F'(x) < 0$

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$F'(x)$		0	
	-		+
F	$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$	$F(\sqrt{2})$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

التمرين الخامس

3

ليكن $x > 0$ إذن $2x > 0$. ومنه $]0, +\infty[\subset]x, 2x[$.
نعلم أن φ متصلة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.
إذن φ متصلة على المجال $]x, 2x[$.
وكذلك φ قابلة للاشتقاق على المجال $]x, 2x[$.
ومن هنا حسب مبرهنة التزايد النهائية :

$$\exists c \in]x, 2x[; \left(\frac{\varphi(2x) - \varphi(x)}{2x - x} \right) = \varphi'(c)$$

يعني : $\exists c \in]x, 2x[; \varphi(2x) - \varphi(x) = x \varphi'(c)$

أي : $\exists c \in]x, 2x[; F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$

التمرين الخامس

3

$$0 < x < c < 2x \Rightarrow 0 < x^2 < c^2 < 4x^2$$

$$\Rightarrow 0 < \ln(1+x^2) < \ln(1+c^2) < \ln(1+4x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(1+4x^2)} < \frac{1}{\ln(1+c^2)} < \frac{1}{\ln(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)} ; x > 0$$

التمرين الخامس

3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{\ln \left(x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) \right)}{x} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2 \left(\frac{\ln x}{x} \right) + \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} \right) = +\infty$$

$$= \frac{1}{2(0^+) + (0^+)(0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1+4x^2)} = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t=2x}} \frac{\frac{t}{2}}{\ln(1+t^2)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{\ln(1+t^2)} \right) = +\infty$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\left(\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \right) < F(x) < \left(\frac{x}{\ln(1+x^2)} \right)$$

$x \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$

$+\infty$ $+\infty$

وفي الواقع نحتاج إلى المتفاوتة اليسرى فقط .

$$\left(\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \right) < F(x)$$

$x \rightarrow +\infty$

$+\infty$

ونستنتج حسب خاصيات النهايات والترتيب ما يلي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\ln(1+x^2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\left(\frac{\ln(1+x^2) - \ln(1+0^2)}{x - 0} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\left(\frac{k(x) - k(0)}{x - 0} \right)} ; k(x) = \ln(1+x^2)$$

$$= \lim_{t \rightarrow k'(0)} \left(\frac{1}{t} \right) ; \text{avec } t = \left(\frac{k(x) - k(0)}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t} \right) ; \text{avec } k'(0) = \frac{2 \times 0^+}{1 + (0^+)^2} = 0^+$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{t}{2}}{\ln(1+t^2)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{t}{\ln(1+t^2)} \right) = +\infty$$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\left(\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \right) < F(x) < \left(\frac{x}{\ln(1+x^2)} \right)$$

$x \rightarrow 0^+$ $x \rightarrow 0^+$

$+\infty$ $+\infty$

وفي الواقع نحتاج فقط إلى المتفاوتة اليسرى .

$$\left(\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \right) < F(x)$$

$x \rightarrow 0^+$

$+\infty$

ومن هنا حسب خاصيات النهايات والترتيب نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = +\infty$

ومن جهة ثانية لدينا من أجل $x > 0$:

$$\left(\frac{1}{\ln(1+4x^2)} \right) < \frac{F(x)}{x} < \left(\frac{1}{\ln(1+x^2)} \right)$$

$x \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$

0 0

إذن حسب خاصيات النهايات والتأثير نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

لدينا : $(\forall x > 0) ; F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$

و لدينا : $\sqrt{e-1} \approx 1,31 > 0$

إذن : $F(\sqrt{e-1}) < \frac{\sqrt{e-1}}{\ln(1+(e-1))}$

يعني : (1) $F(\sqrt{e-1}) < \sqrt{e-1}$

و لدينا كذلك : $(\forall x > 0) ; F(x) > \frac{x}{\ln(1+4x^2)}$

و لدينا كذلك : $\frac{\sqrt{e-1}}{2} \approx 0,65 > 0$

إذن : $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)}{\ln\left(1+\frac{4(e-1)}{4}\right)}$

إذن : (2) $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)$

نضع : $G(x) = F(x) - x$

من (1) و (2) نستنتج أن : $G\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) \cdot G(\sqrt{e-1}) < 0$

و لدينا F دالة متصلة على المجال $]0, +\infty[$.

إذن G دالة متصلة على أي مجال يوجد ضمن $]0, +\infty[$.

و بالخصوص على المجال $\left] \frac{\sqrt{e-1}}{2}, \sqrt{e-1} \right[$.

نستنتج إذن حسب مبرهنة القيم الوسطية (TVI) وجود حل وحيد للمعادلة

في المجال $\left] \frac{\sqrt{e-1}}{2}, \sqrt{e-1} \right[$.

يعني أن المعادلة $F(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left] \frac{\sqrt{e-1}}{2}, \sqrt{e-1} \right[$.

و باستعمال رتبة الدالة F نستنتج أن هذا الحل وحيد في $]0, +\infty[$ بأكمله

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2010

التمرين الأول

1

لتكن $M(x)$ و $M(y)$ مصفوفتين من E .

$$\begin{aligned} M(x) \times M(y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ y^2 & 2y & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (x+y) & 1 & 0 \\ (x+y)^2 & 2(x+y) & 1 \end{pmatrix} \\ &= M(x+y) \in E \end{aligned}$$

إذن: $\forall M(x), M(y) \in E ; M(x) \times M(y) \in E$
و بالتالي E جزء مستقر من المجموعة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

التمرين الأول

2

$$\begin{aligned} \varphi(x) \times \varphi(y) &= M(x) \times M(y) \\ &= M(x+y) \\ &= \varphi(x+y) \end{aligned}$$

إذن: $\forall (x, y) \in \mathbb{R} ; \varphi(x+y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$
إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (E, \times) .
ليكن $M(y)$ عنصرا من E . ونحل في \mathbb{R} المعادلة ذات

المجهول x التالية: $\varphi(x) = M(y)$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = M(y) &\Leftrightarrow M(x) = M(y) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ y^2 & 2y & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

إذن المعادلة $\varphi(x) = M(y)$ تقبل حلا وحيدا وهو العدد الحقيقي y .
و بتعبير آخر: $\varphi(x) = M(y) ; (\exists! x = y \in E) ; (\forall M(y) \in E)$
يعني أن φ تقابل من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (E, \times) .
و بالتالي φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (E, \times) .

التمرين الأول

2

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق
و يحولها إلى مجموعة الوصول. إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة
 (E, \times) انطلاقا من البنية الجبرية للمجموعة $(\mathbb{R}, +)$
و ذلك عبر التشاكل التقابلي φ .

لدينا $(\mathbb{R}, +)$ زمرة تبادلية عنصراها المحايد بالقانون + هو 0
و كل عنصر x من \mathbb{R} يقبل $(-x)$ كمائل

إذن (E, \times) زمرة تبادلية عنصراها المحايد بالقانون \times هو $\varphi(0)$
و كل عنصر $\varphi(x)$ من E يقبل $\varphi(-x)$ كمائل

$$\varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ لدينا:}$$

$$\varphi(-x) = M(-x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ x^2 & -2x & 1 \end{pmatrix} \text{ لدينا:}$$

التمرين الأول

2

$$\begin{aligned} \text{ليكن } x \text{ عنصرا من } \mathbb{R}. \\ \text{Sym}(x) = -x &\Leftrightarrow \varphi(\text{Sym}(x)) = \varphi(-x) \\ &\Leftrightarrow \text{Sym}(\varphi(x)) = \varphi(-x) \\ &\Leftrightarrow \text{Sym}(M(x)) = M(-x) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ x^2 & -2x & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

التمرين الأول

2

$$\begin{aligned} M(x+y) &= M(x) \times M(y) \\ &\Leftrightarrow M\left(\underbrace{x+x+\dots+x}_{n \text{ fois}}\right) = \underbrace{M(x) \times M(x) \times \dots \times M(x)}_{n \text{ fois}} \\ &\Leftrightarrow M(nx) = (M(x))^n \\ &\Leftrightarrow A^5 = (M(2))^5 = M(10) \\ &\Leftrightarrow A^5 X = M(10)X = B = M(12) \\ &\Leftrightarrow M(10)X = M(12) \\ &\Leftrightarrow (M(10))^{-1} \times M(10) \times X = (M(10))^{-1} \times M(12) \\ &\Leftrightarrow X = (M(10))^{-1} \times M(12) \\ &\Leftrightarrow X = M(-10) \times M(12) \\ &\Leftrightarrow X = M(2) \in E \end{aligned}$$

و بالتالي المعادلة $A^5 X = B$ تقبل حلا وحيدا في E وهو المصفوفة $M(2)$.

التمرين الأول

3

نلاحظ في البداية أن F مجموعة غير فارغة لأنه بإمكاننا تحديد أحد
عنصرها وهو $M(1) = M(\ln e) \in F$
و لدينا كذلك $F \subset E$ لأن $\ln x \in \mathbb{R}$; $(\forall x > 0)$.
ليكن $M(\ln x)$ و $M(\ln y)$ عنصريين من F .

$$\begin{aligned} M(\ln x) \times (M(\ln y))^{-1} &= M(\ln x) \times M(-\ln y) \\ &= M(\ln x - \ln y) \\ &= M\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} > 0 \Rightarrow M\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) \in F \\ \Rightarrow M(\ln x) \times (M(\ln y))^{-1} \in F$$

إذن: $\forall M(\ln x), M(\ln y) \in F ; M(\ln y) \times (M(\ln y))^{-1} \in F$
و بالتالي حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية نستنتج أن (F, \times) زمرة
جزئية للزمرة (E, \times) .

التمرين الثاني

1

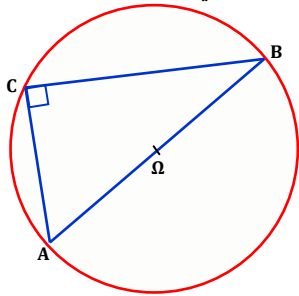
$$\begin{aligned} (E) : z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} &= 0 \\ (1 + i(2 - \sqrt{3}))^2 - 4i(1 + i(2 - \sqrt{3})) - 2 + 2i\sqrt{3} \\ &= 1 - (2 - \sqrt{3})^2 + 2i(2 - \sqrt{3}) - 4i + 4(2 - \sqrt{3}) - 2 + 2i\sqrt{3} \\ &= (2 - \sqrt{3})(-2 + \sqrt{3} + 2i + 4) + 1 - 4i - 2 + 2i\sqrt{3} \\ &= (2 - \sqrt{3})((2 + \sqrt{3}) + 2i) - 1 - 2i(2 - \sqrt{3}) \\ &= (2 - \sqrt{3})((2 + \sqrt{3}) + 2i - 2i) - 1 \\ &= (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) - 1 \\ &= (2^2 - (\sqrt{3})^2) - 1 \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

إذن $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$ حل للمعادلة (E) .

التمرين الثاني

3

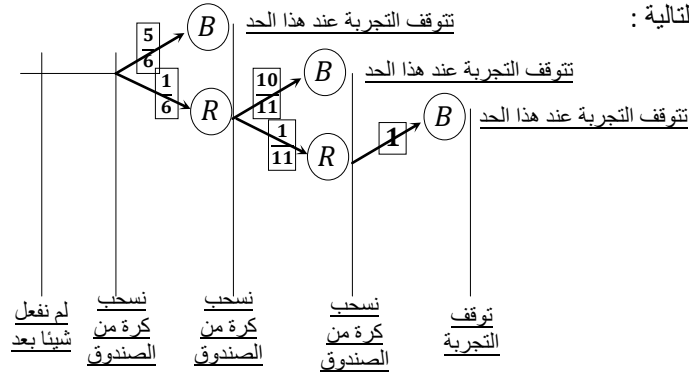
لدينا C نقطة من الدائرة (Γ) التي قطرها $[AB]$.
إذن المثلث ABC قائم الزاوية في C .



$$\begin{aligned} \overline{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})} &\equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ : ومنه} \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{c - a}{c - b}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{c - a}{c - b}\right) \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

التمرين الثالث

نحول معطيات التجربة العشوائية الواردة في التمرين إلى شجرة الاحتمالات التالية:



من خلال الشجرة نستنتج ما يلي:

السؤال أ) : $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$
السؤال ب) : $p[X = 1] = \frac{5}{6}$

السؤال ج) : $p[X = 2] = \frac{1}{6} \times \frac{10}{11} = \frac{5}{33}$

السؤال د) : $p[X = 3] = 1 - p[X = 1] - p[X = 2] = \frac{1}{66}$

التمرين الثالث

2

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^3 k \times p[X = k] \\ &= 1 \times p[X = 1] + 2 \times p[X = 2] + 3 \times p[X = 3] \\ &= \frac{5}{6} + \frac{10}{33} + \frac{3}{66} = \frac{13}{11} \end{aligned}$$

التمرين الثالث

2

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^3 k^2 \times p[X = k] \\ &= 1^2 \times p[X = 1] + 2^2 \times p[X = 2] + 3^2 \times p[X = 3] \\ &= \frac{5}{6} + \frac{20}{33} + \frac{9}{66} = \frac{52}{33} \end{aligned}$$

التمرين الثاني

1

نستعمل العلاقة بين مجموع جذري ثلاثية الحدود نحصل على:

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{4i}{1} \Leftrightarrow b = 4i - 1 - i(2 - \sqrt{3}) \\ &\Leftrightarrow b = -1 + i(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

التمرين الثاني

2

$$\begin{aligned} a &= 1 + i(2 - \sqrt{3}) \Rightarrow a^2 = 1 - (2 - \sqrt{3})^2 + 2(2 - \sqrt{3}) \\ &\Rightarrow a^2 = -6 + 4\sqrt{3} + 4i - 2i\sqrt{3} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4(2 - \sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{6}} &= 4(2 - \sqrt{3})\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 4(2 - \sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \\ &= -6 + 4\sqrt{3} + 4i - 2i\sqrt{3} \quad (**) \end{aligned}$$

(*) et (**) $\Rightarrow a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{6}}$

التمرين الثاني

2

$$a = r e^{i\theta} \Rightarrow a^2 = r^2 e^{2i\theta} = 4(2 - \sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 = 4(2 - \sqrt{3}) \\ 2\theta \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ \theta \equiv \frac{\pi}{12} [\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right) e^{\frac{i\pi}{12}} \\ a = 2\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right) e^{\frac{13i\pi}{12}} \end{cases}$$

بما أن : $2\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right) e^{\frac{i\pi}{12}} = 1 + i(2 - \sqrt{3})$

و : $2\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right) e^{\frac{13i\pi}{12}} = -1 - i(2 - \sqrt{3})$

فإنه في النهاية نحصل على : $a = 2\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right) e^{\frac{i\pi}{12}}$

التمرين الثاني

3

$$\begin{aligned} (\Gamma) \text{ قطر في } [AB] &\Leftrightarrow \Omega \text{ منتصف } [AB] \\ &\Leftrightarrow z_\Omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{a + b}{2} = 2i \end{aligned}$$

التمرين الثاني

3

نحسب أولا شعاع الدائرة (Γ) .

$$\begin{aligned} \frac{AB}{2} &= \left| \frac{b - a}{2} \right| = \left| \frac{-1 + i(2 + \sqrt{3}) - 1 - i(2 - \sqrt{3})}{2} \right| \\ &= |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \end{aligned}$$

ولدينا : $\Omega O = |z_O - z_\Omega| = |0 - 2i| = 2$

وكذلك : $\Omega C = |z_C - z_\Omega| = \left| 2i + 2e^{\frac{i\pi}{7}} - 2i \right| = \left| 2e^{\frac{i\pi}{7}} \right| = 2$

إذن : $O\Omega = \Omega C = \frac{AB}{2} = 2$

و بالتالي O و C نقطتان من الدائرة (Γ) التي قطرها $[AB]$.

ليكن x عنصرا من المجال $[0,1[$.

$$f''(x) = \frac{-((1-x)(1-\ln(1-x))^2)}{((1-x)(1-\ln(1-x))^2)^2} \text{ لدينا :}$$

$$= \frac{-(1-\ln(1-x))(1+\ln(1-x))}{((1-x)(1-\ln(1-x))^2)^2}$$

$$= \frac{-(1-\ln(1-x))}{(1-x)^2(1-\ln(1-x))^3}$$

$$x \in [0,1[\Rightarrow x > 1 > 1-e \Rightarrow x > 1-e$$

$$\Rightarrow e > 1-x$$

$$\Rightarrow 1 > \ln(1-x)$$

$$\Rightarrow 1 - \ln(1-x) > 0$$

إذن إشارة $f''(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $(1 + \ln(1-x))$.

لنحل المعادلة $1 + \ln(1-x)$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x) = -1$$

$$\Leftrightarrow (1-x) = e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e-1}{e}$$

$$x = \left(\frac{e-1}{e}\right) \Rightarrow f''(x) = 0$$

$$x > \left(\frac{e-1}{e}\right) \Rightarrow 1-x < e^{-1} \text{ : كذلك}$$

$$\Rightarrow 1 + \ln(1-x) < 0$$

$$\Rightarrow f''(x) > 0$$

$$x < \left(\frac{e-1}{e}\right) \Rightarrow 1-x > e^{-1} \text{ : كذلك}$$

$$\Rightarrow 1 + \ln(1-x) > 0$$

$$\Rightarrow f''(x) < 0$$

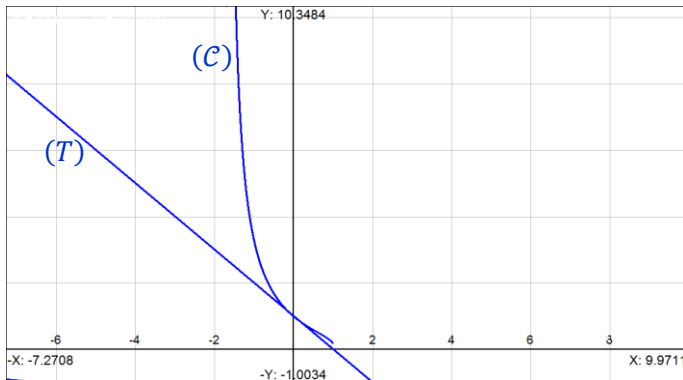
نستنتج إذن أن f'' تنعدم في النقطة ذات الأفصول $\left(\frac{e-1}{e}\right)$ و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطة .

إذن النقطة ذات الأفصول $\left(\frac{e-1}{e}\right)$ هي نقطة الإنعطاف الوحيدة للمنحنى (C) .

لدينا معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الأفصول 0 هي :

$$(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$\Leftrightarrow (T) : y = -x + 1$$



$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \text{ : إذن}$$

$$= \frac{52}{33} - \left(\frac{13}{11}\right)^2$$

$$= \frac{65}{363}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{1 - \ln(1-x)} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1 - \ln t} \right)$$

$$= \lim_{r \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1-r} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \right)$$

$$= 0 = f(1)$$

إذن f دالة متصلة على يسار العدد 1 .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{(x-1)(1-\ln(1-x))} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{(x-1)\ln(1-x) - (1-x)} \right)$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{u \ln u - u} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{0-0^+} \right) = -\infty \notin \mathbb{R}$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على يسار 1 .

لدينا f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[0,1[$ لأنها تشكيلة معرفة من دوال معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0,1[$.

$$f'(x) = \frac{-((1-x)(1-\ln(1-x)))'}{(1-\ln(1-x))^2} \text{ لدينا :}$$

$$= \frac{-1}{(1-x)(1-\ln(1-x))^2}$$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-x)$.

إذا كان $x < 1$ فإن $f'(x) < 0$

إذن f دالة تناقصية قطعاً على المجال $[0,1[$.

نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$	1
$f'(x)$		-
f	1	0

$$t \in [0,1] \Rightarrow -t \leq 0 \Rightarrow 1-t \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 - \ln(1-t) \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - \ln(1-t)} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{t^n}{1 - \ln(1-t)} \leq t^n ; t^n > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{t^n}{1 - \ln(1-t)} \right) dt \leq \int_0^1 (t^n) dt$$

car les deux fonctions sont continues et que $0 < 1$

$$\Rightarrow I_n \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow I_n \leq \frac{1}{n+1} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} ; d'après(*)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0 ; \left(\begin{array}{l} \text{d'après le critère} \\ \text{de comparaison} \end{array} \right)$$

القاعدة التي سوف نستعملها في هذا السؤال هي :

$$(\forall t \neq 1) ; \sum_{k=0}^n t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$$

و تُعبر عن مجموع حدود متتابعة من المتتالية الهندسية $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$F(x) - S_n(x) = \int_0^x \left(\frac{f(t)}{1-t} \right) dt - \sum_{k=0}^n F_k(x)$$

$$= \int_0^x \left(\frac{f(t)}{1-t} \right) dt - \sum_{k=0}^n \int_0^x t^k f(t) dt$$

$$= \int_0^x \left(\frac{f(t)}{1-t} \right) dt - \int_0^x \left(\sum_{k=0}^n t^k f(t) \right) dt$$

$$= \int_0^x \left(\frac{f(t)}{1-t} \right) dt - \int_0^x \left(f(t) \sum_{k=0}^n t^k \right) dt$$

$$= \int_0^x \left(\frac{f(t)}{1-t} \right) dt - \int_0^x \left(f(t) \left(\frac{1-t^{n+1}}{1-t} \right) \right) dt$$

$$= \int_0^x \left(\frac{f(t) - (1-t^{n+1})f(t)}{1-t} \right) dt$$

$$= \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} \right) dt \quad (*)$$

لدينا f متصلة و تناقصية قطعاً على I . نضع : $h(x) = f(x) - x$

لدينا : $h'(x) = f'(x) - 1$

و نعلم أن : $\forall x \in [0,1[; f'(x) < 0$

إذن : $\forall x \in [0,1[; f'(x) < 1$

يعني : $\forall x \in [0,1[; h'(x) < 0$

إذن h متصلة و تناقصية قطعاً على المجال I .

و منه h تقابل من المجال I نحو صورته $h(I)$.

$h(I) = h([0,1]) = [h(1), h(0)] = [-1,1]$

إذن h تقابل من المجال $[0,1]$ نحو المجال $[-1;1]$.

و بما أن : $0 \in [-1;1]$. فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً α من المجال I بالتقابل h .

يعني : $(\exists! \alpha \in I) ; h(\alpha) = 0$

أي : $(\exists! \alpha \in I) ; f(\alpha) = \alpha$

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعاً على المجال I .

إذن f تقابل من المجال I نحو صورته $f(I)$.

و لدينا : $f(I) = f([0,1]) = [f(1), f(0)] = [0,1] = I$

إذن f تقابل من المجال $[0,1]$ نحو المجال $[0,1]$.

ليكن x و y عنصرين من المجال I حيث $y = f(x)$.

$$y = f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \ln(1-x)} = y$$

$$\Leftrightarrow 1 - \ln(1-x) = \frac{1}{y}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x) = \left(1 - \frac{1}{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow (1-x) = e^{\left(\frac{y-1}{y}\right)}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - e^{\left(\frac{y-1}{y}\right)}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = 1 - e^{\left(\frac{y-1}{y}\right)}$$

إذن f تقابل من المجال $[0,1]$ نحو المجال $[0,1]$. و تقابله العكسي

$$f^{-1} : [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$y \rightarrow 1 - e^{\left(\frac{y-1}{y}\right)}$$

f^{-1} معرف بما يلي :

$$t \in [0,1] \Rightarrow t \leq 1$$

$$\Rightarrow t^n \times t \leq t^n \times 1 ; t^n > 0$$

$$\Rightarrow t^{n+1} \leq t^n$$

$$\Rightarrow f(t) \times t^{n+1} \leq f(t) \times t^n ; f(t) > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (f(t) \times t^{n+1}) dt \leq \int_0^1 (f(t) \times t^n) dt$$

car $t \rightarrow t^n f(t)$ est continue et $0 < 1$

$$\Rightarrow I_{n+1} \leq I_n ; (\forall n \geq 0)$$

$$\Rightarrow (I_n)_{n \geq 0} \text{ est une suite décroissante}$$

$$t \geq 0 \Rightarrow t^n f(t) \geq 0 ; \text{ avec } f(t) > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (t^n f(t)) dt \geq 0$$

car $t \rightarrow t^n f(t)$ est continue et $0 < 1$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 0) ; I_n \geq 0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow (I_n)_{n \geq 0} \text{ متتالية مصغرة بـ } 0$$

بما أن $(I_n)_{n \geq 0}$ متتالية تناقصية و مصغرة بالعدد 0 فإنها متقاربة و نهايتها هي عدد حقيقي l .

$$x > 0 \Rightarrow 1 < \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} \right) dt \geq 0$$

$$(*) \Rightarrow F(x) - S_n(x) \geq 0 \quad (\blacksquare)$$

من النتيجةين (■) و (■■) نستنتج التأخير التالي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \left(\frac{1}{n+2} \right) \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

التمرين الرابع

من خلال السؤال السابق السابق نستنتج الوضعية التالية .

$$(\forall x \in J) ; 0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \left(\frac{1}{n+2} \right) \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

\swarrow $n \rightarrow \infty$ \searrow
 0 0

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$(\forall x \in J) ; \lim_{n \rightarrow \infty} (F(x) - S_n(x)) = 0$$

يعني : $(\forall x \in J) ; \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = F(x)$

التمرين الرابع

$$\begin{cases} x \in J \\ t \in [0, x] \end{cases} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{1 - \ln(1-t)}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{-1}{(1-t)(1-\ln(1-t))}$$

$$\Rightarrow \frac{-f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{(1-t)(1-\ln(1-t))} = \frac{f(t)}{1-t} = \varphi(t)$$

$$\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{f(t)}{1-t} \right) dt = - \int_0^x \left(\frac{f'(t)}{f(t)} \right) dt$$

$$\Rightarrow F(x) = -[\ln|f(t)|]_0^x$$

$$\Rightarrow F(x) = -[\ln(f(t))]_0^x ; \text{ car } f(t) > 0$$

$$\Rightarrow F(x) = -(\ln(f(x)) - \ln(f(0)))$$

$$\Rightarrow F(x) = -(-\ln(1 - \ln(1-x)) - \ln 1)$$

$$\Rightarrow F(x) = \ln(1 - \ln(1-x))$$

التمرين الرابع

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1 - \ln(1-x))$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t=1-x}} \ln(1 - \ln t)$$

$$= \lim_{\substack{r \rightarrow -\infty \\ r=\ln t}} \ln(1-r)$$

$$= \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y=1-r}} \ln y = +\infty$$

والتالي : $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = +\infty$

التمرين الرابع

نضع : $\psi(x) = (1-x)(1 - \ln(1-x))$

لدينا : $\psi'(x) = -(1 - \ln(1-x)) + \frac{1-x}{1-x} = \ln(1-x)$

$$x \in J \Rightarrow x > 0 \Rightarrow -x < 0$$

$$\Rightarrow 1-x < 1$$

$$\Rightarrow \ln(1-x) < 0$$

$$\Rightarrow \psi'(x) < 0$$

$$\Rightarrow \psi \text{ est décroissante sur } J$$

التمرين الرابع

نضع : $\varphi(t) = \frac{f(t)}{1-t}$

نلاحظ في البداية أن : $\frac{1}{\varphi(t)} = \frac{f(t)}{1-t} = \varphi(t)$

ليكن t_1 و t_2 عنصرين من المجال $[0, x]$ مع $x \in J$

$$t_1 > t_2 \Rightarrow \psi(t_1) < \psi(t_2) \text{ car } \psi \text{ est } \searrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\psi(t_1)} > \frac{1}{\psi(t_2)} ; \text{ passage à l'inverse}$$

$$\Rightarrow \varphi(t_1) > \varphi(t_2)$$

Donc : $t_1 > t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) > \varphi(t_2)$

و بالتالي φ دالة تزايدية قطعاً على المجال J .

التمرين الرابع

$$t > 0 \Rightarrow 1-t < 1 \Rightarrow 1 - \ln(1-t) > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - \ln(1-t)} < 1$$

$$\Rightarrow f(t) < 1$$

$$\Rightarrow t^{n+1} f(t) < t^{n+1} \quad (1)$$

$$0 \leq t \leq x \Rightarrow -x \leq -t \leq 0$$

$$\Rightarrow 1-x \leq 1-t \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} \geq \frac{1}{1-t} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x} \quad (2)$$

$$(1) \times (2) \Rightarrow \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} \leq \frac{t^{n+1}}{1-x}$$

$$\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} \right) dt \leq \frac{1}{1-x} \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^x$$

$$\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} \right) dt \leq \frac{1}{1-x} \left(\frac{x^{n+2}}{n+2} \right) \quad (3)$$

$$x < 1 \Rightarrow \left(\frac{x^{n+2}}{n+2} \right) < \frac{1}{n+2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1-x} \right) \left(\frac{x^{n+2}}{n+2} \right) \leq \left(\frac{1}{1-x} \right) \left(\frac{1}{n+2} \right)$$

$$(3) \Rightarrow \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} \right) dt \leq \left(\frac{1}{n+2} \right) \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

$$(*) \Rightarrow F(x) - S_n(x) \leq \left(\frac{1}{n+2} \right) \left(\frac{1}{1-x} \right) \quad (\blacksquare)$$

ليكن e العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة I .
 $\Rightarrow x * e = e * x = x$
 $\Rightarrow xe - xa - ae + a^2 = x - a$
 $\Rightarrow e(x - a) = x - a^2 + ax - a$
 $\Rightarrow e(x - a) = (x - a)(1 + a)$
 $\Rightarrow e = (1 + a)$; avec $x > a$
 $\Rightarrow e = (1 + a) > a$
 $\Rightarrow e = (1 + a) \in I$

و بالتالي $(1 + a)$ هو العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة I .

لقد حصلنا من خلال ما سبق على المعلومات التالية :

- * قانون تركيب داخلي في المجموعة I .
- * تبادلي و تجميعي في المجموعة I .
- * يقبل عنصرا محايدا في I و هو $(1 + a)$

إذن لكي تكون $(I, *)$ زمرة تبادلية يكفي أن يقبل كل عنصر من I ممثلا بالقانون $*$. ليكن x عنصرا من المجموعة I .

نقول بأن y هو ممثل x بالنسبة لـ $*$ في I

إذا فقط إذا كان $x * y = y * x = (1 + a)$

$$x * y = (1 + a) \Leftrightarrow (x - a)(y - a) + a = (1 + a)$$

$$\Leftrightarrow xy - ax - ay + a^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow y(x - a) = 1 + a(x - a)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{(x - a)} + a > a ; \text{car } \frac{1}{x - a} > 0$$

$$\Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{(x - a)} + a \right) \in I$$

و بالتالي كل عنصر x يقبل ممثلا في I بالقانون $*$ و هو العنصر $\left(\frac{1}{x - a} + a \right)$.

خلاصة: $(I, *)$ زمرة تبادلية.

التشاكل: ليكن x و y عنصرين من المجموعة I .

$$\varphi(x * y) = \frac{1}{(x * y) - a} = \frac{1}{(x - a)(y - a)} = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

حصلنا إذن على ما يلي : $\varphi(x * y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$; $\forall (x, y) \in I^2$;

إذن φ تشاكل من $(I, *)$ نحو (\mathbb{R}_+^*, \times) .

التقابل: ليكن y عنصرا من \mathbb{R}_+^* .

$$\varphi(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x - a} = y$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{1 + ay}{y} \right)$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{1 + ay}{y} \right) > a ; (\text{facile})$$

نلاحظ أن المعادلة $\varphi(x) = y$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا من I و هو $\left(\frac{1 + ay}{y} \right)$ أو بتعبير آخر :

$$\left(\forall y \in \mathbb{R}_+^* \right), \left(\exists ! x = \left(\frac{1 + ay}{y} \right) \in I \right) ; \varphi(x) = y$$

و هذا يعني أن φ تقابل من $(I, *)$ نحو (\mathbb{R}_+^*, \times) .
 و بالتالي : φ تشاكل تقابلي من $(I, *)$ نحو (\mathbb{R}_+^*, \times) .

سوف نستعمل البرهان بالترجع :
 من أجل $k = 0$ لدينا $A^{2 \cdot 0} = A^0 = I$
 إذن العبارة صحيحة من أجل $k = 0$.

ليكن k عنصرا من \mathbb{N} .

و نفترض أن $A^{2k} = I$ لدينا :

$$A^{2(k+1)} = A^{2k} \times A^2 = I \times A^2$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

إذن : $A^{2(k+1)} = I$.

و هذا يعني أن العبارة صحيحة من أجل $(k + 1)$.

و بالتالي حسب مبدأ التراجع نستنتج أن : $A^{2k} = I$; $(\forall k \in \mathbb{N})$

لتكن A مصفوفة من $M_3(\mathbb{R})$.

لدينا : $A^{2k} = I$; $(\forall k \in \mathbb{N})$

إذن من أجل $k = 1$ لدينا : $A^2 = A \times A = I$

و هذا يعني أن المصفوفة A قابلة للقلب و مقلوبها هو المصفوفة نفسها
 إذن : $A^{-1} = A$.

$$x, y \in]a; +\infty[= I \Rightarrow y > a \text{ et } x > a$$

$$\Rightarrow (y - a) > 0 \text{ et } (x - a) > 0$$

$$\Rightarrow (x - a)(y - a) > 0$$

$$\Rightarrow (x - a)(y - a) + a > a$$

$$\Rightarrow x * y > a$$

$$\Rightarrow x * y \in]a; +\infty[= I$$

حصلنا إذن على الاستلزام التالي : $(x, y) \in I^2 \Rightarrow x * y \in I$
 و بالتالي * قانون تركيب داخلي في المجموعة I .

التبادلية: $(x, y) \in I^2 \Rightarrow x * y = (x - a)(y - a) + a$

$$= (y - a)(x - a) + a$$

$$= y * x$$

إذن * تبادلي في المجموعة I .

التجميعية:

$$(x, y, z) \in I^3 \Rightarrow x * (y * z) = x * ((y - a)(z - a) + a)$$

$$= (x - a)((y - a)(z - a) + a - a) + a$$

$$= (x - a)(yz - ya - az + a^2) + a$$

$$= xyz - xya - xza + a^2x - yza + a^2y + a^2z - a^3 + a$$

$$= xyz - a(xy + xz + yz) + a^2(x + y + z) - (a^3 - a) \quad (1)$$

$$(x, y, z) \in I^3 \Rightarrow (x * y) * z = ((x - a)(y - a) + a) * z$$

$$= ((x - a)(y - a) + a - a)(z - a) + a$$

$$= (xy - xa - ay + a^2)(z - a) + a$$

$$= xyz - a(xy + xz + yz) + a^2(x + y + z) - (a^3 - a) \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow x * (y * z) = (x * y) * z$$

$$\Rightarrow * \text{ قانون تجميعي في } I$$

التمرين الثاني

2

يكفي أن نتحقق من أن جميع الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 2011 لا تقسم العدد 2011 ، إذن 2011 عدد أولي .

$$N = 1 + 10 + 10^1 + \dots + 10^{2009} = 10^0 + 10^1 + 10^2 + \dots + 10^{2009}$$

إذن N هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها 10 .

$$9N = 10^{2010} - 1 \quad \text{و بالتالي} \quad N = \frac{10^{2010} - 1}{10 - 1}$$

التمرين الثاني

2

لدينا 2011 عدد أولي . و $10 \wedge 2011 = 1$.

إذن حسب *Fermat* : $10^{2011-1} \equiv 1 \pmod{2011}$.

يعني : $2011 / (10^{2010} - 1)$. إذن : $2011 / 9N$.

التمرين الثاني

2

بما أن $2011 / 9 = 1$ و $2011 \wedge 9 = 1$ فإنه حسب ميرهنه *Gauss* : $2011 / N$.

التمرين الثاني

3

لدينا : $22121 = 11 \times 2011$.

و لدينا كذلك حسب ما سبق : $2011 / N$ و $11 / N$.

إذن : $11 \times 2011 / N = 1$ لأن : $2011 \wedge 11 = 1$.

و بالتالي : $22121 / N$.

التمرين الثالث

1

بتعويض z بالعدد $(2 - m)$ في المعادلة (E_m) نحصل على الصفر .
إذن $(2 - m)$ حل للمعادلة (E_m) .

التمرين الثالث

2

نستعمل خاصية جداء حلي ثلاثية الحدود .

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{4 - im^2 - 2(1 - i)m}{1} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 - im^2 - 2m + 2im = 1$$

$$\Leftrightarrow im^2 + 2(1 - i)m - 3 = 0$$

التمرين الثالث

2

لنحل المعادلة : $im^2 + 2(1 - i)m - 3 = 0$

لدينا : $\Delta = 4(1 - i)^2 + 12i = (\sqrt{2}(1 + i))^2$

$$m_1 = \frac{2(i - 1) - \sqrt{2}(1 + i)}{2i} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$m_2 = \frac{2(i - 1) + \sqrt{2}(1 + i)}{2i} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

التمرين الثالث

1

لتكن E صورة العدد العقدي 1 . $z' - 1 = -(z - 1)$.

$$\Leftrightarrow z_{M'} - z_E = -(z_M - z_E)$$

$$\Leftrightarrow \vec{EM'} = -\vec{EM}$$

$$\Leftrightarrow E \text{ هي منتصف القطعة } [MM']$$

و بالتالي S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة E .

التمرين الأول

3

$$x^{(3)} = \alpha^3 + \alpha \Leftrightarrow x * x * x = \alpha^3 + \alpha$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x * x * x) = \varphi(\alpha^3 + \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) \times \varphi(x) \times \varphi(x) = \varphi(\alpha^3 + \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x - \alpha}\right) \times \left(\frac{1}{x - \alpha}\right) \times \left(\frac{1}{x - \alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x - \alpha}\right)^3 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x - \alpha}\right)^3 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{\alpha}\right) \left(\underbrace{\left(\frac{1}{x - \alpha}\right)^2}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{x - \alpha}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}_{>0}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha - x + \alpha}{\alpha(x - \alpha)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow x = 2\alpha > \alpha ; \text{ car } \alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2\alpha \in]\alpha, +\infty[= I$$

و بالتالي : المعادلة تقبل حلا وحيدا في المجموعة I و هو 2α .

التمرين الثاني

1

$$\begin{cases} 1 \equiv 1 \pmod{11} \\ 10^1 \equiv -1 \pmod{11} \\ 10^2 \equiv 1 \pmod{11} \\ \vdots \\ 10^{2k} \equiv 1 \pmod{11} \\ 10^{2k+1} \equiv -1 \pmod{11} \\ \vdots \\ 10^{2009} \equiv -1 \pmod{11} \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

عند المرور إلى المجموع بين أطراف هذه المتوافقات نحصل على :

$$1 + 10 + \dots + 10^{2009} \equiv \left(\sum_{k=0}^{2009} (-1)^k\right) \pmod{11}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{2009} (-1)^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{1004} (-1)^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{1004} (-1)^k\right) : \text{ ولدينا :}$$

$$= \sum_{m=0}^{1004} (-1)^{2m} + \sum_{m=0}^{1004} (-1)^{2m+1}$$

$$= 1004 - 1004 = 0$$

$$\text{إذن : } 1 + 10 + \dots + 10^{2009} \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\text{يعني : } N = \frac{111 \dots 1}{2010 \text{ fois}} \equiv 0 \pmod{11}$$

و بالتالي العدد 11 يقسم العدد N .

التمرين الرابع

1 I

ليكن x عنصرا من المجموعة $]0,1[\cup]1, +\infty[$

$$\begin{aligned} n = f(x) &\Leftrightarrow n = \frac{x}{\ln x} \\ &\Leftrightarrow n \ln x = x \\ &\Leftrightarrow e^{n \ln x} = e^x \\ &\Leftrightarrow x^n = e^x \end{aligned}$$

التمرين الرابع

2 I

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{x}{\ln x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln x} \right) \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ t = \ln x}} \left(\frac{1}{t} \right) = 0 \end{aligned}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر . و لدينا : $f'_d(0) = 0$

التمرين الرابع

3 I

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x}{\ln x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{\ln x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{\ln x}{x} \right)} = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \end{cases} \text{ لدينا :}$$

إذن نستنتج أن المستقيم $x = 1$: (Δ) مقارب عمودي لـ (C_f) .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{cases} \text{ و لدينا كذلك :}$$

إذن (C_f) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

التمرين الرابع

4 I

لدينا f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1, +\infty[$ لأنها خارج الدتين قابلتين للاشتقاق .

ليكن x عنصرا من $]0,1[\cup]1, +\infty[$.

$$\text{لدينا : } f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x} \right)' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(\ln(x) - 1)$ فقط .

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
f	0	$+\infty$	e	$+\infty$

التمرين الثالث

1 II

$$\begin{aligned} M'' = R(M) &\Leftrightarrow (z_{M''} - z_{\Omega}) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_M - z_{\Omega}) \\ &\Leftrightarrow z' - (1+i) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z - (1+i)) \\ &\Leftrightarrow z' - (1+i) = i(z - 1 - i) \\ &\Leftrightarrow z' = iz - i + 1 + i + 1 \\ &\Leftrightarrow z' = iz + 2 \end{aligned}$$

التمرين الثالث

2 II

$$\begin{aligned} \begin{cases} z'' = iz + 2 \\ z' - 1 = -(z - 1) \end{cases} &\Rightarrow \frac{z'' - 2}{z' - 2} = \frac{iz}{z} = i \\ &\Rightarrow \frac{z'' - 2}{z' - 2} = i \quad (*) \\ &\Rightarrow \frac{z'' - 2}{z' - 2} \in i\mathbb{R} \\ &\Rightarrow A \text{ قائم الزاوية في } M' M'' \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow \left| \frac{z'' - 2}{z' - 2} \right| = |i| = 1 \\ &\Rightarrow |z'' - 2| = |z' - 2| \\ &\Rightarrow AM'' = AM' \\ &\Rightarrow A \text{ متساوي الساقين رأسه } A \quad (2) \end{aligned}$$

التمرين الثالث

2 II

$$M'' \text{ و } M' \text{ و } \Omega \text{ و } A \text{ نقط متداورة} \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_{M''} - z_A}{z_{M'} - z_A} \right) \equiv \arg \left(\frac{z_{M''} - z_{\Omega}}{z_{M'} - z_{\Omega}} \right)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z'' - 2}{z' - 2} \right) \equiv \arg \left(\frac{z'' - 1 - i}{z' - 1 - i} \right) [\pi] \\ &\Leftrightarrow \arg \left(\frac{iz}{-z} \right) \equiv \arg \left(\frac{iz + 1 - i}{-z + 1 - i} \right) [\pi] \\ &\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} \equiv \arg \left(-i \left(\frac{-z + 1 + i}{-z + 1 - i} \right) \right) [\pi] \\ &\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} \equiv \arg(-i) + \arg \left(\frac{-z + 1 + i}{-z + 1 - i} \right) [\pi] \\ &\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2} + \arg \left(\frac{-z + 1 + i}{-z + 1 - i} \right) [\pi] \\ &\Leftrightarrow \arg \left(\frac{-z + 1 + i}{-z + 1 - i} \right) \equiv 0 [\pi] \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{-z + 1 + i}{-z + 1 - i} \right) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \frac{(-z + 1 + i)}{(-z + 1 - i)} = \frac{(-z + 1 + i)}{(-z + 1 - i)} \\ &\Leftrightarrow \frac{(-\bar{z} + 1 - i)}{(-\bar{z} + 1 + i)} = \frac{(-z + 1 + i)}{(-z + 1 - i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (-z + 1 - i)(-\bar{z} + 1 - i) = (-\bar{z} + 1 + i)(-z + 1 + i) \\ &\Leftrightarrow 4i - 2zi - 2\bar{z}i = 0 \\ &\Leftrightarrow 4i - 2i(x + iy) - 2i(x - iy) = 0 ; z = x + iy \\ &\Leftrightarrow 4i - 4ix = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

و بالتالي مجموعة النقط التي من أجلها A و Ω و M' و M'' متداورة هي المستقيم $x = 1$: (Δ) .

التمرين الرابع

I 2

في هذا السؤال سوف نستعمل النتائج التالية :

$$\begin{cases} f \text{ est } \searrow \text{ sur }]1, e[\\ f(\alpha_n) = n \\ f(\alpha_{n+1}) = (n+1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (n+1) > n &\Rightarrow f(\alpha_{n+1}) > f(\alpha_n) \\ &\Rightarrow f^{-1}(f(\alpha_{n+1})) < f^{-1}(f(\alpha_n)) \\ &\Rightarrow \alpha_{n+1} < \alpha_n \\ &\Rightarrow (\alpha_n)_{n \geq 3} \text{ متتالية تناقصية} \end{aligned}$$

بما أن $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ مصغرة بالعدد 1 . لأن : $\alpha_n > 1$ حسب (7) :
فإن $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ متتالية متقاربة .

التمرين الرابع

II 2

$$\begin{aligned} 1 < \alpha_n < e &\Rightarrow 1 < \ln(e^{\alpha_n}) < e \\ &\Rightarrow 1 < \alpha_n < e \\ &\Rightarrow 1 < \ln((\alpha_n)^n) < e \\ &\Rightarrow 1 < n \ln(\alpha_n) < e \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} < \ln(\alpha_n) < \frac{e}{n} \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right) < \ln(\alpha_n) < \left(\frac{e}{n}\right) \\ &\quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad \searrow \\ &\quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\alpha_n) = 0 \\ &\Rightarrow e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\alpha_n)} = e^0 \\ &\Rightarrow e^{\ln(\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n)} = 1 \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = 1 \end{aligned}$$

التمرين الرابع

II 2

$$\begin{aligned} (\alpha_n)^n = e^{(n \ln \alpha_n)} &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n \ln \alpha_n)} \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^n = e^1 = e \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^n = e \end{aligned}$$

التمرين الخامس

I 1

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq x &\Rightarrow -x^2 \leq -t^2 \leq 0 \\ &\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-t^2} \leq 1 \\ &\Rightarrow \int_0^x e^{-x^2} dt \leq \int_0^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^x 1 dt \\ &\Rightarrow e^{-x^2} \int_0^x e^{-x^2} dt \leq e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \leq e^{-x^2} \int_0^x 1 dt \\ &\Rightarrow e^{-2x^2} [t]_0^x \leq F(x) \leq e^{-x^2} [t]_0^x \\ &\Rightarrow xe^{-2x^2} \leq F(x) \leq xe^{-x^2} \\ &\Rightarrow 0 \leq xe^{-2x^2} \leq F(x) \leq xe^{-x^2} \\ &\Rightarrow 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2} \end{aligned}$$

التمرين الخامس

I 1

$$\begin{aligned} x \geq 1 &\Rightarrow x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x \\ &\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x} \\ &\Rightarrow xe^{-x^2} \leq xe^{-x} \quad (\blacksquare) \end{aligned}$$

التمرين الرابع

I 5

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \right)' = \frac{(\ln x)^2}{x} - (\ln x - 1) \left(\frac{2 \ln x}{x} \right) \\ &= \frac{(\ln x)(2 - \ln x)}{x(\ln x)^4} \\ &= \frac{(2 - \ln x)}{x(\ln x)^3} \end{aligned}$$

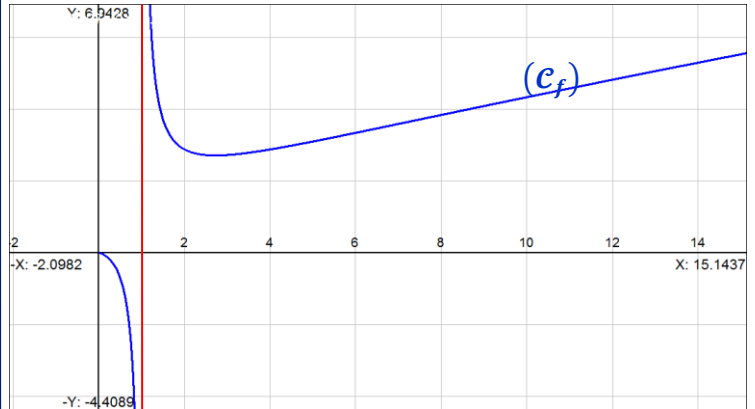
$$\begin{aligned} x = e^2 &\Rightarrow f''(x) = 0 \\ x > e^2 &\Rightarrow f''(x) < 0 \\ x < e^2 &\Rightarrow f''(x) > 0 \end{aligned}$$

نلاحظ أن الدالة f'' تنعدم في النقطة ذات الأفصول e^2 وتتغير إشارتها بجوار تلك النقطة . نستنتج إذن أن $(e^2, f(e^2))$ نقطة انعطاف للمنحنى

مع (C_f) : $f(e^2) = \frac{e^2}{\ln(e^2)} = \frac{e^2}{2}$
و بالتالي $(e^2, \frac{e^2}{2})$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

التمرين الرابع

I 6



التمرين الرابع

I 7

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $]1, e[$.
إذن f تقابل من المجال $]1, e[$ نحو المجال $]1, e[$.
و لدينا : $f(]1, e[) =]e, +\infty[$.
و بما أن $\epsilon \in]e, +\infty[$ لأن $n \geq 3 > e$.
فإن يمتلك سابقاً واحداً α_n بالتقابل f من المجال $]1, e[$.
أو بتعبير آخر : $\exists! \alpha_n \in]1, e[; f(\alpha_n) = n$.
و باستعمال نتيجة السؤال (1) نكتب : $e^{\alpha_n} = (\alpha_n)^n$.
و لدينا كذلك f دالة متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $]e, +\infty[$.
إذن f تقابل من المجال $]e, +\infty[$ نحو المجال $]e, +\infty[$.
بحيث : $f(]e, +\infty[) =]e, +\infty[$.
و بما أن $\epsilon \in]e, +\infty[$ لأن $n \geq 3 > e$.
فإن n يمتلك سابقاً واحداً b_n بالتقابل f من المجال $]e, +\infty[$.
أو بتعبير آخر : $\exists! b_n \in]e, +\infty[; f(b_n) = n$.
و باستعمال نتيجة السؤال (1) نكتب : $e^{b_n} = (b_n)^n$ (*) .

التمرين الرابع

II 1

$$\begin{aligned} b_n > e &\Rightarrow (b_n)^n > e^n \\ &\Rightarrow e^{b_n} > e^n ; \text{ d'après } (*) \\ &\Rightarrow b_n > n \Rightarrow b_n > \frac{n}{n} \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = +\infty \end{aligned}$$

التمرين الخامس

أ 4

ليكن x عنصرا من المجال $]0, +\infty[$.

لدينا : $F'(x) = e^{-2x^2} - 2x F(x)$

إذن : $F''(x) = -4x e^{-2x^2} - 2 F(x) - 2x e^{-2x^2} + 4x^2 F(x)$

$$H'(x) = \left(\frac{F'(x) e^{x^2}}{2x} \right)' = \frac{2x (F''(x) e^{x^2} + 2x F'(x) e^{x^2}) - 2F'(x) e^{x^2}}{4x^2} = \frac{2x F''(x) e^{x^2} + 4x^2 F'(x) e^{x^2} - 2F'(x) e^{x^2}}{4x^2}$$

نعوض في هذا التعبير الأخير $F'(x)$ و $F''(x)$ بقيمتهما ثم ننشر ثم نبسط لنحصل في الأخير على ما يلي :

$$H'(x) = \frac{-8x^2 e^{-x^2} - 2e^{-x^2}}{4x^2} = \frac{-2e^{-x^2}(4x^2 + 1)}{4x^2} < 0$$

إذن الدالة H تناقصية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$.

التمرين الخامس

ب 4

لدينا : $F'(c) = 0$; $F(c) = \frac{e^{-c^2}}{2c}$; $H(c) = 0$; $H(x) = \frac{F'(x) e^{x^2}}{2x}$.

بما أن الدالة H متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$.

فإن H تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو $]0, +\infty[$.

إذن : $H(c) = 0$; $\exists ! c \in]0, +\infty[$; $F'(c) = 0$ et $F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}$.

و لدينا : $H(x) = \frac{F'(x) e^{x^2}}{2x}$. إذن : $F'(x) = \frac{2x H(x)}{e^{x^2}}$

الدالة F' تتعدم في العدد c .

$x \geq c \Rightarrow H(x) \leq H(c) ; \text{car } H \text{ est } \searrow \text{ sur }]0, +\infty[$

$$\Rightarrow H(x) \leq H(c) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x H(x)}{e^{x^2}} \leq 0$$

$$\Rightarrow F'(x) \leq 0$$

$\Rightarrow F$ تناقصية على المجال $[c, +\infty[$

$x \leq c \Rightarrow H(x) \geq H(c) ; \text{car } H \text{ est } \searrow \text{ sur }]0, +\infty[$

$$\Rightarrow H(x) \geq H(c) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x H(x)}{e^{x^2}} \geq 0$$

$$\Rightarrow F'(x) \geq 0$$

$\Rightarrow F$ تزايدية على المجال $[0, c]$

نلخص إذن النتائج المحصل عليها في الجدول التالي :

x	0	c	$+\infty$
$F'(x)$	0	+	-
F	0	$\frac{e^{-2c^2}}{2c}$	0

$$0 \leq F(x) \leq x e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq F(x) \leq x e^{-x^2} \leq x e^{-x} ; \text{ d'après } \blacksquare$$

$$\Rightarrow 0 \leq F(x) \leq x e^{-x}$$

$$\Rightarrow 0 \leq F(x) \leq \left(\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x} \right)} \right)_{x \rightarrow +\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

التمرين الخامس

أ 2

لدينا $t \rightarrow e^{-t^2}$ دالة متصلة على المجال $]0, +\infty[$.
إذن فهي تقبل دالة أصلية نرمز لها بالرمز φ و تحقق :

$$\begin{cases} \varphi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \\ \varphi'(x) = e^{-x^2} ; \forall x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

و لدينا : $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-x^2} \varphi(x)$

بما أن $\varphi(x)$ و $x \rightarrow e^{-x^2}$ قابلتين للاشتقاق على $]0, +\infty[$ فإن F قابلة للاشتقاق كذلك على المجال $]0, +\infty[$.

و لدينا : $F'(x) = \left(e^{-x^2} \varphi(x) \right)'$

$$= \left(e^{-x^2} \right)' \varphi(x) + e^{-x^2} \varphi'(x)$$

$$= (-2x)(e^{-x^2})\varphi(x) + (e^{-x^2})(e^{-x^2})$$

$$= -2x F(x) + e^{-2x^2}$$

التمرين الخامس

أ 3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} G(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} F(\tan x) \\ &= \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ u = \tan x}} F(u) = 0 = G\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} G(x) = G\left(\frac{\pi}{2}\right) : \text{ إذن}$$

و هذا يعني أن الدالة G متصلة على يسار $\frac{\pi}{2}$.

التمرين الخامس

ب 3

- G دالة متصلة على المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- G قابلة للاشتقاق على المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = G(0)$.

إذن حسب مبرهنة Rolle نستنتج أن :

$$\exists \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[; G'(\alpha) = 0 \quad (*)$$

و منه : $\exists \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[; (1 + \tan^2 \alpha) F'(\tan \alpha) = 0$

يعني : $\exists \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[; F'(\tan \alpha) = 0$

يعني : $\exists c = \tan \alpha \in]0, +\infty[; F'(c) = 0$

يعني : $\exists c \in]0, +\infty[; -2c F(c) + e^{-2c^2} = 0$

إذن : $\exists c \in]0, +\infty[; F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}$

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2011

التمرين الأول

$$\begin{aligned} x, y \in]0,1[&\Rightarrow 0 < y < 1 \text{ et } 0 < x < 1 \\ &\Rightarrow -1 < -y < 0 \text{ et } -1 < -x < 0 \\ &\Rightarrow 0 < 1 - y < 1 \text{ et } 0 < 1 - x < 1 \\ &\Rightarrow 0 < (1 - y)(1 - x) < 1 \\ &\Rightarrow (1 - y)(1 - x) + xy > xy \\ &\Rightarrow \frac{xy}{(1 - y)(1 - x) + xy} < 1 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy > 0 \text{ et } (1 - x)(1 - y) > 0 \\ &\Rightarrow xy + (1 - x)(1 - y) > 0 \\ &\Rightarrow \frac{xy}{(1 - x)(1 - y) + xy} > 0 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \text{ et } (2) &\Rightarrow 0 < \frac{xy}{(1 - x)(1 - y) + xy} < 1 \\ &\Rightarrow 0 < x * y < 1 \\ &\Rightarrow x * y \in I \end{aligned}$$

لقد حصلنا على الإستلزام التالي : $(x, y) \in I^2 \Rightarrow x * y \in I$
إذن * قانون تركيب داخلي في المجموعة I .

التمرين الأول

$$\begin{aligned} (x, y) \in I^2 &\Rightarrow x * y = \frac{xy}{xy + (1 - x)(1 - y)} \\ &= \frac{yx}{yx + (1 - y)(1 - x)} \\ &= y * x \end{aligned}$$

إذن : $(x, y) \in I^2 \Rightarrow x * y = y * x$
و هذا يعني أن القانون * تبادلي في المجموعة I .

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in I^3 &\Rightarrow x * (y * z) = \frac{x(y * z)}{x(y * z) + (1 - x)(1 - y * z)} \\ &= \frac{xyz}{xyz + (1 - x)(1 - y)(1 - z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in I^3 &\Rightarrow (x * y) * z = \frac{(x * y)z}{(x * y)z + (1 - x * y)(1 - z)} \\ &= \frac{xyz}{xyz + (1 - x)(1 - y)(1 - z)} \end{aligned}$$

نحصل إذن على الإستلزام التالي :
 $(x, y, z) \in I^3 \Rightarrow x * (y * z) = (x * y) * z$
و هذا يعني أن * قانون تجميعي في المجموعة I .

التمرين الأول

ليكن e العنصر المحايد للقانون * في المجموعة I .

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (\forall x \in I) ; x * e = e * x = x \\ &\Rightarrow (\forall x \in I) ; \frac{xe}{xe + (1 - x)(1 - e)} = x \\ &\Rightarrow (\forall x \in I) ; \frac{e}{xe + (1 - x)(1 - e)} = 1 \\ &\Rightarrow (\forall x \in I) ; xe + (1 - x)(1 - e) = e \\ &\Rightarrow (\forall x \in I) ; e = \frac{1}{2} \in]0,1[= I \end{aligned}$$

نحصل إذن على عنصر محايد وحيد للقانون * في المجموعة I وهو $\frac{1}{2}$.

التمرين الأول

2

حصلنا من خلال ما سبق على ما يلي :

- $I =]0,1[$ مجموعة غير فارغة
- * قانون تركيب داخلي في I
- * يقبل $\frac{1}{2}$ كعنصر محايد في I
- * تبادلي و تجميعي في I .

إذن لكي تكون $(I, *)$ زمرة تبادلية يكفي أن نبين أن كل عنصر x من I يقبل ممتاثل بالقانون * في I .

ليكن x عنصرا من I و x' ممتاثله بالنسبة لـ *

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x * x' = x' * x = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{xx'}{xx' + (1 - x)(1 - x')} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow x' = (1 - x) \\ &\Rightarrow 0 < x' = (1 - x) < 1, \text{ car } 0 < x < 1 \\ &\Rightarrow x' = (1 - x) \in I \end{aligned}$$

إذن كل عنصر x من I يقبل ممتاثلا من I وهو $(1 - x)$.

وبالتالي نستنتج أن $(I, *)$ زمرة تبادلية.

التمرين الأول

3

لدينا : $H = \{ 2^n ; n \in \mathbb{Z} \}$

نلاحظ أن H جزء غير فارغ من \mathbb{R}_+^* . لأن : $2^n \in \mathbb{R}_+^*$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.
ليكن 2^m و 2^n عنصرين من H .

لدينا : $2^n \times (2^m)^{-1} = 2^{n-m} \in H$

إذن (H, \times) زمرة جزئية للزمرة (\mathbb{R}_+^*, \times) . و ذلك حسب الخاصية المميزة لزمرة جزئية.

التمرين الأول

3

$$\begin{aligned} (x, y) \in H^2 &\Rightarrow \varphi(x) * \varphi(y) = \left(\frac{1}{1+x} \right) * \left(\frac{1}{1+y} \right) \\ &= \frac{1}{(1+x)(1+y)} \\ &= \frac{1}{(1+x)(1+y)} + \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) \left(1 - \frac{1}{1+y} \right) \\ &= \frac{1}{(1+x)(1+y)} \times \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} \\ &= \frac{1}{1+xy} = \varphi(xy) \end{aligned}$$

نحصل إذن على الإستلزام التالي :

$$(x, y) \in H^2 \Rightarrow \varphi(x) * \varphi(y) = \varphi(xy)$$

إذن φ تشاكل من (H, \times) نحو $(I, *)$.

التمرين الأول

3

لدينا φ تشاكل من (H, \times) نحو $(I, *)$.
إذن صورة الزمرة (H, \times) هي الزمرة $(\varphi(H), *)$.
لنبين الآن أن : $\varphi(H) = k$

$$2^n \in H \Leftrightarrow \varphi(2^n) \in \frac{1}{1+2^n} \in k$$

إذن : $\varphi(H) = k$

بما أن (H, \times) زمرة جزئية للزمرة (\mathbb{R}_+^*, \times) .
فإن $(k, *) = (\varphi(H), *)$ زمرة جزئية للزمرة $(I, *)$.
وبالتالي $(k, *)$ زمرة جزئية للزمرة $(I, *)$.

التمرين الثاني

2 ج

$$18 = 18 \wedge (x + 1) \Rightarrow 18/(x + 1)$$

$$\Rightarrow 18/(x + 1) - 18 ; 18/(-18)$$

$$\Rightarrow 18/(x - 17)$$

$$\Rightarrow x \equiv 17 [18]$$

التمرين الثالث

1 I

$$(-2i)^3 - (1 + 2i)(-2i)^2 + 3(1 + i)(-2i) - 10(1 + i)$$

$$= 8i + 4(1 + 2i) - 6i(1 + i) - 10(1 + i)$$

$$= 8i + 4 + 8i - 6i - 6 - 10 - 10i$$

$$= 16i - 16i + 10 - 10 = 0$$

التمرين الثالث

2 I

ننشر التعبير $(z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$ نحصل على:

$$z^3 + (\alpha + 2i)z^2 + (\beta + 2i\alpha)z + 2i\beta$$

ومن هنا نستنتج حسب مبدأ مقابلة معاملات الحدود من نفس الدرجة نجد:

$$\begin{cases} 2i\beta = -10(1 + i) \\ \alpha + 2i = -(1 + 2i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -(1 + 4i) \\ \beta = 5i - 5 \end{cases}$$

التمرين الثالث

3 I

ليكن $(x + iy)$ جذرا مربعا للعدد العقدي $(5 - 12i)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + iy)^2 = 5 - 12i \\ |x + iy| = \sqrt{5^2 + 12^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2) + 2ixy = 5 - 12i \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2) = 5 \\ xy = -6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ xy = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ أو } x = 3 \\ y = 2 \text{ أو } y = -2 \end{cases}$$

وبالتالي الجذران المربعان للعدد العقدي $(5 - 12i)$ هما: $(3 - 2i)$ و $(-3 + 2i)$

التمرين الثالث

3 ب

لنحل في \mathbb{C} المعادلة التالية:

$$(z + 2i)(z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -2i \text{ ou } z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i = 0$$

لدينا: $\Delta = (1 + 4i)^2 - 4(-5 + 5i) = 5 - 12i = (3 - 2i)^2$

إذن $z_1 = -1 + 3i$ و $z_2 = 2 + i$

وبالتالي المعادلة تقبل ثلاثة حلول وهي: $-2i$ و $2 + i$ و $-1 + 3i$

التمرين الثالث

1 II

$$\frac{a - c}{b - c} = \frac{-1 + 3i - 2 - i}{-2i - 2 - i} = \frac{3 - 2i}{2 + 3i} = -i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \arg\left(\frac{a - c}{b - c}\right) \equiv \arg\left(e^{-\frac{i\pi}{2}}\right) [2\pi] \\ \left|\frac{a - c}{b - c}\right| = \left|e^{-\frac{i\pi}{2}}\right| \end{cases}$$

التمرين الثاني

1 أ

نطلق من المتوافقة التالية: $10^x \equiv 2 [19]$
و نضرب طرفيها في العدد 10 نجد: $10^{x+1} \equiv 20 [19]$
من جهة أخرى لدينا: $20 \equiv 1 [19]$
إذن: $10^{x+1} \equiv 1 [19]$

التمرين الثاني

1 ب

لدينا 19 عدد أولي. إذن حسب Fermat:

$$(\forall a \wedge 19 = 1) ; a^{19-1} \equiv 1 [19]$$

من أجل $a = 10$ نحصل على: $10^{19-1} \equiv 1 [19]$
أي: $10^{18} \equiv 1 [19]$

التمرين الثاني

2 أ

نضع $d = (x + 1) \wedge 18$
إذن يوجد u و v من \mathbb{Z} بحيث: $d = 18u + (x + 1)v$
و نفصل هنا بين أربع حالات للعدد u و v .
الحالة الأولى: u و v عددان سالبان معا.
هذه الحالة مستحيلة لأن 18 و $(x + 1)$ و d كلها أعداد صحيحة طبيعية و لا يوجد u و v بحيث $d = 18u + (x + 1)v$.
الحالة الثانية: u عدد سالب و v عدد موجب.
إذن: $d + 18u' = (x + 1)v$
بحيث $u' = -u$ عدد موجب و v عدد موجب.

$$(*) \begin{cases} 10^{18u'} \equiv 1 [19] \\ 10^{(x+1)v} \equiv 1 [19] \end{cases} \text{ إذن: } \begin{cases} 10^{18} \equiv 1 [19] \\ 10^{(x+1)} \equiv 1 [19] \end{cases}$$

و منه: $\begin{cases} 10^{d+18u'} \equiv 10^d [19] \\ 10^{(x+1)v} \equiv 1 [19] \end{cases}$

و بما أن: $d + 18u' = (x + 1)v$
فإن: $10^{d+18u'} = 10^{(x+1)v}$

و منه حسب (*): $10^d \equiv 1 [19]$
الحالة الثالثة: v عدد سالب و u عدد موجب.

إذن: $d + (x + 1)v' = 18u$
بحيث $v' = -v$ عدد موجب و u عدد موجب.

$$(\blacksquare) \begin{cases} 10^{18u} \equiv 1 [19] \\ 10^{d+(x+1)v'} \equiv 1 [19] \end{cases} \text{ إذن: } \begin{cases} 10^{18} \equiv 1 [19] \\ 10^{(x+1)} \equiv 1 [19] \end{cases}$$

و بما أن: $d + (x + 1)v' = 18u$ فإن: $d = (x + 1)v' - 18u$
و منه حسب (\blacksquare) نكتب: $10^d \equiv 1 [19]$
الحالة الرابعة: u عدد موجب و v عدد موجب.

لدينا: $d = 18u + (x + 1)v$

$$\begin{cases} 10^{18u} \equiv 1 [19] \\ 10^{(x+1)v} \equiv 1 [19] \end{cases} \text{ إذن: } \begin{cases} 10^{18} \equiv 1 [19] \\ 10^{(x+1)} \equiv 1 [19] \end{cases}$$

نضرب هاتين المتوافتين طرفا طرفا نجد: $10^{18u+(x+1)v} \equiv 1 [19]$
يعني: $10^d \equiv 1 [19]$

وبالتالي نستنتج أنه في جميع الحالات تحصل على: $10^d \equiv 1 [19]$

التمرين الثاني

2 ب

$$d = 18 \wedge (x + 1) \Rightarrow d/18$$

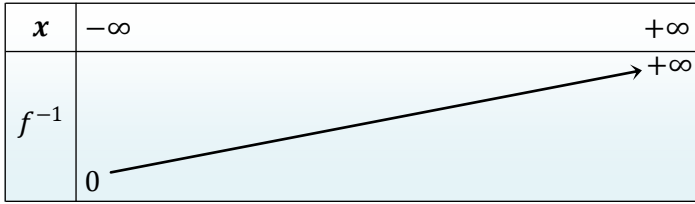
$$\Rightarrow d \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

$$\Rightarrow d = 18 ; \text{ car } \begin{cases} 10 \equiv 10 [19] \\ 10^2 \equiv 5 [19] \\ 10^3 \equiv 12 [19] \\ 10^6 \equiv 11 [19] \\ 10^9 \equiv 18 [19] \\ 10^{18} \equiv 1 [19] \end{cases}$$

التمرين الرابع

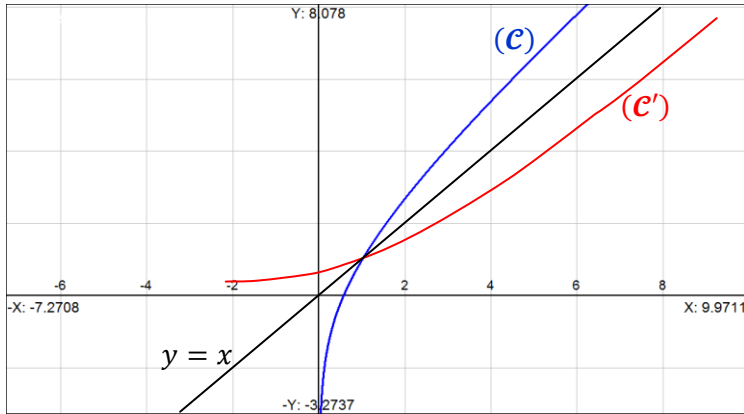
2

لدينا f دالة متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $]0; +\infty[$.
 إذن f تقابل من $]0; +\infty[$ نحو صورته $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
 و تقابله العكسي f^{-1} دالة متصلة و تزايدية قطعاً على \mathbb{R} .



التمرين الرابع

3



التمرين الرابع

4

$$\begin{aligned} \int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx &= \int_1^{e+1} \frac{f^{-1}(x)}{t} \frac{dx}{f'(t)dt} \\ &= \int_1^e t f'(t) dt \\ &= [t f(t)]_1^e - \int_1^e f(t) dt \\ &= [t f(t)]_1^e - \left[\frac{t^2}{2} + t \ln t - t \right]_1^e \\ &= e^2 + e - 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^2 + 2e - 3}{2} \approx 4,9 \end{aligned}$$

التمرين الرابع

4

لتكن \mathcal{A} مساحة الحيز من المستوى المذكور في السؤال .

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^{e+1} |x - f^{-1}(x)| dx \\ &= \int_1^{e+1} (x - f^{-1}(x)) dx ; \text{ car } \begin{cases} x \geq f^{-1}(x) \\ \forall x \geq 1 \end{cases} \\ &= \int_1^{e+1} x dx - \int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^{e+1} - \left(\frac{e^2 + 2e - 3}{2} \right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} (\overline{CB}, \overline{CA}) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \\ |a-c| = 1 \\ |b-c| = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} (\overline{CB}, \overline{CA}) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \\ CA = CB \end{cases} \end{aligned}$$

نستنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية في C و متساوي الساقين رأسه C .

التمرين الثالث

2 II

نضع : $M(z)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

$$\begin{aligned} R_1(M) = M_1 &\Leftrightarrow (z_1 - b) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - b) \\ &\Leftrightarrow (z_1 + 2i) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (z + 2i) \\ &\Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) z - \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

التمرين الثالث

2 II

$$R_2(M) = M_2 \Leftrightarrow (z_2 - a) = e^{-\frac{2i\pi}{3}}(z - a)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (z_2 + 1 - 3i) = \left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (z + 1 - 3i) \\ &\Leftrightarrow z_2 = - \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) z - (1 - 3i) \left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [M_1 M_2] \text{ منتصف } I &\Leftrightarrow aff(I) = \frac{z_1 + z_2}{2} \\ &\Leftrightarrow aff(I) = -\sqrt{3} - i - \frac{(1 - 3i)(3 + i\sqrt{3})}{2} \\ &\Leftrightarrow aff(I) = \text{constante complexe} \\ &\Leftrightarrow \text{نقطة ثابتة في المستوى } I \end{aligned}$$

التمرين الرابع

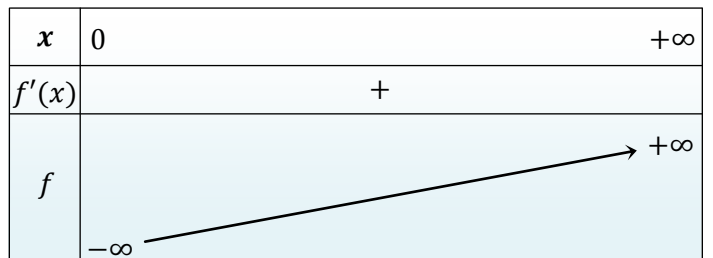
1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln x) = 0 + -\infty = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x + \ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{\ln x}{x} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln x - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{aligned}$$

التمرين الرابع

2

ليكن x عنصراً من المجال $]0; +\infty[$.
 لدينا f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ لأنها عبارة عن مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$.
 ولدينا : $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$
 إذن f دالة تزايدية قطعاً على المجال $]0; +\infty[$.



ملاحظة:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \ln n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = (+\infty)(1 - 0) = (+\infty)$
 $\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \underbrace{(n - \ln n)}_{n \rightarrow \infty} \leq x_n$
 $\Rightarrow (+\infty)$

و هذا دليل آخر على أن المتتالية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متباعدة .
 يعني : $\lim (x_n) = +\infty$

التمرين الرابع

$n - \ln n \leq x_n \Rightarrow \frac{n - x_n}{n} \leq \frac{\ln n}{n}$
 $\Rightarrow \left| \frac{n - x_n}{n} \right| \leq \frac{\ln n}{n}$
 $\Rightarrow \left| \frac{n - x_n}{n} \right| \leq \frac{\ln n}{n}$
 $\Rightarrow \frac{-\ln n}{n} \leq \left(\frac{n - x_n}{n} \right) \leq \frac{\ln n}{n}$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - x_n}{n} \right) = 0$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n - n}{n} \right) = 0$

$n - \ln n \leq x_n \leq n$
 $\Rightarrow \frac{n - \ln n}{n - \ln n} \leq \frac{x_n}{n - \ln n} \leq \frac{n}{n - \ln n}$
 $\Rightarrow 1 \leq \frac{x_n}{n - \ln n} \leq \frac{n}{n - \ln n}$
 $\Rightarrow 1 \leq \frac{x_n}{n - \ln n} \leq \frac{n}{n - \ln n}$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{n - \ln n} \right) = 1$

التمرين الخامس

لدينا دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0,1[$.
 ولدينا : $f'_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$; $\forall x \in]0,1[$
 إذن دالة f_n تزايدية قطعاً على المجال $]0,1[$.
 ومنه f_n تقابل من المجال $]0,1[$ نحو المجال $]f_n(0), f_n(1)[$.
 ولدينا $f_n(0) = -1 < 0$ ولدينا كذلك : $f_n(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 0$
 إذن : $0 \in]f_n(0), f_n(1)[$ أي : $f_n(0) \cdot f_n(1) < 0$
 ومنه 0 يمتلك سابقاً واحداً α_n من المجال $]0,1[$ بالتقابل f_n .
 أو بتعبير آخر : $\exists! \alpha_n \in]0,1[; f_n(\alpha_n) = 0$

التمرين الرابع

نضع : $h(x) = x + \ln x - n$
 لدينا h دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$.
 ولدينا كذلك : $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$
 إذن h تزايدية قطعاً على المجال $]0; +\infty[$.
 ومنه تقابل من $]0; +\infty[$ نحو صورته $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
 وبما أن : $0 \in \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
 فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً x_n بالتقابل h من المجال $]0; +\infty[$.
 يعني : $\exists! x_n \in]0, +\infty[; h(x_n) = 0$
 أو بتعبير آخر : $\exists! x_n > 0 ; x_n + \ln(x_n) = 0$

التمرين الرابع

x_1 هو حل المعادلة : $x + \ln x = 1$
 ولدينا : $1 + \ln 1 = 1$ إذن : $x_1 = 1$
 ولدينا : $f(x_n) = n$ إذن : $x_n = f^{-1}(n)$
 وبما أن f^{-1} تزايدية قطعاً على \mathbb{R} فإن :
 $x_{n+1} = f^{-1}(n+1) > f^{-1}(n) = x_n$
 إذن من النتيجة $x_{n+1} > x_n$ نستنتج أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية قطعاً .
 لنبين الآن أن المتتالية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ غير مكبورة .
 بالخلف، نفترض أن المتتالية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ مكبورة بعدد A .
 $\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n \leq A$
 $\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) ; f(x_n) \leq f(A) = B$
 $\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) ; f(x_n) \leq B$
 $\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) ; n \leq B$
 \Rightarrow المجموعة \mathbb{N} مكبورة بالعدد B
 \Rightarrow مستحيل
 \Rightarrow Absurde
 إذن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية غير مكبورة .
 لقد حصلنا على أن المتتالية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية قطعاً وليست مكبورة
 إذن فهي متباعدة . يعني : $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = +\infty$

التمرين الرابع

$(n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n \geq 1$
 $\Rightarrow \ln n \geq 0$
 $\Rightarrow n + \ln n \geq n$
 $\Rightarrow f(n) \geq f(x_n)$
 $\Rightarrow f^{-1}(f(n)) \geq f^{-1}(f(x_n)) ; (f^{-1} \text{ est } \nearrow)$
 $\Rightarrow n \geq x_n$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n \geq x_n$

التمرين الرابع

$(n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n \geq x_n$
 $\Rightarrow \frac{x_n}{n} \leq 1$
 $\Rightarrow \ln \left(\frac{x_n}{n} \right) \leq 0$
 $\Rightarrow \ln(x_n) - \ln(n) \leq 0$
 $\Rightarrow \underbrace{x_n + \ln(x_n)}_{=n} - \ln(n) \leq x_n$
 $\Rightarrow n - \ln(n) \leq x_n$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n - \ln n \leq x_n$

$$0 \leq t \leq \alpha_n \Rightarrow 0 \leq 1 - \alpha_n \leq 1 - t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - \alpha_n} \geq \frac{1}{1 - t} \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{t^n}{1 - t} \leq \frac{t^n}{1 - \alpha_n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1 - t} \right) dt \leq \left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \int_0^{\alpha_n} t^n dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1 - t} \right) dt \leq \left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} \right)$$

و بما أن : $(\alpha_n)^{n+1} < 1$

$$\left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} \right) \leq \left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left(\frac{1}{n+1} \right) : \text{فإن}$$

$$(\forall n \geq 2) ; 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1 - t} \right) dt \leq \left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left(\frac{1}{n+1} \right)$$

$$0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1 - t} \right) dt \leq \left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left(\frac{1}{n+1} \right) : \text{لدينا}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left(\frac{1}{n+1} \right) = 0^- \times 0^+ = 0 : \text{لدينا}$$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1 - t} \right) dt \leq \left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left(\frac{1}{n+1} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1 - t} \right) dt = 0 : \text{و بالتالي}$$

$$1 + \ln(1 - \alpha_n) = - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1 - t} \right) dt : \text{و نعلم أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \ln(1 - \alpha_n)) = 0 : \text{إذن}$$

$$\Rightarrow 1 + \ln(1 - l) = 0 ; \text{avec } l = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)$$

$$\Rightarrow \ln(1 - l) = -1 \Rightarrow \ln \left(\frac{1}{1 - l} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - l} = e \Rightarrow e(1 - l) = 1$$

$$\Rightarrow e - el = 1 \Rightarrow l = \frac{e - 1}{e} = 1 - e^{-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = \frac{e - 1}{e} : \text{و بالتالي}$$

$$f_{n+1}(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} > 0, \quad \forall x \in]0,1[$$

$$\Rightarrow \forall x \in]0,1[; f_{n+1}(x) > f_n(x)$$

و لدينا كذلك : $\alpha_{n+1} \in]0,1[\Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_{n+1})$

$$\Rightarrow f_n(\alpha_n) > f_n(\alpha_{n+1}) ; \text{d'après } \star \text{ suivante :}$$

$$(\star) (\forall n \geq 2) ; f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = f_n(\alpha_n) = 0$$

$$\Rightarrow f_n^{-1}(f_n(\alpha_n)) > f_n^{-1}(f_n(\alpha_{n+1})) ; \text{car } f_n^{-1} \nearrow$$

$$\Rightarrow \alpha_n > \alpha_{n+1} ; (\forall n \geq 2)$$

$$\Rightarrow \text{تناقصية قطعاً } (\alpha_n)_{n \geq 2}$$

من جهة أخرى لدينا : $(\forall n \geq 2) ; 0 < \alpha_n < 1$

يعني أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ مصغورة بالعدد 0 .

الخلاصة : $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ متتالية تناقصية و مصغورة إذن فهي متقاربة .

لدينا $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي t المخالف للعدد 1 .

$$1 + t + \dots + t^{n-1} = \frac{1 - t^n}{1 - t} = \frac{1}{1 - t} - \frac{t^n}{1 - t} : \text{إذن}$$

$$(t \neq 1) \Rightarrow 1 + t + \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1 - t} - \frac{t^n}{1 - t}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha_n} (1 + t + \dots + t^{n-1}) dt = \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{1}{1 - t} - \frac{t^n}{1 - t} \right) dt$$

$$\Rightarrow \left(\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} \right) = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1 - t} \right) dt$$

$$\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1 - t} \right) dt$$

و نعلم أن : $f_n(\alpha_n) = 0$

$$-1 + \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = 0 : \text{إذن}$$

$$1 = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1 - t} \right) dt : \text{إذن}$$

$$1 + \ln(1 - \alpha_n) = - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1 - t} \right) dt : \text{ومنه}$$

أجوبة امتحان الدورة العادية 2012

التمرين الأول

1 I

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

التمرين الأول

2 I

من خلال السؤال السابق نلاحظ أن: $A^2 = I - A$

إذن: $A(A + I) = A^2 + A = I$

و كذلك: $(A + I)A = A^2 + A = I$

ومنه نستنتج أن المصفوفة A قابلة للقلب (*invertible*).

و مقلوبها هو المصفوفة $(A + I)$. أو بتعبير آخر: $A^{-1} = A + I$

التمرين الأول

1 II

ليكن x و y عنصرين من \mathbb{R} .

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1 = (xy)^2 - x^2 - y^2 + 1 + 1$$

$$= x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2$$

التمرين الأول

2 II

ليكن a و b عنصرين من $I =]1; +\infty[$.

$$(a, b) \in I^2 \Rightarrow a > 1 \text{ et } b > 1$$

$$\Rightarrow a^2 > 1 \text{ et } b^2 > 1$$

$$\Rightarrow a^2 - 1 > 0 \text{ et } b^2 - 1 > 0$$

$$\Rightarrow (b^2 - 1)(a^2 - 1) > 0$$

$$\Rightarrow (b^2 - 1)(a^2 - 1) + 1 > 1$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2 > 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2} > 1$$

$$\Rightarrow a * b > 1$$

$$\Rightarrow a * b \in I$$

إذن * قانون تركيب داخلي في المجموعة I .

التمرين الأول

3 II

ليكن a و b عنصرين من \mathbb{R}_+^* .

$$\varphi(a) * \varphi(b) = \sqrt{a+1} * \sqrt{b+1}$$

$$= \sqrt{(a+1)(b+1) - (a+1) - (b+1) + 2}$$

$$= \sqrt{ab+1} = \varphi(a * b)$$

إذن: $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$; $\varphi(a) * \varphi(b) = \varphi(a * b)$

و هذا يعني أن φ تتشاكل من (\mathbb{R}_+^*, \times) نحو $(I, *)$.

لنبين الآن أن φ تقابل.

ليكن y عنصرا من I ولنحل في \mathbb{R}_+^* المعادلة $\varphi(x) = y$ ذات المجهول x .

بما أن $y > 1$ فإن $y^2 - 1 > 0$ ومنه $x \in \mathbb{R}_+^*$

و بما أن $y^2 - 1$ عدد وحيد من أجل $y > 1$.

فإن: $\varphi(x) = y$; $(\forall y \in I), (\exists! x = y^2 - 1)$

و هذا يعني أن φ تقابل من (\mathbb{R}_+^*, \times) نحو $(I, *)$.

و تقابله العكسي φ^{-1} معرف بما يلي: $\varphi^{-1}: (I, *) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times)$

$$y \rightarrow y^2 - 1$$

و بالتالي φ تتشاكل من (\mathbb{R}_+^*, \times) نحو $(I, *)$.

التمرين الأول

3 II

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية للزمرة و يحولها من

مجموعة الانطلاق إلى مجموعة الوصول.

نستنتج إذن البنية الجبرية لـ $(I, *)$ انطلاقا من البنية الجبرية لـ (\mathbb{R}_+^*, \times)

و ذلك عبر التشاكل التقابلي.

لدينا (\mathbb{R}_+^*, \times) زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون \times هو العدد 1

و كل عنصر x يقبل مائلا و هو مقلوبه $\frac{1}{x}$.

إذن $(I, *)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $*$ هو العدد $\varphi(1)$

و كل عنصر y يقبل مائلا نرزم له بالرمز $Sym(y)$.

و لدينا: $\varphi(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

و لدينا كذلك $y \in I$ إذن يوجد x من \mathbb{R}^* .

بحيث: $y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(y) = y^2 - 1$

و منه: $Sym(y) = Sym(\varphi(x)) = \varphi(Sym(x)) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= \varphi\left(\frac{1}{y^2 - 1}\right) = \sqrt{\frac{1}{y^2 - 1} + 1} = \sqrt{\frac{y^2}{y^2 - 1}}$$

التمرين الأول

3 II

ليكن $m \in \mathbb{Z}$ إذن $2^m + 1 > 1$

و منه: $\sqrt{2^m + 1} > 1$. يعني: $\sqrt{2^m + 1} \in I$

و هذا يعني أن (Γ) جزء غير فارغ من I .

ليكن $\sqrt{1+2^m}$ و $\sqrt{1+2^n}$ عنصرين من (Γ) .

$$(\sqrt{1+2^m}) * (\sqrt{1+2^n})' = (\sqrt{1+2^m}) * \left(\sqrt{\frac{1+2^n}{2^n}}\right)'$$

$$= \sqrt{(1+2^m)\left(\frac{1+2^n}{2^n}\right) - (1+2^m) - \left(\frac{1+2^n}{2^n}\right) + 2}$$

$$= \sqrt{2^{m-n} + 1} \in (\Gamma)$$

إذن حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية نستنتج أن $(\Gamma, *)$ زمرة جزئية

من الزمرة $(I, *)$.

التمرين الثاني

1 I

$$(E): iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$$

$$\Delta = (2-i)^2 a^2 + 4i(1+i)a^2 = (ai)^2$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين عقديين z_2 و z_1 .

$$\begin{cases} z_1 = \frac{(i-2)a + ai}{2i} = a(1+i) \\ z_2 = \frac{(i-2)a - ai}{2i} = ai \end{cases}$$

التمرين الثاني

2 I

$$z_1 z_2 = ai(a)(1+i) = a^2 i - a^2 = a^2(i-1)$$

H هي المسقط العمودي لـ O على المستقيم (AD) .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (AD) \perp (OH) \\ (AD) \parallel (AH) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{z_H - z_O}{z_D - z_A} \right) \in i\mathbb{R} \\ \left(\frac{z_H - z_A}{z_D - z_A} \right) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\left(\frac{z_H - z_O}{z_D - z_A} \right)} = - \left(\frac{z_H - z_O}{z_D - z_A} \right) \\ \overline{\left(\frac{z_H - z_A}{z_D - z_A} \right)} = \left(\frac{z_H - z_A}{z_D - z_A} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\left(\frac{h-0}{ic-1} \right)} = - \left(\frac{h-0}{ic-1} \right) \\ \overline{\left(\frac{h-1}{ic-1} \right)} = \left(\frac{h-1}{ic-1} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\left(\frac{\bar{h}}{-ic-1} \right)} = - \left(\frac{h}{ic-1} \right) \\ \overline{\left(\frac{\bar{h}-1}{-ic-1} \right)} = \left(\frac{h-1}{ic-1} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{h}(ic-1) = h(ic+1) \\ (\bar{h}-1)(ic+1) = -(h-1)(ic+1) \end{cases}$$

من المعادلة الثانية من هذه النظمة نستنتج ما يلي :

$$\bar{h}(ic-1) = (ic-1) - (h-1)(ic+1)$$

نعوض في المعادلة الأولى نحصل على :

$$(ic-1) - (h-1)(ic+1) = h(ic+1)$$

بعد النشر و التبسيط نحصل على : $2ic - 2h - 2hic = 0$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم $\frac{i}{2c}$ نحصل على :

$$-1 - \frac{hi}{c} + h = 0$$

$$h - 1 = \frac{hi}{c} \quad \text{أي :}$$

$$h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c) \quad \text{نضيف إلى كل الطرفين العدد } -i \text{ نجد :}$$

$$\frac{h - (1+i)}{h-c} = \frac{i}{c} \quad \text{لدينا : } h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c) \quad \text{إذن :}$$

$$\overline{\left(\frac{z_H - z_B}{z_A - z_C} \right)} = - \left(\frac{h - (1+i)}{h-c} \right) \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{-i}{c} = - \left(\frac{z_H - z_B}{z_A - z_C} \right)$$

$$\overline{\left(\frac{z_H - z_B}{z_A - z_C} \right)} = - \left(\frac{z_H - z_B}{z_A - z_C} \right) \quad \text{إذن :}$$

و هذا يعني أن : $(CH) \perp (BH)$

في البداية يجب كتابة $z_1 z_2$ في شكله المثلثي .

$$z_1 z_2 = a^2(i-1) = a^2 \sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= a^2 \sqrt{2} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$= a^2 \sqrt{2} \left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$= a^2 \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$$

$$= a^2 \sqrt{2} e^{\frac{3\pi i}{4}}$$

$$= \left[a^2 \sqrt{2}; \frac{3\pi}{4} \right]$$

$$z_1 z_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z_1 z_2) \equiv 0 \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(a^2 \sqrt{2} e^{\frac{3\pi i}{4}}\right) \equiv 0 \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow \arg(a^2) + \arg(\sqrt{2}) + \arg\left(e^{\frac{3\pi i}{4}}\right) \equiv 0 \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow 2 \arg(a) + 0 + \frac{3\pi}{4} \equiv 0 \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow 2 \arg(a) \equiv \frac{-3\pi}{4} \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow \arg(a) \equiv \frac{-3\pi}{8} \pmod{\frac{\pi}{2}}$$

لدينا $A(1)$ و $B(i+1)$ و $C(c)$ و $M(z)$.

$(AD) \parallel (AM) \Leftrightarrow A, D$ و M مستقيمات

$$\Leftrightarrow \frac{z_M - z_A}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z_M - z_A}{z_D - z_A} \right)} = \frac{z_M - z_A}{z_D - z_A}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z-1}{ic-1} \right)} = \frac{z-1}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}-1}{-ic-1} = \frac{z-1}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow (ic-1)(\bar{z}-1) + (z-1)(ic+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}ic - ic - \bar{z} + 1 + zic + z - ic - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}(ic-1) + z(ic+1) = 2ic$$

$$(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow \frac{z_M - z_O}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z_M - z_O}{z_D - z_A} \right)} = - \left(\frac{z - 0}{ic - 1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}}{-ic-1} = \frac{-z}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}(ic-1) = z(ic+1)$$

$$\Leftrightarrow z(ic+1) - \bar{z}(ic-1)$$

باستعمال خوارزمية أقليدس نُحدد $195 \wedge 143$ بالطريقة التالية :

$$\begin{array}{r} 195 \\ 52 \end{array} \begin{array}{r} 143 \\ 1 \end{array} \quad \text{المرحلة الأولى}$$

$$\begin{array}{r} 143 \\ 39 \end{array} \begin{array}{r} 52 \\ 2 \end{array} \quad \text{المرحلة الثانية}$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ 13 \end{array} \begin{array}{r} 39 \\ 1 \end{array} \quad \text{المرحلة الثالثة}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ 10 \end{array} \begin{array}{r} 13 \\ 3 \end{array} \quad \text{المرحلة الرابعة}$$

القاسم المشترك الأكبر لـ 143 و 195 هو آخر باقي غير منعدم أي 13 .
و بالتالي : $195 \wedge 143 = 13$ (1)

من النتيجة (1) نستنتج وجود عددين نسبيين k و u بحيث :

$$143u + 195k = 13$$

نضع $v = -k$ إذن $143u - 195v = 13$.
و بما أن العدد 13 قاسم للعدد 52 .

فإن $(143u - 195v)$ قاسم للعدد 52 .

و منه : $(\exists w \in \mathbb{Z}) ; 52 = (143u - 195v)w$

$$\text{أي : } \exists x, y \in \mathbb{Z} ; 52 = 143 \underset{x}{u}w - 195 \underset{y}{v}w$$

و بالتالي : $\exists x, y \in \mathbb{Z} ; 52 = 143x - 195y$

أي أن المعادلة السابقة تقبل حولا في \mathbb{Z}^2 .

و يمكن كذلك استعمال الخاصية التالية مباشرة :

تقبل المعادلة $ax + by = c$ حولا في \mathbb{Z}^2 إذا وفقط إذا كان $a \wedge b$ يقسم c حيث $a \wedge b$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

حصلنا على $195 \wedge 143 = 13$. و نلاحظ أن 13 يقسم العدد 52 . إذن حسب الخاصية المذكورة نستنتج أن المعادلة قابلة للحل .

لدينا $(-1; -1)$ حل خاص للمعادلة (E) .

يعني : $143(-1) - 195(-1) = 52$ (*)

ليكن (x, y) الحل العام للمعادلة (E) .

يعني : $143x - 195y = 52$ (**)

ننجز عملية الطرح بين المتساويتين (*) و (**): طرفا طرفا نحصل على :

$$143(-1 - x) - 195(-1 - y) = 0$$

يعني : $143(x + 1) = 195(y + 1)$

لدينا : $195 = 15 \times 13$ و $143 = 11 \times 13$.

نحصل إذن على : $11(x + 1) = 15(y + 1)$ (■)

و منه 11 قاسم للعدد $15(y + 1)$.

و بما أن $11 \wedge 15 = 1$ فإنه حسب Gauss نستنتج أن 11 قاسم لـ $(y + 1)$

إذن : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; y + 1 = 11k$.

أي : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; y = 11k - 1$.

نعوض y في المتساوية (■) نحصل على $x = 15k - 1$.

عكسيا لدينا : $(\forall k \in \mathbb{Z}) ; 143(15k - 1) - 195(11k - 1) = 52$

$$\text{و بالتالي : } (E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15k - 1 \\ y = 11k - 1 \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) تُكتب على الشكل التالي :

$$S = \{ (15k - 1; 11k - 1) ; k \in \mathbb{Z} \}$$

لدينا 5 عدد أولي و لا يقسم n لأن $n \wedge 5 = 1$.

إذن حسب مبرهنة Fermat : $n^{5-1} \equiv 1 [5]$

يعني : $n^4 \equiv 1 [5]$ يعني : $(\forall k \in \mathbb{N}) ; (n^4)^k \equiv 1^k [5]$

يعني : $(\forall k \in \mathbb{N}) ; n^{4k} \equiv 1 [5]$

ليكن n عنصرا من \mathbb{N}^* . و نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان 5 قاسما لـ n .

فإن 5 قاسم للجداء $n(n^{x-1} - n^{y-1})$.

و لدينا العدد $(n^{x-1} - n^{y-1})$ عدد صحيح طبيعي لأن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين .

إذن 5 يقسم العدد $(n^x - n^y)$. أي : $n^x \equiv n^y [5]$

الحالة الثانية : إذا كان 5 لا يقسم n .

لدينا $x \equiv y [4]$.

إذن يوجد عدد نسبي k بحيث : $x - y = 4k$.

إذا كان $k = 0$ فإن $x = y$ و منه $n^x \equiv n^y [5]$

إذا كان $k > 0$ فإنه حسب ما سبق $n^{4k} \equiv 1 [5]$

أي : $n^{x-y} \equiv 1 [5]$

و تضرب طرفي هذه المتوافقة في n^y نجد : $n^x \equiv n^y [5]$

إذا كان $k < 0$ فإن $-k > 0$. و منه : $y - x = 4(-k)$

أي : $y - x = 4k'$ مع $k' = -k > 0$

إذن حسب ما سبق : $n^{4k'} \equiv 1 [5]$

أي : $n^{y-x} \equiv 1 [5]$

و تضرب طرفي المتوافقة في العدد n^x نجد : $n^y \equiv n^x [5]$ (⊗)

أقترح طريقتين في الجواب :

الطريقة الأولى : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; (x - y) = 4k$ ⇔ $x \equiv y [4]$

$$\Rightarrow (\exists k' = 2k \in \mathbb{Z}) ; (x - y) = 2k'$$

⇒ عدد زوجي $(x - y)$

⇒ x و y زوجيان أو x و y فرديان

نقوم بدمج هاتين الحالتين مع حالتين زوجية العدد n لنحصل على أربع حالات و كلها تُعبر عن زوجية التعبير $(n^x - n^y)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{عدد زوجي} = \text{عدد زوجي} - \text{عدد زوجي} \\ \text{عدد فردي} = \text{عدد زوجي} - \text{عدد فردي} \\ \text{عدد زوجي} = \text{عدد زوجي} - \text{عدد فردي} \\ \text{عدد زوجي} = \text{عدد فردي} - \text{عدد فردي} \end{array} \right.$$

نستنتج من هذه الحالات الأربع أن العدد $(n^x - n^y)$ عدد زوجي دائما و ذلك كانت زوجية الأعداد x و y و n .

و منه : $(\exists u \in \mathbb{Z}) ; n^x - n^y = 2u$ (⊙)

من النتيجتين ⊗ و ⊙ نستنتج أن : $\begin{cases} 2/(n^x - n^y) \\ 5/(n^x - n^y) \end{cases}$

إذن الجداء 2×5 قاسم للعدد $(n^x - n^y)$. و ذلك لأن $5 \wedge 2 = 1$ و بالتالي : $n^x \equiv n^y [10]$

الطريقة الثانية :

x و y عددان صحيحان طبيعيين غير منعدمين .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

إذن n عدد فردي أو n عدد زوجي .

يعني : $n \equiv 1 [2]$ أو $n \equiv 0 [2]$.

يعني : $\begin{cases} n^x \equiv 1 [2] \\ n^y \equiv 1 [2] \end{cases}$ أو $\begin{cases} n^x \equiv 0 [2] \\ n^y \equiv 0 [2] \end{cases}$.

يعني : $(n^x - n^y) \equiv 0 [2]$ أو $(n^x - n^y) \equiv 0 [2]$.

و بالتالي 2 يقسم العدد $(n^x - n^y)$.

و لقد علمنا من قبل أن العدد 5 يقسم العدد $(n^x - n^y)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - 1x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{e^{-x}}{n} - x \right) : \text{ولدينا}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x}}{n} \right) = \frac{0}{n} = 0$$

إذن نحن أمام الوضعية التالية:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - 1x) = 0 \end{cases}$$

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 1x + 0$ مقارب مائل للمنحنى (C_n) بجوار $+\infty$.

تحديد الوضع النسبي للمستقيم (D) والمنحنى (C_n) .
لدينا: $f_n(x) = \left(x + \frac{e^{-x}}{n} \right)$ و $y = x$ (D)

ولدينا: $f_n(x) - y = \left(x + \frac{e^{-x}}{n} \right) - x = \frac{e^{-x}}{n} > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$
إذن (C_n) يوجد فوق المستقيم (D) على \mathbb{R} بأكمله.

التمرين الرابع

ليكن x عنصرا من \mathbb{R} . $f'_n(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{n} = \frac{n - e^{-x}}{n}$

إذا كان: $f'_n(x) = 0$ فإن: $x = -\ln n$

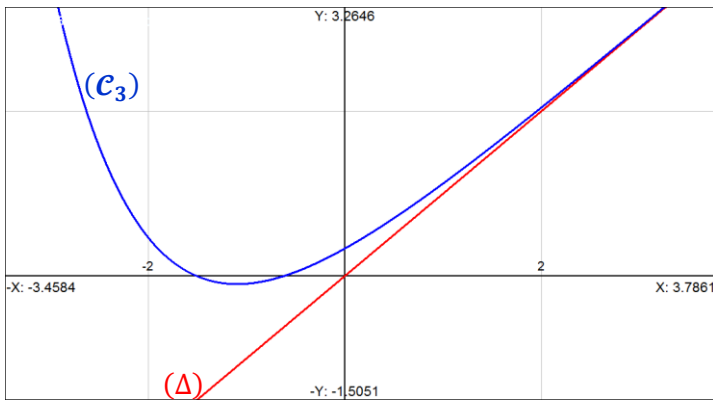
إذا كان: $f'_n(x) > 0$ فإن: $x > -\ln n$

إذا كان: $f'_n(x) < 0$ فإن: $x < -\ln n$

ولدينا: $f_n(-\ln n) = -\ln n + \frac{1}{n} e^{\ln n} = \ln\left(\frac{e}{n}\right)$

x	$-\infty$	$-\ln n$	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	0	+
f_n	$+\infty$	$\ln\left(\frac{e}{n}\right)$	$+\infty$

التمرين الرابع



ولدينا كذلك: $2 \wedge 5 = 1$.

نستنتج إذن أن: 2×5 يقسم $(n^x - n^y)$

أي: $10 / (n^x - n^y)$ ومنه: $n^x \equiv n^y [10]$

ملاحظة: لقد استعملنا الخاصية التالية:

$$\begin{cases} a/b \\ c/b \end{cases} \Rightarrow ac/b$$

$$a \wedge c = 1$$

التمرين الثالث

4

ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E).

إذن: $x = 15k - 1$ et $y = 11k - 1$; $(\exists k \in \mathbb{Z})$

نلاحظ أن: $(15k - 1) \equiv (11k - 1) [4]$

وذلك لأن: $(15k - 1) - (11k - 1) = 4k = 0 [4]$

إذن: $x \equiv y [4]$

ومنه حسب نتيجة السؤال (3) ب): $n^x \equiv n^y [10]$

هذا يعني أن: n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري.

أو بتعبير أوضح نضع: $n^x = \overline{\alpha\beta}_{(10)}$ و $n^y = \overline{m\delta}_{(10)}$

رقم وحدات n^x هو الرقم β و رقم وحدات العدد n^y هو الرقم s .

$$n^x \equiv n^y [10] \Rightarrow \overline{\alpha\beta}_{(10)} \equiv \overline{m\delta}_{(10)} [10]$$

$$\Rightarrow (10\alpha + \beta) \equiv (10m + s) [10]$$

$$\Rightarrow \beta \equiv s [10]$$

$$\Rightarrow \beta = s ; \text{car } s > 10 \text{ et } \beta < 10$$

التمرين الرابع

1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{e^{-x}}{n} \right) = (+\infty) + \frac{1}{n} e^{-\infty}$$

$$= (+\infty) + \frac{1}{n} (0) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{e^{-x}}{n} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \left(x e^x + \frac{1}{n} \right)$$

$$= (+\infty) \left(0^+ + \frac{1}{n} \right) = +\infty$$

التمرين الرابع

2

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$ إذن يجب علينا حساب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \left(x + \frac{e^{-x}}{n} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x e^x} \right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{0^-} \right) = -\infty$$

إذن من النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$ نستنتج أن

المنحنى (C_n) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأرتيب بجوار $-\infty$.

التمرين الرابع

2

لنحسب النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(x + \frac{e^{-x}}{n} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x e^x} \right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{+\infty} \right) = 1$$

من النتيجة (2) و (3) نستنتج أن : $f_n(0) - f_n\left(\frac{-e}{n}\right) < 0$

و من النتيجة (1) و (4) نستنتج حسب مبرهنة القيم الوسطية أن :

$$\exists! y_n \in \left] \frac{-e}{n}; 0 \right[; f_n(y_n) = 0$$

المرحلة الثانية :

لدينا f_n دالة متصلة قطعاً على $]-\infty; -\ln n]$.
 إذن f_n تقابل من $]-\infty; -\ln n]$ نحو صورته $f_n(]-\infty; -\ln n])$

و لدينا $f_n(]-\infty; -\ln n]) = \left[\ln\left(\frac{e}{n}\right); +\infty \right[$

إذن f_n تقابل من المجال $]-\infty; -\ln n]$ نحو المجال $\left[\ln\left(\frac{e}{n}\right); +\infty \right[$

$$n \geq 3 \Rightarrow \ln n \geq \ln 3 \approx 1,09 > 1$$

$$\Rightarrow \ln n > 1$$

$$\Rightarrow 1 - \ln n < 0$$

$$\Rightarrow \ln e - \ln n < 0$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{e}{n}\right) < 0$$

$$\Rightarrow 0 \in \left] \ln\left(\frac{e}{n}\right); +\infty \right[$$

إذن 0 يمتلك سابقاً واحداً x_n من المجال $]-\infty; -\ln n]$ بالتقابل f_n .

أو بتعبير آخر : $\exists! x_n \in]-\infty; -\ln n] ; f_n(x_n) = 0$

أي : $\exists! x_n \leq -\ln n ; f_n(x_n) = 0$

التمرين الرابع

5

$$x_n \leq -\ln n \Rightarrow x_n \leq \ln\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow x_n \leq \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = -\infty$$

$$\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0 \Rightarrow \frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = 0$$

التمرين الرابع

6

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1 - x \ln x) = -1 - 0^+ \ln(0^+) = -1 - 0^+(-\infty) = \text{Forme indéterminée}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1 - x \ln x) = -1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = -1 - 0 = -1 = g(0)$$

إذن g دالة متصلة على يمين الصفر .

التمرين الرابع

6

$$f_n(x_n) = 0 \Rightarrow x_n + \frac{e^{-x_n}}{n} = 0 \Rightarrow x_n = \frac{-e^{-x_n}}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x_n} = n e^{-x_n} (*)$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = g(n e^{-x_n}) = -1 - \frac{1}{n e^{x_n}} \ln(n e^{x_n}) = -1 - \frac{-1}{x_n} \ln(n e^{x_n})$$

التمرين الرابع

5

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$\varphi(x) = \ln x - \frac{e}{x}$$

φ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ لأنها عبارة عن فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$. و لدينا : $\varphi'(x) = \frac{x+e}{x^2} > 0$

إذن φ دالة تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{e}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \frac{e}{x} \right) = -\infty$$

$$\varphi(3) \approx 0,2 > 0$$

نحصل إذن على جدول تغيرات الدالة φ كما يلي :

x	0	3	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	+
φ	$-\infty$	0,2	$+\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن : $\varphi(x) > 0 ; (\forall x \geq 3)$

إذن : $\varphi(n) > 0 ; (\forall n \geq 3)$

يعني : $\ln n > \frac{e}{n} ; (\forall n \geq 3)$

التمرين الرابع

5

المرحلة الأولى :

لدينا f_n دالة تزايدية قطعاً على المجال $[-\ln n; +\infty[$ من أجل $n \geq 3$ وجدنا أن $\ln n > \frac{e}{n}$. إذن : $-\ln n < \frac{-e}{n}$

و منه : $\left[\frac{-e}{n}; +\infty \right[\subset]-\ln n; +\infty[$

أي أن f_n دالة تزايدية قطعاً على $\left[\frac{-e}{n}; +\infty \right[$

و بالأخص f_n دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $\left[\frac{-e}{n}; 0 \right]$.

لأن : $\left[\frac{-e}{n}; 0 \right] \subset \left[\frac{-e}{n}; +\infty \right[$

و بالتالي f_n تقابل من المجال $\left[\frac{-e}{n}; 0 \right]$ نحو المجال $\left[\frac{-e}{n}; 0 \right]$.

من جهة ثانية لدينا : $f_n(0) = \frac{1}{n} > 0$. (2)

$$f_n\left(\frac{-e}{n}\right) = \frac{-e}{n} + \frac{1}{n} e^{\frac{e}{n}}$$

و لدينا كذلك

$$n \geq 3 \Rightarrow \frac{e}{n} \leq \frac{e}{3} < 1 \Rightarrow \frac{e}{n} < 1$$

$$\Rightarrow e^{\frac{e}{n}} < e$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\frac{e}{n}}}{n} < \frac{e}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\frac{e}{n}}}{n} - \frac{e}{n} < 0$$

$$\Rightarrow f_n\left(\frac{-e}{n}\right) < 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x+1} \leq F(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2x+1} \right)_{x \rightarrow 0^+} \leq F(x) \leq \left(\frac{1}{x} \right)_{x \rightarrow 0^+}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 1 = F(0)$$

$$\Rightarrow F \text{ est continue à droite en } 0$$

التمرين الخامس

3

$$\int_0^x \left(\frac{2t}{2t+1} \right) dt = \int_0^x \underbrace{(2t)}_{u'(t)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2t+1} \right)}_{v(t)} dt$$

$$= [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t) dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2t+1} \right]_0^x - \int_0^x \frac{-2t^2}{(2t+1)^2} dt$$

$$= \frac{x^2}{2x+1} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{2t+1} \right)^2 dt$$

التمرين الخامس

4

في البداية نلاحظ أن الدالة $h : x \rightarrow \frac{x}{1+2x}$ متصلة على $\mathbb{R} / \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.
 إذن فهي متصلة على كل مجال $]0; x[$ حيث $0 \leq x \leq 1$.
 إذن h تقبل دالة أصلية نرمز لها بالرمز H و تحقق :

$$\begin{cases} H'(x) = h(x) \\ H(x) = \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right) dt \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right) dt = \frac{2}{x^2} H(x)$$

$$\Rightarrow F'(x) = \left(\left(\frac{2}{x^2} \right) H(x) \right)'$$

$$= \left(\frac{2}{x^2} \right)' H(x) + \left(\frac{2}{x^2} \right) H'(x)$$

$$= \frac{-4x}{x^4} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right) dt + \frac{2}{x^2} \left(\frac{x}{1+2x} \right)$$

$$= \frac{-2}{x^3} \int_0^x \left(\frac{2t}{1+2t} \right) dt + \frac{2}{x(1+2x)}$$

$$= \frac{-2}{x^3} \left(\frac{x^2}{2x+1} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt \right) + \frac{2}{x(1+2x)}$$

$$= \frac{-2}{x(1+2x)} - \frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt + \frac{2}{x(1+2x)}$$

$$= -\frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$$

$$= -1 + \frac{1}{x_n} (\ln n + x_n)$$

$$= -1 + \frac{\ln n}{x_n} + 1$$

$$= \frac{\ln n}{x_n} \quad \boxed{g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}} : \text{ وبالتالي}$$

التمرين الرابع

6

$$g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{x_n} \right)$$

$$\Rightarrow g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{x_n} \right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{x_n} \right)$$

$$\Rightarrow g(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{x_n} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{-1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{x_n} \right)}$$

التمرين الخامس

1

$$0 \leq t \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2t+1 \leq 2x+1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 2t+1 \leq 2x+1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2t+1} \leq 1$$

التمرين الخامس

2

ليكن x عنصرا من المجال $]0, 1[$.

$$\frac{2}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right) dt = \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(\frac{2t}{1+2t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(\frac{2t+1-1}{1+2t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(\frac{2t+1}{1+2t} - \frac{1}{1+2t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{x^2} \int_0^x 1 dt - \frac{1}{2x^2} \int_0^x \left(\frac{2}{2t+1} \right) dt$$

$$= \left(\frac{1}{x^2} \right) [t]_0^x - \left(\frac{1}{2x^2} \right) [\ln|2t+1|]_0^x$$

$$= \left(\frac{1}{x^2} \right) x - \left(\frac{1}{2x^2} \right) (\ln(2x+1) - \ln 1)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{\ln(2x+1)}{2x^2} = F(x)$$

التمرين الخامس

2

$$\frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2t+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{t}{2x+1} \leq \frac{t}{2t+1} \leq t ; t \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t}{2x+1} \right) dt \leq \frac{2}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t}{2t+1} \right) dt \leq \frac{2}{x^2} \int_0^x t dt$$

car toutes ces fonctions sont continues

sur $]0, +\infty[$ et $0 < x$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^2(2x+1)} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x \leq F(x) \leq \frac{2}{x^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{2x^2(2x+1)} \leq F(x) \leq \frac{2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2t+1} \leq 1 &\Rightarrow \left(\frac{t}{2x+1}\right) \leq \left(\frac{t}{2t+1}\right) \leq t ; t \geq 0 \\ &\Rightarrow \left(\frac{t}{2x+1}\right)^2 \leq \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 \leq t^2 ; \begin{cases} t \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{t}{2x+1}\right)^2 dt \leq \int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 dt \leq \int_0^x t^2 dt \\ &\Rightarrow \frac{-4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{2x+1}\right)^2 dt \geq F'(x) \geq \frac{-4}{x^3} \int_0^x t^2 dt \\ &\Rightarrow \frac{-4}{x^3(2x+1)^2} \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x \geq F'(x) \geq \frac{-4}{x^3} \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x \\ &\Rightarrow \frac{-4}{3(2x+1)^2} \geq F'(x) \geq \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

$$F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right) dt = \frac{2}{x^2} H(x) : \text{لدينا}$$

نلاحظ أن F دالة متصلة على المجال $[0, x]$ و قابلة للاشتقاق على المجال $]0, x[$ لأنها عبارة عن جداء دالتين متصلتين و قابلتين للاشتقاق على $]0, +\infty[$. إذن : حسب مبرهنة التزايديات المنتهية :

$$\exists c \in]0, x[; \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(c)$$

$$\forall x \in]0, 1[; \frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2} : \text{بما أن}$$

$$\frac{-4}{3} \leq F'(c) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2} : \text{فإن}$$

وذلك لأن $0 < c < x < 1$

$$\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2} : \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-4}{3(1+2x)^2}\right) = \frac{-4}{3} : \text{لدينا}$$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

$x \rightarrow 0^+ \qquad \qquad \qquad x \rightarrow 0^+$

$\frac{-4}{3} \qquad \qquad \qquad \frac{-4}{3}$

إذن حسب خاصيات الترتيب و النهايات نستنتج أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0}\right) = \frac{-4}{3}$$

و بالتالي F قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر . و العدد المشتق على

$$\text{يمين الصفر هو } F'_d(0) = \frac{-4}{3} .$$

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2012

التمرين الأول

1 I

$$\begin{aligned} x, y \in [1; +\infty[&\Rightarrow x \geq 1 \text{ et } y \geq 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{x} \geq 1 \text{ et } \sqrt{y} \geq 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 \geq 1 \\ &\Rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1)^2 \geq 1 \\ &\Rightarrow (x \perp y) \in [1; +\infty[\end{aligned}$$

إذن \perp قانون تركيب داخلي في المجموعة I .

التمرين الأول

2 I

ليكن x و y عنصرين من المجموعة $I = [1; +\infty[$.

$$x \perp y = (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1)^2 = (\sqrt{y} + \sqrt{x} - 1)^2 = y \perp x$$

إذن: $\forall x, y \in [1; +\infty[; x \perp y = y \perp x$

و بالتالي \perp قانون تبادلي في المجموعة I .

ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من المجال $I = [1; +\infty[$

$$\begin{aligned} (x \perp y) \perp z &= (\sqrt{x \perp y} + \sqrt{z} - 1)^2 \\ &= (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 + \sqrt{z} - 1)^2 \\ &= (\sqrt{x} + (\sqrt{y} + \sqrt{z} - 1) - 1)^2 \\ &= (\sqrt{x} + \sqrt{y \perp z} - 1)^2 \\ &= x \perp (y \perp z) \end{aligned}$$

إذن \perp قانون تجميعي في $I = [1; +\infty[$.

التمرين الأول

3 I

ليكن ε العنصر المحايد للقانون \perp في المجموعة $I = [1; +\infty[$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\forall x \in I) ; x \perp \varepsilon &= \varepsilon \perp x = x \\ \Rightarrow (\forall x \in I) ; (\sqrt{x} + \sqrt{\varepsilon} - 1)^2 &= x \\ \Rightarrow (\forall x \in I) ; \sqrt{x} + \sqrt{\varepsilon} - 1 &= \pm \sqrt{x} \end{aligned}$$

في حالة $\sqrt{x} + \sqrt{\varepsilon} - 1 = -\sqrt{x}$ لدينا: $\varepsilon = (1 - 2\sqrt{x})^2$

لكن: $(1 - 2\sqrt{x})^2 \leq 1$; $(x \geq 1)$ إذن: $(1 - 2\sqrt{x})^2 \notin I$

و في حالة $\sqrt{x} + \sqrt{\varepsilon} - 1 = \sqrt{x}$ لدينا: $\varepsilon = 1 \in [1; +\infty[$.

و نعلم أن العنصر المحايد إن وجد يكون دائما وحيدا.

إذن 1 هو العنصر المحايد للقانون في المجموعة I .

التمرين الأول

1 II

لتكن $M(a)$ و $M(b)$ مصفوفتين من E .

$$\begin{aligned} M(a) \times M(b) &= \begin{pmatrix} a & 2(a-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & 2(b-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab & 2(ab-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(ab) \in E \end{aligned}$$

إذن E جزء مستقر من المجموعة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

التمرين الأول

2 II

ليكن x و y عنصرين من \mathbb{R}^* .

$$\varphi(x \times y) = M(xy) = M(x) \times M(y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

إذن φ تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) .

ليكن $M(y)$ عنصرا من (E, \times) .

ونحل في \mathbb{R}^* المعادلة $(x) = M(y)$ ذات المجهول x التالية:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = M(y) &\Leftrightarrow M(x) = M(y) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 2(y-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

و بالتالي المعادلة $\varphi(x) = M(y)$ تقبل حلا وحيدا في \mathbb{R}^* و هو y .
أو بتعبير آخر: $\varphi(x) = M(y) : (\exists! x = y \in \mathbb{R}^*) : (\forall M(y) \in E)$
إذن φ تقابل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) .
خلاصة: φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) .

التمرين الأول

2 II

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق و يحولها إلى مجموعة الوصول.
لدينا φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) .
نستنتج إذن البنية الجبرية لـ (E, \times) انطلاقا من البنية الجبرية لـ (\mathbb{R}^*, \times) و ذلك عبر التشاكل التقابلي φ .
لدينا (\mathbb{R}^*, \times) زمرة تبادلية عنصرا المحايد هو العدد الحقيقي 1.
و كل عنصر x يقبل $\frac{1}{x}$ كممثل.

إذن: (E, \times) زمرة تبادلية كذلك عنصرا المحايد هو المصفوفة $\varphi(1)$ و كل مصفوفة $M(x)$ تقبل ماثلة و هي المصفوفة $M(\frac{1}{x})$.

$$\begin{cases} \varphi(1) = M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\ \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 2\left(\frac{1}{x} - 1\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

التمرين الأول

2 II

$$\begin{aligned} H_n \in H &\Rightarrow H_n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow H_n = \begin{pmatrix} 2^n & 2(2^n - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow H_n = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; x = 2^n \end{aligned}$$

و لدينا: $\left(\frac{1}{0} \quad \frac{0}{1}\right) \in H$ إذن H جزء غير فارغ من E .

لتكن $\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 2^m & 2^{m+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفتين من H

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^m & 2^{m+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ = \begin{pmatrix} 2^{n-m} & 2^{n-m+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \end{aligned}$$

إذن (H, \times) زمرة جزئية من (E, \times) .

التمرين الثاني

1 I

$$\left(1 + \frac{2}{3}i\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} + \frac{4i}{3} = \frac{5}{9} + \frac{4}{3}i = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3} + 4i\right)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2}{3}i\right)^2 - 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)\left(1 + \frac{2}{3}i\right) + \left(\frac{5}{3} + 4i\right) \\ = \left(1 + \frac{2}{3}i\right)^2 - 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)^2 + 3\left(1 + \frac{2}{3}i\right)^2 \\ = 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)^2 - 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

إذن العدد العقدي $\left(1 + \frac{2}{3}i\right)$ حل للمعادلة (E) .

نستعمل نتيجة السؤال (II) 1 (أ) :

$$\begin{aligned} (p-a) &= \omega + a e^{\frac{i\pi}{3}} - \omega e^{\frac{i\pi}{3}} - a \\ &= \omega \left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right) + a \left(e^{\frac{i\pi}{3}} - 1\right) \\ &= \left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right) (\omega - a) \end{aligned}$$

$$(3) \quad (p-a) = \left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right) (\omega - a) \quad \text{إذن:}$$

$$\begin{aligned} (q-b) &= \omega + b e^{-\frac{i\pi}{3}} - \omega e^{-\frac{i\pi}{3}} - b \\ &= \omega \left(1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right) + b \left(e^{-\frac{i\pi}{3}} - 1\right) \\ &= \left(1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right) (\omega - b) \end{aligned}$$

$$(4) \quad (q-b) = \left(1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right) (\omega - b) \quad \text{إذن:}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{p-a}{q-b}\right) &= \left(\frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}}\right) \left(\frac{\omega - a}{\omega - b}\right) = \left(\frac{\omega - a}{\omega - b}\right) e^{\frac{4i\pi}{3}} \\ \text{ولدينا: } & \left(\frac{p-a}{q-b}\right) = \left(\frac{\omega - a}{\omega - b}\right) e^{\frac{4i\pi}{3}} \end{aligned}$$

ننتقل من العلاقة $\left(\frac{\omega - a}{\omega - b}\right) = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ ونستعمل العلاقة (5)

$$\left(\frac{p-a}{q-b}\right) = \left(\frac{\omega - a}{\omega - b}\right) e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \times e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{2i\pi} = 1$$

إذن: $(p-a) = (q-b)$ يعنى: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BQ}$

ومن هنا نستنتج حسب التعريف المتجهي لمتوازي الأضلاع أن $APBQ$ متوازي الأضلاع.

في هذا السؤال نستعمل النتيجة (3) والعلاقة $\frac{\omega - a}{\omega - b} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

هذه العلاقة تصيح: $(\omega - b) = e^{-\frac{2i\pi}{3}} (\omega - a)$

$$\begin{aligned} (b-a) &= (\omega - a) - (\omega - b) \\ &= (\omega - a) - e^{-\frac{2i\pi}{3}} (\omega - a) \\ &= (\omega - a) \left(1 - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right) \\ \Rightarrow \frac{b-a}{p-a} &= \frac{(\omega - a) \left(1 - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)}{\left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right) (\omega - a)} = \frac{1 - e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} &= \frac{1 + \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{3 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{(3 + i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})}{(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{4} (3 + i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3}) = i\sqrt{3} \end{aligned}$$

تذكير: إذا كان z_1 و z_2 هما حلا المعادلة $az^2 + bz + c = 0$

فإن $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ و $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$

نستعمل العلاقة: $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ نحصل على:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = \left(\frac{5}{3} + 4i\right) &\Rightarrow z_2 = \frac{\left(\frac{5}{3} + 4i\right)}{\left(1 + \frac{2}{3}i\right)} \\ &\Rightarrow z_2 = \frac{\left(\frac{5}{3} + 4i\right) \left(1 - \frac{2}{3}i\right)}{\left(1 + \frac{2}{3}i\right) \left(1 - \frac{2}{3}i\right)} \\ &\Rightarrow z_2 = \frac{9}{13} \left(\frac{13}{3} + \frac{26}{9}i\right) \\ &\Rightarrow z_2 = 3 + 2i \\ &\Rightarrow z_2 = 3 \left(1 + \frac{2}{3}i\right) \\ &\Rightarrow z_2 = 3 z_1 \end{aligned}$$

لدينا: $P = r(A)$ إذن حسب الكتابة العقدية للدوران r نجد:

$$\begin{aligned} (z_p - z_\Omega) &= e^{\frac{i\pi}{3}} (z_A - z_\Omega) \\ \Leftrightarrow (p - \omega) &= e^{\frac{i\pi}{3}} (a - \omega) \\ \Leftrightarrow p &= e^{\frac{i\pi}{3}} (a - \omega) + \omega \quad (1) \end{aligned}$$

و بنفس الطريقة: لدينا: $B = r(Q)$

$$\begin{aligned} B = r(Q) &\Leftrightarrow (z_B - z_\Omega) = e^{\frac{i\pi}{3}} (z_Q - z_\Omega) \\ \Leftrightarrow (b - \omega) &= e^{\frac{i\pi}{3}} (q - \omega) \\ \Leftrightarrow q e^{\frac{i\pi}{3}} &= (b - \omega) + \omega e^{\frac{i\pi}{3}} \\ \Leftrightarrow q &= e^{-\frac{i\pi}{3}} (b - \omega) + \omega \quad (2) \end{aligned}$$

في البداية لدينا الأشياء التالية:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right) &= -\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}} &= \frac{e^{\frac{4i\pi}{3}} \left(e^{-\frac{4i\pi}{3}} - e^{-i\pi}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)} \\ &= \frac{e^{\frac{4i\pi}{3}} \left(\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right) + 1\right)}{\left(1 - \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)} \\ &= \frac{e^{\frac{4i\pi}{3}} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1\right)}{\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)} = e^{\frac{4i\pi}{3}} \end{aligned}$$

التمرين الثالث

3 ب

$$\begin{cases} 1 \equiv 1 [4] \\ 7 \equiv -1 [4] \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$\begin{cases} 7^2 \equiv 1 [4] \\ 7^3 \equiv -1 [4] \end{cases} \text{ و لدينا}$$

$$\begin{cases} 7^4 \equiv 1 [4] \\ 7^5 \equiv -1 [4] \end{cases} \text{ و لدينا}$$

$$\begin{cases} 7^{2006} \equiv 1 [4] \\ 7^{2007} \equiv -1 [4] \end{cases} \text{ ولدينا}$$

نجمع جميع هذه المتوافقات طرفا بطرف نحصل على :

$$1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2006} + 7^{2007} \equiv 0 [4]$$

يعني : $N \equiv 0 [4]$

ولدينا حسب نتيجة السؤال (ب) : $7^{2008} \equiv 1 [503]$

إذن : $503 / (7^{2008} - 1)$

و نعلم أن $(7^{2008} - 1) = 6N$ إذن $503/6N$.

نعلم أن 503 أولي و 3×2 هو التفكير الأولي لـ 6 إذن : $6 \wedge 503 = 1$

و منه حسب Gauss نستنتج أن : $503/N$

و بالتالي : $N \equiv 0 [503]$

التمرين الثالث

3 ج

لدينا 503 عدد أولي . و لدينا 2^2 هو التفكير الأولي للعدد 4 .

إذن : $503 \wedge 4 = 1$

و نعلم أن : $4/N$ و $503/N$.

إذن : $4 \times 503/N$. يعني : $2012/N$.

التمرين الرابع

1 I

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$

نلاحظ أنه إذا كان $x = 0$ فإن $g'(x) = 0$.

و إذا كان $x \geq 0$ فإن $g'(x) \geq 0$.

إذن دالة g دالة تزايدية على المجال $[0; +\infty[$.

التمرين الرابع

2 I

لدينا : $x \in [0; +\infty[\Rightarrow x \geq 0$

$$\Rightarrow g(x) \geq g(0) = 0$$

$$\Rightarrow g(x) \geq 0$$

إذن : $\forall x \in [0; +\infty[; g(x) \geq 0$

التمرين الأول

1 II

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (\ln(1 + e^{-x})) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}} \right) \\ &= \lim_{\substack{u \rightarrow 0^+ \\ u = e^{-x}}} \left(\frac{\ln(1 + u) - \ln(1 + 0)}{u - 0} \right) \\ &= (\ln(1 + u))'_{u=0} = \frac{1}{1+0} = 1 \end{aligned}$$

و بالتالي : $\frac{(b-a)}{p-a} = i\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \arg(i\sqrt{3}) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow (\overline{AP}, \overline{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

\Rightarrow زاوية قائمة $P\hat{A}B$

و بما أن $APQB$ متوازي أضلاع و إحدى زواياه قائمة . إذن $APQB$ مستطيل .

التمرين الثالث

1 أ

لدينا الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من 503 هي 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 19 و لا أحد من هذه الأعداد يقسم العدد 503 . إذن 503 عدد أولي .

التمرين الثالث

1 ب

بما أن 7 و 503 عددان أوليان .

فإنه حسب Fermat : $7^{503-1} \equiv 1 [503]$

يعني : $7^{502} \equiv 1 [503]$

يعني : $(7^{502})^4 \equiv 1^4 [503]$

يعني : $7^{2008} \equiv 1 [503]$

التمرين الثالث

2

لدينا $(1; 8)$ حل خاص للمعادلة (E) .

و ليكن (x, y) الحل العام للمعادلة (E) . إذن : $49 \times 1 - 6 \times 8 = 1$
 $49x - 6y = 1$

نجز عملية الطرح بين هاتين المعادلتين طرفا بطرف نجد :

$$(*) \quad 49(x-1) = 6(y-8)$$

من هذه المتساوية نستنتج أن 49 يقسم الجداء $6(y-8)$.

إذن 49 يقسم $(y-8)$ لأن $7^2 \wedge 6 = 1$ و ذلك حسب Gauss .

يعني : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; y = 49k + 8$

نعوض y بـ $(49k + 8)$ في (*) نجد $49(x-1) = 6(49k)$

يعني : $x = 6k + 1$

نستنتج إذن أن الزوج $(6k + 1; 49k + 8)$ حل للمعادلة (E) .

عكسيا لدينا : $49(6k + 1) - 6(49k + 8) = 1$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) تُكتب على شكل :

$$S = \{ (6k + 1; 49k + 8) ; k \in \mathbb{Z} \}$$

التمرين الثالث

3 أ

نعلم أنه إذا كانت $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها q العدد الحقيقي

$$\text{المخالف لـ } 1 \text{ فإن : } 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

لدينا $(7^n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 7 .

$$\text{إذن : } 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007} = \frac{7^{2007+1} - 1}{7 - 1}$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{7^{2008} - 1}{6}$$

$$\Leftrightarrow 7^{2008} - 6N = 1$$

$$\Leftrightarrow 7^2 \cdot 7^{2006} - 6N = 1$$

$$\Leftrightarrow 49 \cdot 7^{2006} - 6N = 1$$

$$\Leftrightarrow (7^{2006}, N) \text{ حل للمعادلة (E)}$$

التمرين الرابع

5 II

$$\begin{aligned} x \in]-1, 0[&\Rightarrow -1 < x < 0 \\ &\Rightarrow e^x < 1 \text{ et } e^{-x} < e \\ &\Rightarrow 0 < e^x g(e^{-x}) < g(e) \\ &\Rightarrow 0 < f'(x) < g(e) \end{aligned}$$

التمرين الرابع

6 II

$$\begin{aligned} h(x) = f(x) + x &\Rightarrow h'(x) = f'(x) + 1 > 1 > 0 \\ &\Rightarrow h \text{ تزايدية قطعاً على } \mathbb{R} \end{aligned}$$

إذن h تقابل من أي مجال $[x, y]$ يوجد ضمن \mathbb{R} نحو صورته بالدالة h نختار المجال $[-1; 0]$.

إذن h تقابل من $[-1; 0]$ نحو $f([-1; 0])$.

$$h([-1; 0]) = [h(-1); h(0)] \approx \left[-\frac{1}{2}; \ln 2\right]$$

$$\text{و بما أن: } 0 \in \left[-\frac{1}{2}; \ln 2\right]$$

فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً بالتقابل h في المجال $[-1; 0]$.

و بتعبير آخر: $h(\alpha) = 0$; $\exists! \alpha \in [-1; 0]$

و بما أن: $h(-1) \neq h(0) \neq 0$

فإن: $\exists! \alpha \in]-1; 0[$; $h(\alpha) = 0$

أي: $\exists! \alpha \in]-1; 0[$; $f(\alpha) + \alpha = 0$

التمرين الرابع

7 II

نعتبر العبارة (P_n) التالية: $-1 \leq u_n \leq 0$

من أجل $n = 0$ لدينا: $-1 \leq u_0 = 0 \leq 0$

إذن العبارة (P_0) صحيحة.

ليكن m عنصراً من \mathbb{N} ونفترض أن (P_m) صحيحة.

يعني: $-1 \leq u_m \leq 0$

لدينا: $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) \geq 0$

إذن: $f(u_m) \geq 0$ (1)

و لدينا حسب الافتراض: $u_m \leq 0$

إذن $f(u_m) \leq \ln 2$ لأن f تزايدية على \mathbb{R} .

ومن هنا: $f(u_m) \leq 1$ لأن: $\ln 2 \approx 0,6 < 1$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن: $0 \leq f(u_m) \leq 1$

ومن هنا: $-1 \leq -f(u_m) \leq 0$

يعني: $-1 \leq u_{m+1} \leq 0$

و هذا يعني أن العبارة (P_{m+1}) صحيحة.

و بذلك نحصل على الوضعية التالية: $(P_0) \text{ est vraie}$

$(P_m) \Rightarrow (P_{m+1}); (\forall m \in \mathbb{N})$

إذن حسب مبدأ التراجع: $(P_n) \text{ est toujours vraie}$

يعني: $(\forall n \in \mathbb{N}); -1 \leq u_n \leq 0$

التمرين الرابع

7 II

لدينا f دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} بأكمله. نستطيع إذن تطبيق

مبرهنة التزايديات المنتهية على أي مجال يوجد ضمن \mathbb{R} . نختار المجال

الذي طرفاه u_n و α والذي سوف نرمز له بالرمز $[\alpha, u_n]$

لأنه لا ندرى من الأكبر هل u_n أو α .

$$\Rightarrow \exists c \in]\alpha, u_n[; \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \exists c \in]\alpha, u_n[; \left| \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} \right| = |f'(c)|$$

$$\Rightarrow \exists c \in]\alpha, u_n[; |f(u_n) - f(\alpha)| = |f'(c)| \cdot |u_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow \exists c \in]\alpha, u_n[; |-u_{n+1} + \alpha| = |f'(c)| \cdot |u_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow \exists c \in]\alpha, u_n[; |u_{n+1} - \alpha| = |f'(c)| \cdot |u_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow \exists c \in]\alpha, u_n[; |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$$

$$\text{car: } 0 \leq f'(x) \leq g(e)$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (\ln(1 + e^{-x})) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (\ln(e^x + 1) - \ln(e^x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{e^x \ln(e^x + 1)}_{0^+} - \underbrace{x e^x}_{0^+} = 0 \end{aligned}$$

التمرين الرابع

2 II

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \ln(1 + e^{-x}) + e^x \left(\frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right) \\ &= e^x \left(\ln(1 + e^{-x}) - \left(\frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right) \right) \\ &= e^x g(e^{-x}) \end{aligned}$$

التمرين الرابع

3 II

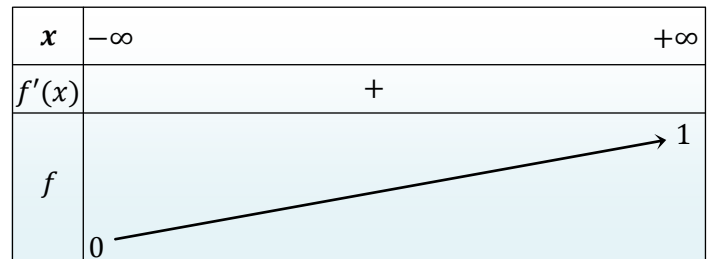
نعلم أن: $(\forall x \in \mathbb{R}^+); e^x > 0 \text{ et } e^{-x} > 0$

$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}); e^x > 0 \text{ et } g(e^{-x}) > 0$

$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}); e^x g(e^{-x}) > 0$

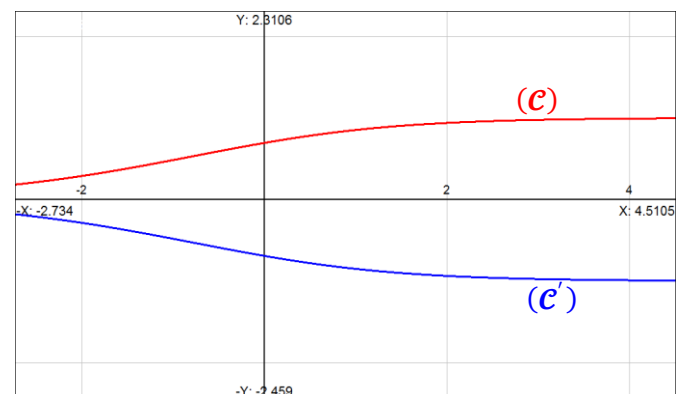
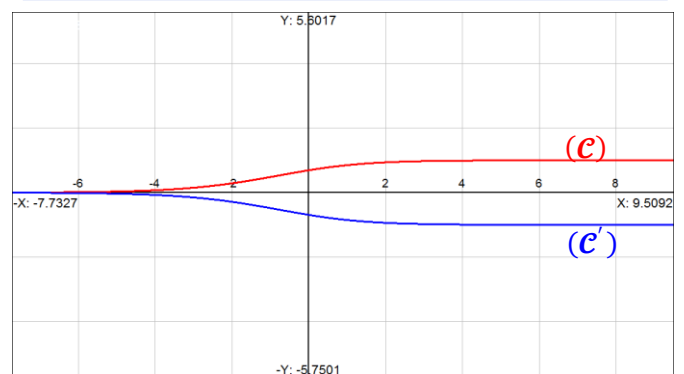
$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) > 0$

$\Rightarrow f$ تزايدية قطعاً على \mathbb{R}



التمرين الرابع

4 II



إذن : $F(x) = \psi(x) - \psi\left(\frac{1}{x}\right)$

نلاحظ أن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\psi(x) - \psi\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = \psi'(x) - \left(\frac{1}{x}\right)' \psi'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \left(\frac{\ln x}{1+x^2} \right) - \left(\frac{-1}{x^2} \right) \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \right) \\ &= \left(\frac{\ln x}{1+x^2} \right) - \left(\frac{\ln x}{1+x^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

بما أن : $\forall x \in]0, +\infty[; F'(x) = 0$
فإن : $(\exists ! c \in \mathbb{R}) ; F(x) = c$
لدينا : $c = F(1) = 0$
إذن : $(\forall x > 0) ; F(x) = 0$

التمرين الخامس

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\frac{1}{x}}^x \left(\frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt \\ \Rightarrow F(x) &= \int_{\frac{1}{x}}^x \left(\frac{1}{1+t^2} \right) \frac{(\ln t)}{u(t)} dt \\ \Rightarrow F(x) &= [v(t)u(t)]_{\frac{1}{x}}^x - \int_{\frac{1}{x}}^x v(t)u'(t) dt \\ \Rightarrow F(x) &= [\text{Arctan}(t) (\ln t)]_{\frac{1}{x}}^x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \\ \Rightarrow F(x) &= \text{Arctan}(x) \cdot \ln x - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \\ &\quad - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \\ \Rightarrow F(x) &= \left(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \cdot \ln x - \\ &\quad - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \end{aligned}$$

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على المجال \mathbb{R}^* بما يلي :

$$\varphi(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}(x)$$

لدينا φ قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]0, +\infty[$ و $]-\infty, 0[$ لأنها تضم دوال اعتيادية كلها معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و $]-\infty, 0[$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \left(\frac{1}{x}\right)' \left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \right) + \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \\ &= \frac{-1}{x^2} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) + \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \\ &= \left(\frac{-1}{1+x^2} \right) + \left(\frac{1}{1+x^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

إذن φ دالة ثابتة على كل من المجالين $]0, +\infty[$ و $]-\infty, 0[$.
أو بتعبير آخر :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[; \varphi(x) = c_1 \in \mathbb{R} \\ \forall x \in]0, +\infty[; \varphi(x) = c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

نعوض x بالقيمتين 1 و -1 و ذلك من أجل إيجاد c_1 و c_2 .

التمرين الرابع

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $|u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$
من أجل $n = 0$ لدينا : $|u_0 - \alpha| < 1 \text{ car } \alpha \in]-1; 0[$
إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن $m \in \mathbb{N}$ و نفترض أن $|u_m - \alpha| \leq (g(e))^m$.

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في $g(e)$ نحصل على :

$$g(e) |u_m - \alpha| \leq (g(e))^{m+1}$$

$$|u_{m+1} - \alpha| \leq g(e) |u_m - \alpha| \leq (g(e))^{m+1}$$

$$\text{أي : } |u_{m+1} - \alpha| \leq (g(e))^{m+1}$$

يعني أن العبارة (P_{m+1}) صحيحة .

نحصل إذن على الوضعية التالية : $(P_0) \text{ est vraie}$
 $(P_m) \Rightarrow (P_{m+1}) ; (\forall m \in \mathbb{N})$

إذن حسب مبدأ التراجع : $(P_n) \text{ est toujours vraie}$

$$\text{يعني : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$$

التمرين الرابع

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$

نلاحظ أن $(g(e))^n$ متتالية هندسية أساسها $g(e)$ و هو عدد موجب

و أصغر من 1 لأن $0,6 < 1 < g(e)$. إذن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (g(e))^n = 0$

و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - \alpha| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (g(e))^n = 0$$

$$-\frac{(g(e))^n}{n} \leq (u_n - \alpha) \leq \frac{(g(e))^n}{n}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim(u_n - \alpha) = 0$
أي : $\lim(u_n) = \alpha$

التمرين الخامس

$$F(1) = \int_1^1 \left(\frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt = 0$$

التمرين الخامس

لدينا الدالة $t \rightarrow \frac{\ln t}{1+t^2}$ متصلة على المجال $]0; +\infty[$.

إذن فهي تقبل دالة أصلية ψ على المجال $]0; +\infty[$.

$$\begin{cases} \psi'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} \\ \psi(x) = \int_0^x \left(\frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \left(\frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt$$

$$= \int_{\frac{1}{x}}^0 \left(\frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt + \int_0^x \left(\frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{x}} \left(\frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt - \int_0^x \left(\frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt$$

$$= \psi\left(\frac{1}{x}\right) - \psi(x)$$

$$\begin{cases} c_1 = \varphi(-1) = 2 \operatorname{Arctan}(-1) = 2 \left(\frac{-\pi}{4} \right) = \frac{-\pi}{2} \\ c_2 = \varphi(1) = 2 \operatorname{Arctan}(1) = 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} ; \forall x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} ; \forall x < 0 \end{cases} \quad \text{و بالتالي}$$

ما يهمنا من هذه النتيجة هو : $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$; $(\forall x > 0)$

$$\Rightarrow (\forall x > 0) ; \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow (\forall x > 0) ; \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x) \quad (**)$$

التمرين الخامس

4

نستغل النتيجتين (*) و (**). للإجابة على هذا السؤال .

لدينا : $(\forall x > 0) ; F(x) = 0$

$$\Rightarrow \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{Arctan}(x) \right) \ln x -$$

$$- \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t} dt = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} \right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t} dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t} dt = \left(\frac{\pi}{2} \right) \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t} dt = \ln x$$

أجوبة امتحان الدورة العادية 2013

التمرين الأول

1 أ

المجموعة \mathbb{Z} مزودة بالقانون * المعرف بما يلي :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; x * y = x + y - 2$$

لدينا * قانون تركيب داخلي لأنه إذا كان x و y عنصرين من \mathbb{Z}

$$\text{فإن } (x + y - 2) \in \mathbb{Z}$$

لنبرهن على أن * تبادلي :

من أجل ذلك يكفي أن نلاحظ أن القانون + تبادلي في الحلقة

الواحدية التبادلية $(\mathbb{Z}, +, \times)$

$$\text{إذن } \forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; x * y = x + y - 2 = y + x - 2 = y * x$$

إذن * تبادلي في \mathbb{Z} .

لنبرهن على أن القانون * تجميعي في \mathbb{Z} .

لتكن x و y و z ثلاثة عناصر من \mathbb{Z}

$$\text{لدينا : } (x * y) * z = (x * y) + z - 2 = x + y - 2 + z - 2$$

$$= x + (y + z - 2) - 2$$

$$= x + (y * z) - 2$$

$$= x * (y * z)$$

$$\text{إذن : } \forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^2 ; (x * y) * z = x * (y * z)$$

ومن هنا فإن القانون * تجميعي في المجموعة \mathbb{Z} .

1 ب

ليكن ε العنصر المحايد للقانون * في المجموعة \mathbb{Z} .

$$\text{إذن : } (\forall x \in \mathbb{Z}) ; x * \varepsilon = \varepsilon * x = x$$

لتحديد قيمة ε ننطلق من التعبير : $x * \varepsilon = x$

$$\text{إذن : } x + \varepsilon - 2 = x \text{ ومنه : } \varepsilon = 2 \in \mathbb{Z}$$

إذن 2 هو العنصر المحايد للقانون * في \mathbb{Z} .

1 ج

لكي تكون $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة تبادلية يكفي أن نبرهن على أن كل عنصر من \mathbb{Z}

يقبل ماثلا من \mathbb{Z} بالقانون * .

ليكن x عنصرا من \mathbb{Z} و x' ماثله بالنسبة للقانون * .

$$\text{إذن : } x * x' = x' * x = 2$$

ننطلق من المتساوية التالية : $x * x' = 2$

$$\text{إذن : } x + x' - 2 = 2 \text{ يعني : } x' = 4 - x$$

بما أن $x \in \mathbb{Z}$ و $4 \in \mathbb{Z}$ فإن $(4 - x) \in \mathbb{Z}$

وبالتالي : كل عنصر x من \mathbb{Z} يقبل ماثلا في \mathbb{Z} و هو $(4 - x)$.

خلاصة : لقد حصلنا على المعلومات التالية :

* داخلي و تبادلي و تجميعي في \mathbb{Z} .

* يقبل عنصرا محايدا و هو 2 .

* كل عنصر x من \mathbb{Z} يمتلك ماثلا و هو $(4 - x)$.

إذن : $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة تبادلية .

2 أ

نعتبر التطبيق f المعرف بما يلي :

$$f : (\mathbb{Z}, \times) \mapsto (\mathbb{Z}, +) \text{ --- } x \mapsto f(x) = x + 2$$

لكي يكون f تشاكلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; f(x \times y) = f(x) + f(y)$$

ليكن x و y عنصرين من المجموعة \mathbb{Z} .

$$\text{لدينا : } f(x) + f(y) = (x + 2) + (y + 2)$$

$$= (x + 2)(y + 2) - 2(x + 2) - 2(y + 2) + 6$$

$$= xy - 2 = f(x \times y)$$

إذن f تشاكل من (\mathbb{Z}, \times) نحو $(\mathbb{Z}, +)$.

لكي يكون f تقابلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$$(\forall y \in \mathbb{Z}), (\exists! x \in \mathbb{Z}) ; f(x) = y$$

يعني : المعادلة $f(x) = y$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا في \mathbb{Z} .

$$\text{ليكن } y \text{ عنصرا من المجموعة } \mathbb{Z} \text{ . لدينا : } x + 2 = y \Leftrightarrow f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow x = y - 2 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن : } (\forall y \in \mathbb{Z}), (\exists! x = y - 2 \in \mathbb{Z}) ; f(x) = y$$

و هذا يعني أن التطبيق f تقابل من \mathbb{Z} نحو \mathbb{Z} .

خلاصة : f تشاكل تقابلي من (\mathbb{Z}, \times) نحو $(\mathbb{Z}, +)$.

2 ب

لتكن x و y و z ثلاثة أعداد نسبية ، لدينا من جهة أولى :

$$(x * y) \uparrow z = (x * y)z - 2(x * y) - 2z + 6$$

$$= (x + y - 2)z - 2(x + y - 2) - 2z + 6$$

$$= xz + yz - 4z - 2x - 2y - 2z + 10$$

و من جهة ثانية لدينا : $(x \uparrow z) * (y \uparrow z) = (x \uparrow z) + (y \uparrow z) - 2$

$$= (xz - 2x - 2z + 6) + (yz - 2y - 2z + 6) - 2$$

$$= xz + yz - 4z - 2x - 2y - 2z + 10$$

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 ; (x * y) \uparrow z = (x \uparrow z) * (y \uparrow z)$$

أي : القانون \uparrow توزيعي على * في \mathbb{Z} .

3

لنبين أن : $(\mathbb{Z}, *, \uparrow)$ حلقة تبادلية و واحدة

• \uparrow يقبل عنصرا محايدا في \mathbb{Z}

• زمرة تبادلية $(\mathbb{Z}, *)$
• قانون تجميعي
• توزيعي على *

• \uparrow تبادلي في \mathbb{Z}

حصلنا من خلال الأجوبة السابقة على المعلومات التاليين :

$$(2) \text{ القانون } \uparrow \text{ توزيعي على القانون } * \text{ و } (1) \text{ زمرة تبادلية } (\mathbb{Z}, *)$$

لدينا f تشاكل تقابلي من (\mathbb{Z}, \times) نحو $(\mathbb{Z}, +)$

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة (\mathbb{Z}, \uparrow) انطلاقا من البنية الجبرية

للمجموعة (\mathbb{Z}, \times) و ذلك عن طريق التطبيق f .

لأنه و كما نعلم : التشاكل التقابلي يُحوّل البنية الجبرية لمجموعة الأنطلاق

إلى مجموعة الوصول.

بما أن الضرب \times تبادلي و تجميعي في (\mathbb{Z}, \times) و يقبل 1 كعنصر محايد.

$$\text{فإن : } (3) \text{ القانون } \uparrow \text{ تبادلي في } \mathbb{Z} \text{ و } (4) \text{ قانون تجميعي في } \mathbb{Z}$$

$$\text{و } (5) \text{ عنصر محايد للقانون } \uparrow \text{ في } \mathbb{Z} \text{ } f(1) = 3$$

إذن من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) و (5) نستنتج أن $(\mathbb{Z}, *, \uparrow)$

حلقة تبادلية و واحدة وحدتها العدد النسبي 3 .

4 أ

ليكن x و y عنصرين من المجموعة \mathbb{Z} . لدينا :

$$x \uparrow y = 2 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 2$$

$$\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y - 2) - 2(y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 2)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 2) = 0 \text{ أو } (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \text{ أو } x = 2$$

1 II

أقترح طريقتين في الجواب .

الطريقة الأولى:

$$\frac{\text{aff}(A) - \text{aff}(O)}{\text{aff}(B) - \text{aff}(O)} = \frac{a - 0}{ae^{\frac{i\pi}{3}} - 0} = e^{-\frac{i\pi}{3}} \text{ لدينا :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} OA = OB \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right. \text{ يعني : } \left\{ \begin{array}{l} \frac{OA}{OB} = 1 \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right. \text{ إذن :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\text{aff}(A) - \text{aff}(O)}{\text{aff}(B) - \text{aff}(O)} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{\text{aff}(A) - \text{aff}(O)}{\text{aff}(B) - \text{aff}(O)} \right) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right. \text{ إذن :}$$

و هذا يعني أن المثلث OAB متساوي الساقين رأسه O و قياس إحدى زواياه و هي الزاوية \widehat{O} يساوى 60° .
إذن : OAB مثلث متساوي الأضلاع .

الطريقة الثانية:

$$OA = |\text{aff}(A) - \text{aff}(O)| = |a - 0| = |a| \text{ لدينا :}$$

$$OB = |\text{aff}(B) - \text{aff}(O)| = |ae^{\frac{i\pi}{3}} - 0| = |a| \text{ لدينا :}$$

$$AB = |\text{aff}(B) - \text{aff}(A)| = |b - a| \text{ وكذلك :}$$

$$\begin{aligned} &= \left| ae^{\frac{i\pi}{3}} - a \right| = \left| a \left(e^{\frac{i\pi}{3}} - 1 \right) \right| = |a| \cdot \left| e^{\frac{i\pi}{3}} - 1 \right| \\ &= |a| \cdot \left| \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right| = |a| \cdot \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = |a| \end{aligned}$$

نستنتج إذن أن : $OA = OB = AB$ و $A \neq B \neq C$ إذن OAB مثلث متساوي الأضلاع .

2 II

$$\text{لدينا } r \text{ دوران مُعرّف بما يلي : } (P) \xrightarrow{r_M \left(\frac{\pi}{3} \right)} (P)$$

ننتقل من الكتابة : $A_1 = r^{-1}(A)$ إذن $r(A_1) = A$ و منه حسب التعريف العكسي للدوران r نكتب :

$$(\text{aff}(A) - \text{aff}(M)) = e^{\frac{i\pi}{3}} (\text{aff}(A_1) - \text{aff}(M))$$

$$(a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}} (a_1 - z) \text{ يعني :}$$

$$(a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}} a_1 - e^{\frac{i\pi}{3}} z \text{ يعني :}$$

$$e^{\frac{i\pi}{3}} a_1 = a - z + e^{\frac{i\pi}{3}} z \text{ يعني :}$$

$$a_1 = e^{-\frac{i\pi}{3}} \left(a - z + e^{\frac{i\pi}{3}} z \right) \text{ يعني :}$$

$$a_1 = e^{-\frac{i\pi}{3}} a - e^{-\frac{i\pi}{3}} z + z \text{ يعني :}$$

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i\pi}{3}} &= \cos \left(\frac{-\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{3} \right) \text{ من جهة أخرى لدينا :} \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

4 ب

تكون الحلقة $(\mathbb{Z}, *, \Gamma)$ كاملة إذا كانت لا تحتوي على قواسم للصفر .
ليكن x قاسما للصفر في $(\mathbb{Z}, *, \Gamma)$.

إذن : $\exists y \in \mathbb{Z} \setminus \{2\} ; x \Gamma y = y \Gamma x = 2$ و منه حسب نتيجة السؤال (4) أ : $x = 2$ أو $y = 2$ إذن لا وجود لأي قاسم للصفر لأن قواسم الصفر إن وجدت يجب أن تخالف العنصر المحايد 2 وبالتالي $(\mathbb{Z}, *, \Gamma)$ حلقة كاملة .

4 ج

تكون الحلقة الواحدية $(\mathbb{Z}, *, \Gamma)$ جسما إذا كان كل عنصر من $\mathbb{Z} \setminus \{2\}$ يقبل ممتالا (أو مقلوبا) في (\mathbb{Z}, Γ) .
و لذلك نحدد أولا الصيغة العامة لممتال عنصر x من \mathbb{Z} بالقانون Γ .
ليكن y ممتال x بالنسبة للقانون Γ . إذن :

$$\begin{aligned} x \Gamma y = 3 &\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 3 \\ &\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow y(x - 2) = (2x - 3) \\ &\Leftrightarrow y = \left(\frac{2x - 3}{x - 2} \right) \end{aligned}$$

و نلاحظ أن الكمية $\left(\frac{2x - 3}{x - 2} \right)$ ليست دائما عنصرا من \mathbb{Z} .

العنصر $1 \in \mathbb{Z}$ مثلا هو ممتال 1 بالنسبة لـ Γ
و العنصر $3 \in \mathbb{Z}$ مثلا هو ممتال 3 بالنسبة لـ Γ
لكن العنصر $\frac{11}{5} \notin \mathbb{Z}$ هو ممتال 7 بالنسبة للقانون Γ .
إذن توجد عناصر من \mathbb{Z} لا تقبل ممتالا في \mathbb{Z} بالنسبة لـ Γ .
وبالتالي فالحلقة $(\mathbb{Z}, *, \Gamma)$ ليست جسما .

التمرين الثاني

1 I

$$\begin{aligned} \Delta &= a^2(3 + i\sqrt{3})^2 - 8a^2(1 + i\sqrt{3}) \text{ لدينا من جهة أولى :} \\ &= a^2(6 + 6i\sqrt{3}) - 8a^2(1 + i\sqrt{3}) \\ &= 6a^2(1 + i\sqrt{3}) - 8a^2(1 + i\sqrt{3}) \\ &= -2a^2(1 + i\sqrt{3}) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2(-1 + i\sqrt{3})^2 &= a^2(1 - 3 - 2i\sqrt{3}) \text{ و من جهة ثانية لدينا :} \\ &= a^2(-2 - 2i\sqrt{3}) \\ &= -2a^2(1 + i\sqrt{3}) \quad (2) \end{aligned}$$

نستنتج إذن من (1) و (2) أن $\Delta = a^2(-1 + i\sqrt{3})^2$

2 I

$$\Delta = a^2(-1 + i\sqrt{3})^2 \text{ لدينا :}$$

إذن : المعادلة (E) تقبل حلين عكبيين z_1 و z_2 معرفين بما يلي :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(3 + i\sqrt{3})a - (-1 + i\sqrt{3})a}{4} \\ &= \frac{3a + i\sqrt{3}a + a - i\sqrt{3}a}{4} = \frac{4a}{4} = a \\ z_2 &= \frac{(3 + i\sqrt{3})a + (-1 + i\sqrt{3})a}{4} \\ &= \frac{3a + i\sqrt{3}a - a + i\sqrt{3}a}{4} = \frac{2a + 2i\sqrt{3}a}{4} = \frac{a(1 + i\sqrt{3})}{2} \end{aligned}$$

و بنفس الطريقة لدينا : $OB_1 = |aff(B_1) - aff(O)| = |b_1|$

و لدينا كذلك : $A_1M = |aff(M) - aff(A_1)| = |z - a_1|$

$$\begin{aligned} &= \left| z - \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a - \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| \\ &= \left| \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(1 - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| \\ &= \left| \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| = |b_1| \end{aligned}$$

إذن : $OB_1 = A_1M$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن كل ضلعين متقابلين في الرباعي OA_1MB_1 متقايسان . إذن : OA_1MB_1 متوازي أضلاع

أقترح طريقتين في الجواب .

الطريقة الأولى :

لدينا : $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ إذن : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$

و منه : $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = -1$ يعني : $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\pi} = -1$

و منه : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$ يعني : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \times \left(\frac{b}{a}\right) = -1$

و منه : $e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\left(\frac{a}{b}\right)$ إذن : $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$

نوظف بعد ذلك هذه المتساوية فيما سيأتي :

لدينا : $\begin{cases} r(A_1) = A \\ r(B) = B_1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} (a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(a_1 - z) \\ (b_1 - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(b - z) \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} (z - a_1) = e^{-\frac{i\pi}{3}}(z - a) \\ (z - b_1) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - b) \end{cases}$

أي : $\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = \left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{-\frac{i\pi}{3}}}\right) \left(\frac{z - b}{z - a}\right)$

يعني : $\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}} \left(\frac{z - b}{z - a}\right)$

يعني : $\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = \frac{-a}{b} \left(\frac{z - b}{z - a}\right)$

بإمكاننا أن نجيب دون استعمال المعطيين $r(A_1) = A$ و $r(B) = B_1$

و هذا ما سوف أعرضه الآن كطريقة أخرى للجواب .

الطريقة الثانية :

لدينا : $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ إذن : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ و $\frac{a}{b} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$

و من هاتين الكتابتين نستنتج ما يلي :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = e^{-\frac{i\pi}{3}} + e^{\frac{i\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1$$

إذن : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$

إذن : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a - \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z + z$

$$= \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(1 - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

و بنفس الطريقة نطلق من الكتابة $r(B) = B_1$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران r نكتب :

$$(aff(B_1) - aff(M)) = e^{\frac{i\pi}{3}}(aff(B) - aff(M))$$

يعني : $(b_1 - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(ae^{\frac{i\pi}{3}} - z)$

يعني : $b_1 = ae^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}z + z$

و لدينا : $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و نضيف كذلك : $e^{\frac{i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن بالرجوع إلى آخر تعبير لـ b_1 نكتب :

$$b_1 = ae^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}z + z = ae^{\frac{2i\pi}{3}} + \left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)z$$

$$= \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a + \left(1 - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$$

$$= \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a + \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$$

بصفة عامة ، لكي نبرهن على أن رباعيا ما متوازي أضلاع ، توجد عدة طرق من بينها : القطران لهما نفس المنتصف و صيغة التوازي و الصيغة المتجهية و صيغة التقايس . لكن أرى أن أسهل طريقة في هذا السؤال هي أن نبرهن أن كل ضلعين متقابلين متقايسان . لأن المسافة في المستوى العقدي ما هي إلا معيار لعدد عقدي .



لنبرهن أن : $OA_1 = B_1M$ و $OB_1 = A_1M$

لدينا : $OA_1 = |aff(A_1) - aff(O)| = |a_1|$

و لدينا : $B_1M = |aff(M) - aff(B_1)| = |z - b_1|$

$$= \left| z - \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a - \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right|$$

$$= \left| \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(1 - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right|$$

$$= \left| \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| = |a_1|$$

إذن : $OA_1 = B_1M$ (1)

3 II ب

لنبين أن التكافؤ التالي صحيح .

$$A \text{ و } B \text{ و } O \text{ و } M \text{ نقط متداورة} \Leftrightarrow A_1 \text{ و } B_1 \text{ و } M \text{ نقط مستقيمية}$$

$$A_1 \text{ و } B_1 \text{ و } M \text{ نقط مستقيمية} \Leftrightarrow \frac{z - b_1}{z - a_1} \in \mathbb{R} \text{ لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-a}{b} \left(\frac{z - b}{z - a} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \left(\frac{z - b}{z - a} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{0 - a}{0 - b} \right) \times \left(\frac{z - b}{z - a} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ و } B \text{ و } O \text{ و } M \text{ نقط متداورة}$$

التمرين الثالث

1 أ

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1 بحيث : $3^n - 2^n = 0 [n]$

إذن : n يقسم $(3^n - 2^n)$

ومنه : $3^n - 2^n = mn$; $(\exists m \in \mathbb{N}) \rightarrow (1)$

ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

إذن : $n = ps$; $(\exists s \in \mathbb{N}) \rightarrow (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن : $3^n - 2^n = m_s p$; $\epsilon \mathbb{N}$

إذن : p يقسم $(3^n - 2^n)$ يعني : $3^n - 2^n \equiv 0 [p] \rightarrow (3)$

لكي نبرهن على أن $p \geq 5$ يكفي أن نُفَدَّ العبارتين $p = 2$ و $p = 3$

نفترض أن $p = 2$

لدينا حسب النتيجة (3) : $3^n - 2^n \equiv 0 [2]$

إذن حسب الافتراض : $3^n - 2^n \equiv 0 [2] \rightarrow (4)$

و نعلم أنه كيفما كان $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $2^n \equiv 0 [2] \rightarrow (5)$

نجمع المتوافقتين (4) و (5) طرفا بطرف : $3^n - 2^n + 2^n \equiv 0 [2]$

يعني : $3^n \equiv 0 [2]$ و منه : 2 يقسم 3^n أي : 2 يقسم $3 \times 3^{n-1}$

بما أن : $2 \wedge 3 = 1$ فإن $2 \wedge 3^{n-1} = 1$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \rightarrow (7)$

من (6) و (7) نستنتج إذن حسب (Gauss) أن : 2 يقسم 3

و هذا **تناقض** واضح . إذن : $p \neq 2$

نفترض أن $p = 3$

لدينا حسب النتيجة (3) : $3^n - 2^n \equiv 0 [3]$

إذن حسب الافتراض نكتب : $3^n - 2^n \equiv 0 [3] \rightarrow (8)$

و نعلم أن : $-3^n \equiv 0 [3] ; (\forall n \in \mathbb{N}) \rightarrow (9)$

نجمع المتوافقتين (8) و (9) طرفا بطرف : $3^n - 2^n - 3^n \equiv 0 [3]$

يعني : $-2^n \equiv 0 [3] ; 2^n \equiv 0 [3]$ أي :

يعني : 3 يقسم 2^n و منه : 3 يقسم $2 \times 2^{n-1} \rightarrow (10)$

بما أن : $2 \wedge 3 = 1$ فإن $2 \wedge 3^{n-1} = 1$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \rightarrow (11)$

من (10) و (11) نستنتج حسب Gauss أن : 3 يقسم 2

و هذا **تناقض** واضح . إذن : $p \neq 3$

خلاصة السؤال أ) :

إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1

و يحقق $3^n - 2^n \equiv 0 [n]$ و كان p أصغر قواسمه الأولية الموجبة

فإن : $3^n - 2^n \equiv 0 [p]$ و $p \geq 5$

$$\text{و لدينا كذلك : } \frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}} \text{ إذن : } \left(\frac{b}{a} \right)^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}} \right)^3 = e^{i\pi} = -1$$

$$\text{إذن : } \left(\frac{b}{a} \right)^3 = -1$$

$$\text{و من هذه النتيجة نكتب : } \left(\frac{b}{a} \right)^2 \times \left(\frac{b}{a} \right) = -1$$

$$\text{يعني : } \left(\frac{b}{a} \right)^2 = -\left(\frac{a}{b} \right)$$

نحن الآن مُسَلَّحون بمتساويتين ثمينتين :

$$(1) \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1 \quad \text{و} \quad (2) \quad \left(\frac{b}{a} \right)^2 = -\left(\frac{a}{b} \right)$$

ننطلق إذن من نتيجتي السؤال (2) أ) و نوظف المتساوية (1) :

$$\begin{cases} a_1 = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \\ b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = e^{-\frac{i\pi}{3}} a + e^{\frac{i\pi}{3}} z \\ b_1 = -e^{-\frac{i\pi}{3}} a + e^{-\frac{i\pi}{3}} z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \left(\frac{a}{b} \right) a + \left(\frac{b}{a} \right) z \\ b_1 = -\left(\frac{a}{b} \right) a + \left(\frac{a}{b} \right) z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{a^2}{b} + \frac{bz}{a} \\ b_1 = \frac{-a^2}{b} + \frac{az}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = z - \frac{a^2}{b} - \frac{bz}{a} \\ z - b_1 = z + \frac{a^2}{b} - \frac{az}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = \frac{-a^2}{b} + \left(1 - \frac{b}{a} \right) z \\ z - b_1 = \frac{a^2}{b} + \left(1 - \frac{a}{b} \right) z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = \frac{-a^2}{b} + \left(\frac{a}{b} \right) z \\ z - b_1 = \frac{a^2}{b} + \left(\frac{b}{a} \right) z \end{cases}$$

فيما يلي سوف نوظف المتساوية الثمينة (2) :

$$\Leftrightarrow \frac{z - b_1}{z - a_1} = \frac{\frac{a^2}{b} + \frac{bz}{a}}{\frac{-a^2}{b} + \frac{az}{b}} = \frac{\left(\frac{a}{b} \right) \left(a + \left(\frac{b}{a} \right)^2 z \right)}{\left(\frac{a}{b} \right) (z - a)} = \frac{a - \frac{a}{b} z}{z - a}$$

$$= \frac{\left(\frac{-a}{b} \right) (-b + z)}{(z - a)} = \frac{-a}{b} \left(\frac{z - b}{z - a} \right)$$

$$\text{و بالتالي : } \left(\frac{z - b_1}{z - a_1} \right) = \frac{-a}{b} \left(\frac{z - b}{z - a} \right)$$

الطريقة الثانية :

لنبين بالخلف على أن : $n \wedge (p-1) = 1$

نضع : $n \wedge (p-1) = d$

لنبين أن $d = 1$. و من أجل ذلك نفترض أن $d \neq 1$.
و ن فصل بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان d عددا أوليا .

إذن $d > p$ و $d < p-1$.

لأن p هو أصغر قواسم n و كذلك d يقسم $p-1$.

من جهة أخرى لدينا $p-1 < p$ لأن p أولي موجب .

إذن $d < p-1 < p$ و $d > p$.

يعني $d < p$ و $d > p$. و هذا تناقض واضح .

إذن d يستحيل أن يكون أوليا .

الحالة الثانية : إذا كان d غير أولي .

يوجد إذن عدد أولي موجب m يقسم d ، إذن فهو يقسم n و $(p-1)$ و ذلك لأن علاقة يقسم متعدية .

بما أن m يقسم n فإنه بالضرورة (1) $m \geq p$

لأن p هو أصغر القواسم الأولية للعدد n .

و بما أن m يقسم $(p-1)$ فإن $|m| \leq |p-1|$.

و بما أن $p \geq 5$ و m أولي موجب فإن (2) $m \leq (p-1)$

و نعلم أن $(p-1) < p$ (3) لأن p موجب .

إذن من (2) و (3) نستنتج أن : (4) $m < p$

و التناقض نستنتجه من خلال (1) و (4) ، أي : $m > m$

و بالتالي : $n \wedge (p-1) = 1$.

و منه حسب Bezout يوجد زوج (a, u) من \mathbb{Z}^2 بحيث :

$$\rightarrow an + u(p-1) = 1$$

نضع $b = -u$ فنحصل على : $an - b(p-1) = 1$

ملاحظة (1) : من هذه النتيجة الأخيرة يُمكن أن نستخرج باستعمال مبرهنة Bezout العكسية ما يلي :

$$(*) \rightarrow \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge (p-1) = 1 \\ n \wedge b = 1 \\ n \wedge (p-1) = 1 \end{cases}$$

خلاصة السؤال (ج) : إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1

و يحقق $3^n - 2^n \equiv 0 \pmod{n}$ و كان p أصغر قواسمه الأولية الموجبة

فإنه يوجد عدنان نسبيان a و b بحيث : $an - b(p-1) = 1$

1 د

ليكن r و q على التوالي باقي و خارج القسمة الأقليدية لـ a على $(p-1)$.

$$\begin{cases} (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \\ a = q(p-1) + r \\ 0 \leq r < p-1 \end{cases} \quad \text{يعني :}$$

ملاحظة (2) : قبل أن نجيب على السؤال (د) لاحظ أنه بإمكاننا

أن نبين أن $r > 0$ و سوف نحتاج هذه النتيجة فيما سيأتي .

لدينا : $r \geq 0$ إذن $r = 0$ أو $r > 0$.

نفترض أن $r = 0$ إذن : $a = q(p-1)$

يعني : $(p-1)$ يقسم a و منه : $(p-1) \wedge a = (p-1)$

إذن حسب النتيجة (*) : $(p-1) = 1$

يعني : $p = 2$. و هذا تناقض لأن $p \geq 5$

إذن : $0 < r < (p-1)$

نعود إذن ، بعد هذه الجولة المرححة مع r ، إلى السؤال (د) .

و أقترح عليكم طريقتين في الإجابة :

1 ب

نعلم أن p عدد أولي و يخالف العدد الأولي 2 إذن : $p \wedge 2 = 1$

و منه حسب Fermat : $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

و بنفس الطريقة p عدد أولي يُخالف العدد الأولي 3 إذن : $p \wedge 3 = 1$

و منه حسب Fermat : $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

1 ج

يكفي أن نبرهن على أن : $n \wedge (p-1) = 1$ ثم نستعمل Bezout .

الطريقة الأولى :

للإجابة على هذا السؤال سوف نحتاج إلى خاصية مهمة في صيغتين :

إذا كان : $a \wedge b = 1$

فإن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; a^n \wedge b = 1$

الصيغة الأولى :

$$\begin{cases} a_1 \wedge b = 1 \\ a_2 \wedge b = 1 \\ \vdots \\ a_n \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \wedge b = 1 \quad \text{الصيغة الثانية} :$$

ليكن p أصغر قاسم أولي للعدد n .

إذن تفكيك العدد n إلى جداء عوامل أولية سيكون على الشكل التالي :

$$n = p^{r_1} \times p_2^{r_2} \times \dots \times p_j^{r_j}$$

بحيث : $\forall j \geq 2 ; p_j > p$

و كذلك : $\{r_i / 1 \leq i \leq j\} \subset \mathbb{N}$

في البداية نلاحظ أن : $p - (p-1) = 1$.

يعني : $1(p) + (-1)(p-1) = 1$.

إذن حسب Bezout نستنتج أن : $p \wedge (p-1) = 1$

و منه حسب الخاصية المذكورة : $p^{r_1} \wedge (p-1) = 1$ (1)

و لدينا : $p_2 > p > p-1$ إذن : $p_2 \wedge (p-1) = 1$.

لأن p_2 عدد أولي و يستحيل أن يقسم عددا أصغر منه $(p-1)$.

و منه حسب الخاصية المذكورة : $p_2^{r_2} \wedge (p-1) = 1$ (2)

و بنفس الطريقة نبين أن :

$$\begin{cases} (3) & (p_3)^{r_3} \wedge (p-1) = 1 \\ (4) & (p_4)^{r_4} \wedge (p-1) = 1 \\ & \vdots \\ (j) & (p_j)^{r_j} \wedge (p-1) = 1 \end{cases}$$

نطبق الصيغة الثانية للخاصية المذكورة على هذه المتساويات نجد :

$$(p^{r_1} \times p_2^{r_2} \times \dots \times p_j^{r_j}) \wedge (p-1) = 1$$

يعني : $n \wedge (p-1) = 1$

و منه حسب Bezout يوجد زوج (a, u) من \mathbb{Z}^2 بحيث :

$$\rightarrow an + u(p-1) = 1$$

نضع $b = -u$ فنحصل على : $an - b(p-1) = 1$

الطريقة الأولى:

ننطلق من التعبير التالي: $a = q(p-1) + r$
نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد n نحصل على:

$$an = qn(p-1) + rn$$

يعني: $rn = an - qn(p-1)$ (13) →

ولدينا حسب النتيجة (12): $an = 1 + b(p-1)$

نعوّض an بالتعبير $1 + b(p-1)$ في العلاقة (13) نجد:

$$rn = 1 + b(p-1) - qn(p-1)$$

أي: $rn = 1 + (b - qn)(p-1)$

نضع: $k = (b - qn)$ إذن: $rn = 1 + k(p-1)$

ولإتمام الجواب يكفي أن نبرهن أن $k \in \mathbb{N}^*$

لدينا: $(b, q, n) \in \mathbb{Z}^3$ إذن: $k \in \mathbb{Z}$

و نَفْصَل هنا بين ثلاث حالات وهي: $k = 0$ أو $k < 0$ أو $k > 0$

نفترض أن: $k = 0$ إذن: $b = qn$

نعوّض إذن b بالقيمة qn في النتيجة (12): $an - qn(p-1) = 1$

ومن هنا حسب النتيجة (13): $rn = 1$

أي: n يقسم 1 يعني: $n = 1$

و هذا تناقض لأن: $n > 1$ إذن: $k \neq 0$ (*) →

نفترض أن: $k < 0$ إذن: $b < qn$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد السالب قطعاً $(p-1)$ نجد:
 $-b(p-1) > -qn(p-1)$

نضيف إلى كلا الطرفين الكمية an نجد:

$$an - b(p-1) > an - qn(p-1)$$

إذن باستعمال النتيجة (12) و (13) نجد: $1 > rn$ (14) →

ولدينا: $r > 0$ و $n > 1$ إذن: $rn > r$ (15) →

من (14) و (15) نستنتج أن: $1 > rn > r$ يعني: $1 > r$

العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الأصغر من 1 هو الصفر.

إذن: $r = 0$ و هذا تناقض لأن $r \neq 0$ حسب الملاحظة (2).

إذن: $k > 0$ يعني: $k \in \mathbb{N}^*$

الطريقة الثانية:

لدينا: $an - b(p-1) = 1$ (1)

ولدينا كذلك: $a = (p-1)q + r$

نضرب الطرفين في العدد الغير المنعدم n فنحصل على:

$$(2) \quad an = (p-1)qn + rn$$

ننجز عملية الفرق بين (2) و (1) فنحصل على ما يلي:

$$(2) - (1) \Rightarrow b(p-1) = (p-1)qn + rn - 1$$

$$\Rightarrow b(p-1) - (p-1)qn = rn - 1$$

$$\Rightarrow (b - qn)(p-1) = rn - 1$$

$$\Rightarrow (rn - 1) = k(p-1); \text{ avec } k = b - qn$$

لنبين الآن أن: $k = (b - qn) \in \mathbb{N}^*$

أولاً، لدينا حسب الملاحظة (2): $r > 0$. إذن: $r \geq 1$

لدينا $n > 1$ و $r \geq 1$ إذن $rn > 1$

يعني $n(a - q(p-1)) > 1$ أي $an - qn(p-1) > 1$

أي $an - 1 > qn(p-1)$ أي $b(p-1) > qn(p-1)$

نختزل بالعدد الغير المنعدم $(p-1)$ نجد $b > qn$

يعني $b - qn > 0$ إذن $k = (b - qn) > 0$

و بالتالي: $k \in \mathbb{N}^*$

خلاصة السؤال (د): رأينا في هذا السؤال أنه إذا كان r و q على التوالي باقي و خارج القسمة الأقليدية للعدد a على العدد $(p-1)$ فإنه يوجد عدد

صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث: $rn = 1 + k(p-1)$

أو بتعبير جميل: $rn = 1 + k(p-1)$; $(\exists k \in \mathbb{N}^*)$ (16) →

2

باستعمال البرهان بالخلف، نفترض وجود عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعاً من 1 و يحقق: $3^n - 2^n \equiv 0 [n]$. و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

$$\begin{cases} 2^{p-1} \equiv 1 [p] \\ 3^{p-1} \equiv 1 [p] \end{cases} \quad \text{ننطلق من النتيجتين:}$$

$$\begin{cases} 2^{k(p-1)} \equiv 1 [p] \\ 3^{k(p-1)} \equiv 1 [p] \end{cases} \quad \text{بما أن: } (k \in \mathbb{N}^*) \text{ فإن:}$$

$$\begin{cases} -2 \times 2^{k(p-1)} \equiv -2 [p] \\ 3 \times 3^{k(p-1)} \equiv 3 [p] \end{cases} \quad \text{و منه:}$$

$$\begin{cases} -2^{1+k(p-1)} \equiv -2 [p] \\ 3^{1+k(p-1)} \equiv 3 [p] \end{cases} \quad \text{يعني:}$$

$$\begin{cases} -2^{rn} \equiv -2 [p] \\ 3^{rn} \equiv 3 [p] \end{cases} \quad \text{و منه باستعمال النتيجة (16) نكتب:}$$

$$(17) \Rightarrow 3^{rn} - 2^{rn} \equiv 1 [p]$$

و لدينا حسب النتيجة (3): $3^n - 2^n \equiv 0 [p]$

$$\text{إذن: } 3^n \equiv 2^n [p]$$

و بما أن $(r \in \mathbb{N}^*)$ فإن: $3^{rn} \equiv 2^{rn} [p]$

و منه: $2^{rn} - 3^{rn} \equiv 0 [p]$ (18) →

نجمع المتوافتين (17) و (18) طرفاً بطرف نجد:

$$3^{rn} - 2^{rn} + 2^{rn} - 3^{rn} \equiv 1 + 0 [p]$$

يعني: $0 \equiv 1 [p]$ يعني كذلك: $1 \equiv 0 [p]$ أي: p يقسم 1

و منه $p = 1$ لأن العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الذي يقسم 1 هو نفسه.

و هذا تناقض لأن $p \geq 5$ إذن لا وجود له في $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

خلاصة التمرين بأكمله:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}; 3^n - 2^n \not\equiv 0 [n]$$

التمرين الرابع

لدينا: $\forall x > 1$; $h(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$; نضع: $\varphi(x) = x \ln x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{x \ln x}{x-1}} \quad \text{إذن:} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{x \ln x - 1 \ln 1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1}} \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} \right)} = \frac{1}{\varphi'_d(1)} \end{aligned}$$

ولدينا: $\varphi(x) = x \ln x$ إذن: $\varphi'(x) = \ln x + 1$

يعني: $\varphi'_d(1) = \varphi'_g(1) = \varphi'(1) = \ln(1) + 1 = 1$

و بالتالي: $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \frac{1}{\varphi'_d(1)} = \frac{1}{1} = 1 = h(1)$

إذن: $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = h(1)$

و هذا يعني أن الدالة h دالة متصلة على يمين 1

1 ب

نعتبر الدالة العددية v المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي:

$$v(x) = \ln x - x + 1$$

2 أ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x \ln x} \right) - \left(\frac{1}{x \ln x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x} \right) - \left(\frac{1}{x \ln x} \right) = \left(\frac{1}{+\infty} \right) - \left(\frac{1}{+\infty} \right) = 0$$

نُلخص النتائج المتعلقة بالدالة h في الجدول التالي :

x	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	
h	1	0

2 ب

نلاحظ حسب جدول تغيرات الدالة h أن الدالة h متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $[1; +\infty[$ بحيث :

$$h([1; +\infty[) =]0; 1]$$

إذن h تقابل من المجال $[1; +\infty[$ نحو المجال $]0; 1]$.

أي : $\forall x \in [1; +\infty[; \exists ! y \in]0; 1] : y = h(x)$

أو بتعبير آخر : $\forall x \in [1; +\infty[; \exists ! h(x) \in]0; 1]$

يعني : $(\forall x \geq 1) ; 0 < h(x) \leq 1$

الجزء الثاني

1 أ

ليكن x عنصراً من المجال $]1; +\infty[$.

لاحظ في البداية أن : $(t \ln t)' = 1 + \ln t$

نستغل إذن هذه الملاحظة أثناء الحساب .

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \int_x^{x^2} \left(\frac{1 + \ln t - \ln t}{t \ln t} \right) dt$$

$$= \int_x^{x^2} \left(\frac{1 + \ln t}{t \ln t} \right) dt - \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{t} \right) dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{(t \ln t)'}{t \ln t} dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t} dt$$

$$= [\ln(t \ln t)]_x^{x^2} - [\ln t]_x^{x^2}$$

$$= (\ln(x^2 \ln(x^2)) - \ln(x \ln x)) - (\ln(x^2) - \ln x)$$

$$= \ln \left(\frac{x^2 \ln(x^2)}{x \ln x} \right) - \ln \left(\frac{x^2}{x} \right) = \ln \left(\frac{2x^2 \ln(x)}{x \ln x} \right) - \ln(x)$$

$$= \ln(2x) - \ln(x) = \ln \left(\frac{2x}{x} \right) = \ln 2$$

$(\forall x > 1) ; \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$

و بالتالي :

لندرس تغيرات الدالة v على المجال $]0; +\infty[$.

لدينا v عبارة عن تشكيلة منسجمة من الدوال المتصلة و القابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$. إذن v قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$.

$$v'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

- إذا كان : $x = 1$ فإن : $v'(x) = 0$
- إذا كان : $x > 1$ فإن : $v'(x) < 0$
- إذا كان : $x < 1$ فإن : $v'(x) > 0$

و لدينا كذلك :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x + 1) = \ln(0^+) - 0 + 1 = -\infty - 0 + 1 = -\infty$$

و لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= (+\infty)(0 - 1 + 0) = -\infty$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة v كما يلي :

x	0	1	$+\infty$
$v'(x)$	+	0	-
v	$-\infty$	0	$-\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن الدالة v :

- متصلة على المجال $]0; +\infty[$.
- تزايدية على المجال $]0; 1]$.
- تناقصية على المجال $]1; +\infty[$.
- $v(1) = 0$

إذن 0 قيمة قصوية للدالة v على المجال $]0; +\infty[$.

يعني $\forall x \in]0; +\infty[; v(x) < 0$

يعني $\forall x \in]0; +\infty[; \ln x - x + 1 < 0$

يعني $\forall x \in]0; +\infty[; \ln x < x - 1$

و بما أن : $]1; +\infty[\subset]0; +\infty[$

فإن : $\forall x \in]1; +\infty[; \ln x < x - 1$

ليكن x عنصراً من المجال $]1; +\infty[$. لدينا : $h(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$

إذن :

$$h'(x) = \frac{x \ln x - (x-1)(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2}$$

$$= \frac{x \ln x - (x \ln x + x - \ln x - 1)}{(x \ln x)^2} = \frac{\ln x - x + 1}{(x \ln x)^2}$$

و نعلم أن : $(\forall x > 1) ; (\ln x - x + 1) < 0$

و كذلك : $(\forall x > 1) ; (x \ln x)^2 > 0$

إذن : $(\forall x > 1) ; \frac{\ln x - x + 1}{(x \ln x)^2} < 0$

يعني : $(\forall x > 1) ; h'(x) < 0$

أي أن الدالة h تناقصية قطعاً على المجال $]1; +\infty[$.

2 ب

نضرب أطراف التأخير (*) في العدد الموجب قطعاً $\left(\frac{1}{x-1}\right)$ نجد :

$$\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(x) \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x-1} \leq \left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x})$$

بعد ذلك نحسب نهايتي طرفي هذا التأخير على يمين 1 نجد :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}h(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)h(x) = \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}+1}\right)h(1) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)h(\sqrt{x})$$

$$= \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}+1}\right)h(\sqrt{1}) = \frac{1}{2}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(x) \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x-1} \leq \left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x})$$

$x \rightarrow 1^+$

$x \rightarrow 1^+$

$$\frac{1}{2}$$

و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{g(x) - g(1)}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$

أي أن الدالة g قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 و $g'(1) = \frac{1}{2}$.

2 ج

لدينا حسب التأخير الوارد في السؤال (2 أ) :

$$(\forall x > 1) ; g(x) \geq h(x)(x - \sqrt{x}) + \ln 2$$

لنحسب نهاية $(x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2$ بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x})(x - 1)}{x \ln x} + \ln 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x - 1)}{x \ln x} + \ln 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\frac{x-1}{x}\right) + \ln 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \ln 2$$

$$= \left(\frac{1}{0^+}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{+\infty}}\right) \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right) + \ln 2$$

$$= (+\infty)(1 - 0)(1 - 0) + \ln 2$$

$$= (+\infty)(1)(1) + \ln 2 = +\infty$$

1 ب

ليكن x عنصراً من المجال $]1; +\infty[$.

$$g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt$$

$$= \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{t} \ln t} - \frac{1}{t \ln t}\right) dt$$

$$= \int_x^{x^2} \left(\frac{\sqrt{t}}{t \ln t} - \frac{1}{t \ln t}\right) dt$$

$$= \int_x^{x^2} \left(\frac{\sqrt{t}-1}{t \ln t}\right) dt$$

1 ج

باستعمال تقنية تغيير المتغير نضع : $\sqrt{t} = u$

إذن : $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ يعني : $dt = 2u du$

• إذا كان $t = x$ فإن $u = \sqrt{x}$

• إذا كان $t = x^2$ فإن $u = x$

إذن آخر تكامل حصلنا عليه يصبح :

$$\int_x^{x^2} \left(\frac{\sqrt{t}-1}{t \ln t}\right) dt = \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{u-1}{u^2 \ln(u^2)}\right) (2u du)$$

$$= \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{u-1}{2u^2 \ln u}\right) (2u du)$$

$$= \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{u-1}{u \ln u}\right) du$$

إذن : $(\forall x > 1) ; g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{u-1}{u \ln u}\right) du$

Remarque : u et t sont des paramètres d'intégration qu'on peut schématiser comme des espaces mémoires temporels (variables muettes)

2 أ

ليكن $x > 1$ وليكن $t \in [\sqrt{x}; x]$

لدينا الدالة f تناقصية على المجال $]1; +\infty[$.

إذن فهي تناقصية على المجال $[\sqrt{x}; x]$ لأن $x > 1$.

بما أن : $\sqrt{x} \leq t \leq x$ فإن : $h(x) \leq h(t) \leq h(\sqrt{x})$

يعني : $h(x) \leq \left(\frac{t-1}{t \ln t}\right) \leq h(\sqrt{x})$

$$\int_{\sqrt{x}}^x h(x) dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t}\right) dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x h(\sqrt{x}) dt$$

$$h(x) \int_{\sqrt{x}}^x 1 dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t}\right) dt \leq h(\sqrt{x}) \int_{\sqrt{x}}^x 1 dt$$

$$h(x) [t]_{\sqrt{x}}^x \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t}\right) dt \leq h(\sqrt{x}) [t]_{\sqrt{x}}^x$$

$$h(x)(x - \sqrt{x}) \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t}\right) dt \leq h(\sqrt{x})(x - \sqrt{x})$$

و بالتالي حسب نتيجة السؤال ج ($\forall x > 1$) نكتب :

$$(*) \quad h(x)(x - \sqrt{x}) \leq g(x) - \ln 2 \leq h(\sqrt{x})(x - \sqrt{x})$$

نحصل إذن على الوضعيات التالية :

$$(\forall x > 1) ; g(x) \geq \frac{h(x)(x - \sqrt{x}) + \ln 2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

إذن حسب خاصية الترتيب و النهايات نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
 بالنسبة لنهاية $\frac{g(x)}{x}$ بجوار $+\infty$ ننطلق من التأيير الثمين المحصل عليه في
 السؤال (2) أ) كما سوف نستعمل أثناء الحساب النهاية المحصل عليها سابقا
 وهي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ لدينا :

$$(x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2 \leq g(x) \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x}) + \ln 2$$

نضرب طرفي هذا التأيير في العدد الموجب قطعاً $\frac{1}{x}$ نجد :

$$\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(x) + \frac{\ln x}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{x}$$

ثم نحسب نهايتي طرفي هذا التأيير بجوار $+\infty$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} \\ = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{+\infty}}\right)(0) + \frac{\ln 2}{+\infty} = (1 - 0)(0) + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{(\sqrt{x})^2} \\ = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = \sqrt{x}}} \left(1 - \frac{1}{t}\right)h(t) + \frac{\ln 2}{t^2} \\ = \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right)(0) + \frac{\ln 2}{(+\infty)^2} = 0 \end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعيات التالية :

$$\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(x) + \frac{\ln x}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

إذن حسب خاصية النهايات و الترتيب نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

أذكر في البداية بما يلي : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصرا من المجال I . فإن f تقبل عدة دوال أصلية على المجال I و بالخصوص تقبل دالة أصلية F التي تنعدم في a و تحقق :

$$\begin{cases} F(a) = 0 \\ F'(x) = f(x) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} F : I \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t) dt \end{cases}$$

انتهى التذكير

ليكن a عنصرا من المجال $]1; +\infty[$.

نعتبر الدالة العددية u المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بما يلي :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \ln x}$$

نلاحظ أن u دالة متصلة على $]1; +\infty[$

و ذلك حسب المبرهنات العامة للاتصال .

إذن : u تقبل عدة دوال أصلية على $]1; +\infty[$ و بالخصوص u تقبل دالة أصلية v التي تنعدم في a و معرفة بما يلي :

$$\begin{cases} v(a) = 0 \\ v'(x) = u(x) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v :]1; +\infty[\mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x u(t) dt \end{cases}$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعريف الدالة g نكتب :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt ; x > 1 \\ &= \int_x^a \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt + \int_a^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt \\ &= \int_a^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt - \int_a^x \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt \\ &= v(x^2) - v(x) \end{aligned}$$

نحصل إذن على العلاقة التالية : $g(x) = v(x^2) - v(x)$; $x > 1$
 انطلاقا من الدوال $x \rightarrow x$ و v و $x \rightarrow x^2$ نستطيع القول ، باستعمال
 المبرهنات العامة لاشتقاق مركب الدالتين ، أن g قابلة للاشتقاق على
 المجال $]1; +\infty[$.

و لدينا : $(\forall x > 1) ; g'(x) = (v(x^2) - v(x))'$

$$\begin{aligned} &= 2x v'(x^2) - v'(x) \\ &= 2x u(x^2) - u(x) \\ &= \frac{2x}{\sqrt{x^2} \ln(x^2)} - \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} = \frac{2x}{2x \ln x} - \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} \\ &= \frac{x}{x \ln x} - \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} = \frac{x - \sqrt{x}}{x \ln x} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x})^2 \ln(\sqrt{x}^2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} \ln \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2} h(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall x > 1) ; g'(x) = \frac{1}{2} h(\sqrt{x})$

إن: $(\forall x \geq 1) ; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2} < 1$

يعني: $(\forall x \geq 1) ; g'(x) < 1$

ومنه: $(\forall x \geq 1) ; g'(x) - 1 < 0$

أي: $(\forall x \geq 1) ; k'(x) < 0$

و هذا يعني أن الدالة k تناقصية قطعاً على المجال $[1; +\infty[$.
 إذن k تقابل من المجال $[1; +\infty[$ نحو صورته بالدالة k .

ولدينا $k([1; +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) ; k(1)]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= \left(0 - 1 + \frac{1}{+\infty} \right) (+\infty) = (-1)(+\infty) = -\infty$$

وبالتالي: k تقابل من المجال $[1; +\infty[$ نحو المجال $]-\infty; \ln 2]$.

لدينا: $\ln 2 > 0$ إذن: $0 \in]-\infty; \ln 2]$

و بما أن k تقابل من $[1; +\infty[$ نحو $]-\infty; \ln 2]$

فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً بالدالة k في المجال $[1; +\infty[$.

يعني بتعبير آخر: $\exists! \alpha \in [1; +\infty[; k(\alpha) = 0$

يعني: $\exists! \alpha \in [1; +\infty[; g(\alpha) - \alpha + 1 = 0$

يعني: $\exists! \alpha \in [1; +\infty[; 1 + g(\alpha) = \alpha$

أو بتعبير لطيف: المعادلة $1 + g(x) = x$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $[1; +\infty[$ وهو α .

باستعمال البرهان بالترجع، نعتبر العبارة (P_n) التالية:

$$(P_n) : 1 \leq u_n < \alpha$$

من أجل $n = 0$ لدينا حسب المعطيات: $1 \leq u_0 < \alpha$

إذن: العبارة (P_0) صحيحة.

ليكن $n \in \mathbb{N}$ ونفترض أن: $1 \leq u_n < \alpha$

ندخل على هذا التأطير الدالة التزايدية قطعاً g نحصل على:

$$g(1) \leq g(u_n) < g(\alpha)$$

ثم نضيف 1 لكل طرف: $g(1) + 1 \leq g(u_n) + 1 \leq g(\alpha) + 1$

إذن: باستعمال النتائج السابقة نكتب: $1 < \ln 2 + 1 \leq u_{n+1} < \alpha$

يعني: $1 \leq u_{n+1} < \alpha$ إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة.

حصلنا إذن على الوضعية التالية: $(P_0) \text{ est vraie}$

$$\{ (P_n) \text{ implique } (P_{n+1}) ; \forall n \geq 0$$

وبالتالي حسب مبدأ التراجع: $(P_n) \text{ est toujours vraie}$

$$\text{أي: } (\forall n \geq 0) ; 1 \leq u_n < \alpha$$

لدينا حسب آخر نتيجة: $(\forall n \geq 0) ; u_n < \alpha$

ندخل الدالة التناقصية قطعاً k على هذه المتفاوتة نجد:

$$(\forall n \geq 0) ; k(u_n) > k(\alpha)$$

و بما أن: $k(\alpha) = 0$ فإن: $k(u_n) > 0$

يعني: $(\forall n \geq 0) ; g(u_n) - u_n + 1 > 0$

يعني: $(\forall n \geq 0) ; 1 + g(u_n) > u_n$

ومنه: $(\forall n \geq 0) ; u_{n+1} > u_n$

و من هذه الكتابة نستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً.

3 ب

لدينا حسب نتيجة السؤال (2 ب) من الجزء الأول:

$$(\forall x \geq 1) ; 0 < h(x) \leq 1$$

نلاحظ أن: $x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1$

إذن: $(\forall x \geq 1) ; 0 < h(\sqrt{x}) \leq 1$

ومنه: $(\forall x \geq 1) ; 0 < \frac{1}{2} h(\sqrt{x}) \leq \frac{1}{2}$

يعني: $(\forall x \geq 1) ; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$

و من هذه الكتابة نستنتج أن g دالة تزايدية قطعاً على المجال $[1; +\infty[$.
 و لإنشاء جدول تغيرات g نستدعي النتائج التي حصلنا عليها من قبل و هي:

■ معرفة و متصلة على $[1; +\infty[$

■ g تزايدية قطعاً على $[1; +\infty[$

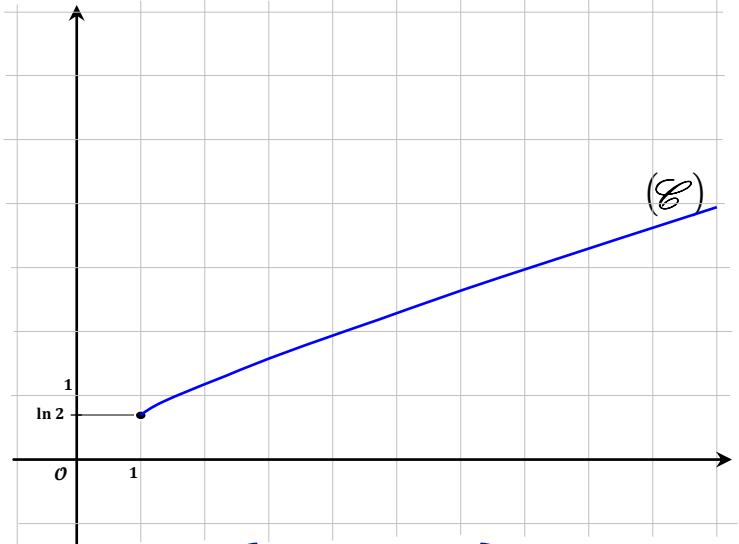
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) = \ln 2$$

نرسم إذن جدول تغيرات g كما يلي:

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
g	$\ln 2$	$+\infty$

3 ج



الجزء الثالث

1 أ

ليكن x عنصراً من المجال $[1; +\infty[$.

$$\text{لدينا: } k(x) = g(x) - x + 1$$

بما أن g قابلة للإشتقاق على المجال $[1; +\infty[$

فإن k قابلة للإشتقاق على $[1; +\infty[$ ولدينا: $k'(x) = g'(x) - 1$

لدينا حسب نتيجة السؤال (3 ب) من الجزء الثاني:

$$(\forall x \geq 1) ; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } (\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| &\leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \\ \text{إذن بتغيير } (n+1) \text{ بـ } n \text{ نجد : } |u_n - \alpha| &\leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha| \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{2} |u_{n-2} - \alpha| \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} |u_{n-3} - \alpha| \\ &\vdots \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_{n-n} - \alpha| \end{aligned}$$

$$\text{إذن : } (\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

و يمكن كذلك استعمال البرهان بالترجع .

$$\text{لنبرهن بالترجع على أن : } (\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\text{من أجل } n = 0 \text{ لدينا : } |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

$$\text{ليكن } n \in \mathbb{N} \text{ ونفترض أن : } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $\frac{1}{2}$ نجد :

$$(\forall n \geq 0) ; \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

$$\text{بما أن : } (\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$\text{فإن : } (\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

و هذا يعني أن العبارة صحيحة من أجل $(n+1)$.

وبالتالي حسب مبدأ التراجع :

$$(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها عدد موجب قطعاً و أصغر من 1 .

$$\text{إذن : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ و منه : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\begin{array}{c} \nearrow n \rightarrow \infty \\ \searrow \\ 0 \end{array}$$

أو بتعبير واضح نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n \geq 0) ; -\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq (u_n - \alpha) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\begin{array}{c} \nearrow n \rightarrow \infty \\ \searrow \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \nearrow n \rightarrow \infty \\ \searrow \\ 0 \end{array}$$

وبالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \alpha) = 0$

$$\text{أي : } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$$

لدينا $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية تزايدية قطعاً .

و بما أنها مكبورة بالعدد α (لأن $u_n < \alpha$) $(\forall n \geq 0)$ حسب (1) (أ) فإنها متقاربة و نهايتها ℓ تحقق :

$$1 + g(\ell) = \ell$$

و رأينا أن هذه المعادلة تقبل حلاً وحيداً في المجال $]1; +\infty[$ و هو α .

$$\text{إذن : } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$$

نعتبر الدالة العددية ψ المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بما يلي :

$$\psi(x) = 1 + g(x) \text{ . } g \text{ قابلة للإشتقاق على المجال }]1; +\infty[.$$

فإن ψ قابلة للإشتقاق على المجال $]1; +\infty[$.

و منه ψ قابلة للإشتقاق على أي مجال يوجد ضمن $]1; +\infty[$.

نختار المجال $]u_n; \alpha[$ الذي يوجد ضمن $]1; +\infty[$.

(و ذلك لأن : $1 \leq u_n < \alpha$) $(\forall n \geq 0)$.

إذن بتطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية (TAF)

على الدالة ψ في المجال $]u_n; \alpha[$ نجد :

$$\exists c \in]u_n; \alpha[; \frac{\psi(u_n) - \psi(\alpha)}{u_n - \alpha} = \psi'(c)$$

$$\begin{cases} \psi(u_n) = 1 + g(u_n) = u_{n+1} \\ \psi(\alpha) = 1 + g(\alpha) = \alpha \end{cases} \text{ لدينا :}$$

$$\text{إذن : } \exists c \in]u_n; \alpha[; \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} = \psi'(c)$$

$$\text{يعني : } \exists c \in]u_n; \alpha[; \left| \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} \right| = |\psi'(c)| \quad (*)$$

لدينا : $\psi'(c) = g'(c)$ و $c \in]u_n; \alpha[$

إذن : $1 \leq u_n < c < \alpha$ أي : $c \geq 1$

و منه حسب نتيجة السؤال (3) ب) من الجزء الثاني : $0 < g'(c) \leq \frac{1}{2}$

$$\text{إذن : } |\psi'(c)| = |g'(c)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{أي : } |\psi'(c)| \leq \frac{1}{2} \quad (**)$$

إذن باستعمال الكتابتين (*) و (**) نكتب :

$$(\forall n \geq 0) ; \left| \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{يعني : } (\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2013

التمرين الأول

1

منهجية التفكير في هذا السؤال :

نضع $\alpha = (x-1)(y-1)$ و $\beta = (x-2)(y-2)$

نريد أن نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y \in G$

يعني نريد أن نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 ; 1 < x * y < 2$
من أجل ذلك سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$\forall (x,y) \in G^2 ; x * y > 1$ و $x * y < 2$
يعني سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$$\forall (x,y) \in G^2 ; \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta} > 0 \text{ و } \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta} < 2$$

يعني : $\forall (x,y) \in G^2 ; \alpha + \beta > 0$ و $\alpha > 0$ و $\beta > 0$

إلى العمل : ليكن x و y عنصرين من المجال $G =]1,2[$

إذن : $1 < x < 2$ و $1 < y < 2$

و منه : $0 < (x-1) < 1$ و $0 < (y-1) < 1$

أي : $0 < (x-1)(y-1) < 1$

و هذا يعني أن الكمية $(x-1)(y-1)$ كمية موجبة قطعاً .

يعني : $(x-1)(y-1) > 0$

و لدينا كذلك : $1 < x < 2$ و $1 < y < 2$

إذن : $-1 < (x-2) < 0$ و $-1 < (y-2) < 0$

يعني أن : $(x-2)$ و $(y-2)$ كميتان سالبتان قطعاً .

إذن : جدواهما كمية موجبة قطعاً . يعني : $(x-2)(y-2) > 0$

في المرحلة الأولى نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y > 1$

و من أجل ذلك ننتقل من الكتابة : $(x-1)(y-1) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية $(x-2)(y-2)$

نحصل على : $2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2) >$

$$> (x-1)(y-1) + (x-1)(y-2)$$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعاً التالية :

$$\frac{1}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$$

نحصل على : $\frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)} > 1$

و هذا يعني أنه : $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y > 1$

في المرحلة الثانية نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y < 2$ (1)

و من أجل ذلك ننتقل من الكتابة : $(x-2)(y-2) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية $(x-2)(y-2)$

$$2(x-2)(y-2) > (x-2)(y-2)$$

ثم نضيف بعد ذلك إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية $2(x-1)(y-1)$

نجد : $2(x-1)(y-1) + 2(x-2)(y-2) >$

$$> (x-2)(y-2) + 2(x-1)(y-1)$$

يعني : $2[(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)] >$

$$> (x-2)(y-2) + 2(x-1)(y-1)$$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعاً :

$$\frac{1}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$$

$$2 > \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)} \text{ نجد}$$

يعني : $\forall (x,y) \in G^2 ; 2 > x * y$ (2)

من النتيجة (1) و (2) نستنتج أن : $\forall (x,y) \in G^2 ; 1 < x * y < 2$

يعني : $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y \in G$

و بالتالي * قانون تركيب داخلي في المجموعة G .

أ 2 1

$$f : (\mathbb{R}_+, \times) \mapsto (G, *)$$

$$x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$$

لدينا f تطبيق معرف بما يلي :

لكي يكون التطبيق f تشاكلاً يكفي أن نتحقق من أن :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* ; f(x \times y) = f(x) * f(y)$$

ليكن x و y عنصرين من المجموعة \mathbb{R}_+^* .

$$f(x) * f(y) = \left(\frac{x+2}{x+1}\right) * \left(\frac{y+2}{y+1}\right)$$

لدينا :

$$= \frac{2\left(\frac{x+2}{x+1} - 1\right)\left(\frac{y+2}{y+1} - 1\right) + \left(\frac{x+2}{x+1} - 2\right)\left(\frac{y+2}{y+1} - 2\right)}{\left(\frac{x+2}{x+1} - 1\right)\left(\frac{y+2}{y+1} - 1\right) + \left(\frac{x+2}{x+1} - 2\right)\left(\frac{y+2}{y+1} - 2\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}$$

$$= \frac{xy+2}{xy+1} = f(x \times y)$$

$$f(x) * f(y) = f(x \times y)$$

إذن :

إذن f تشاكل من (\mathbb{R}_+, \times) نحو $(G, *)$.

لكي يكون f تقابلاً يكفي أن يحقق ما يلي :

$$(\forall y \in G), (\exists ! x \in \mathbb{R}_+^*) : f(x) = y$$

أو بتعبير أسهل : يكون f تطبيقاً تقابلياً عندما يكون للمعادلة $f(x) = y$

ذات المجهول x حل وحيد في \mathbb{R}_+^* مرتبط بـ y .

ليكن y عنصراً من المجموعة G و لنحل في \mathbb{R}_+^* المعادلة $f(x) = y$.

$$\frac{x+2}{x+1} = y$$

هذه المعادلة تصبح :

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم $(x+1)$

$$(x+2) = y(x+1)$$

يعني : $x+2 = xy + y$ يعني : $x(1-y) = (y-1)$

$$\frac{1}{1-y}$$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم

$$x = \frac{y-2}{1-y}$$

نجد :

نلاحظ أن التعبير $\frac{y-2}{1-y}$ وحيد لأنه إذا افترضنا غير ذلك .

$$x = \frac{y'-2}{1-y'}$$

أي وجود عدد آخر y' يحقق

$$\frac{y-2}{1-y} = \frac{y'-2}{1-y'}$$

فإنه سوف نحصل على :

$$y - yy' - 2 + 2y' = y' - 2 - yy' + 2y$$

لدينا : $A^3 = A \times A \times A$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

إذن : $A^3 = O$

لدينا المصفوفة $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ هي العنصر المحايد لـ $+$ في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

نلاحظ في البداية أن $A \neq O$

ولدينا : $A^3 = A \times A^2 = O$

مع : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$

إذن نستنتج أن $A \neq O$ وتوجد مصفوفة و هي A^2 تخالف O

و تحقق $A \times A^2 = A^2 \times A = O$

إذن حسب التذكير : المصفوفة A قاسم للصفر في الحلقة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$

1 II

$$(A^2 - A + I) \times (A + I) = A^3 + A^2 - A^2 - A + A + I$$

$$= A^3 + I = O + I = I$$

و بما أن A و I مصفوفتان من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

فإن المصفوفة $(A^2 - A + I)$ عنصر من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

و نعلم أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة تبادلية وحدتها I إذن \times تبادلي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

يعني : $(A + I) \times (A^2 - A + I) = (A^2 - A + I) \times (A + I) = I$

و بالتالي $(A + I)$ مصفوفة قابلة للقلب في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$

و مقلوبها هو المصفوفة $(A^2 - A + I)$.

ولدينا : $(A + I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

و لدينا كذلك :

$$(A^2 - A + I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

خلاصة :

مقلوب المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ هي المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

أي : $(y - y') = 0$ أي : $y = y'$

و بالتالي فإن التعبير $\frac{y-2}{1-y}$ وحيد .

إن المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلا وحيدا و هو $\frac{y-2}{1-y}$

يكفي الآن أن نتحقق من أن هذا الحل ينتمي إلى \mathbb{R}_+^* .

يعني أنه يكفي أن نبين أن : $\forall y \in]1,2[; \frac{y-2}{1-y} > 0$

لدينا : $1 < y < 2$ إذن : $-1 < (y-2) < 0$

و لدينا : $1 < y < 2$ إذن : $-1 < (1-y) < 0$

إذن $(y-2)$ و $(1-y)$ كميّتان سالبتان سالبتان قطعا .

أي أن خارجهما كمية موجبة قطعا .

يعني : $\forall y \in]1,2[; \frac{y-2}{1-y} > 0$

إذن : $(\forall y \in G), (\exists ! x = \frac{y-2}{1-y} \in \mathbb{R}_+^*) : f(x) = y$

يعني أن f تقابل من \mathbb{R}_+^* نحو G .

خلاصة : f تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}_+^*, \times) نحو $(G, *)$.

2 I

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق

و يُحولها إلى مجموعة الوصول .

يعني أنه عندما نتوفر على تشاكل تقابلي f من مجموعة $(E, *)$ نحو (F, τ)

فإنه نستنتج البنية الجبرية للمجموعة (F, τ) انطلاقا من البنية الجبرية

للمجموعة $(E, *)$ عن طريق التطبيق f .

ومن ثم :

إذا كان $*$ تبادلي أو تجميعي في E فإن τ تبادلي أو تجميعي في F .

إذا كان e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في E فإن $f(e)$ هو العنصر

المحايد للقانون τ في F .

إذا كان x' هو مماثل x بالنسبة للقانون $*$ في E فإن $f(x')$ هو مماثل

$f(x)$ بالنسبة للقانون τ في F

في هذا السؤال لدينا f تشاكل تقابلي معرف بما يلي :

$$f : (\mathbb{R}_+^*, \times) \mapsto (G, *)$$

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(G, *)$ انطلاقا من البنية الجبرية

لـ (\mathbb{R}_+^*, \times) عن طريق التطبيق f .

و بما أن (\mathbb{R}_+^*, \times) زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1

فإن $(G, *)$ زمرة تبادلية كذلك عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي $f(1)$

أي العدد $\frac{3}{2}$. و للتأكد من ذلك يكفي أن نتحقق من أن :

$$(\forall x \in G) ; x * \frac{3}{2} = \frac{3}{2} * x = x$$

1 II

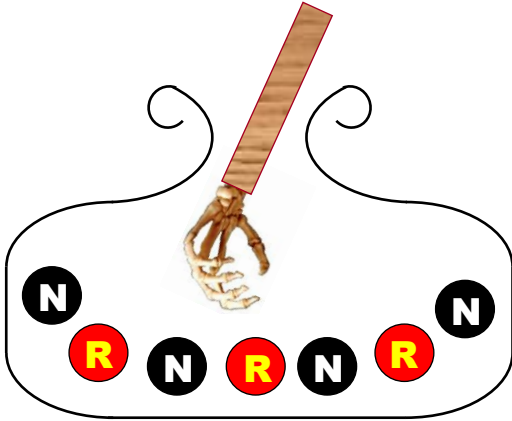
تذكير : لتكن $(E, *, \tau)$ حلقة و e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في E .

نقول بأن عنصرا x من E قاسم للصفر إذا تحققت الشروط التالية :

$$\begin{cases} x \neq e \\ \exists y \in E \setminus \{e\} ; x \tau y = y \tau x = e \end{cases}$$

نعتبر الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ التي صفرها $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



عندما نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال أربع كرات من صندوق يحتوي على 7 كرات فإن هذه التجربة العشوائية تحتل 7^4 نتيجة ممكنة .
يعني : $card(\Omega) = 7^4 = 2401$

بحيث : Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .
 X هو المتغير العشوائي الذي يربط كل عملية بعدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق . إذن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 . يعني : $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$
قانون احتمال المتغير العشوائي X سيكون إذن التطبيق P_X المعرف على المجموعة $\{0,1,2,3,4\}$ نحو المجال $[0,1]$ بما يلي :

$$P_X : \{0,1,2,3,4\} \mapsto [0,1]$$

$$k \mapsto P_X(k) = p[X = k]$$

لنحسب إذن احتمال كل قيمة k من قيم المتغير العشوائي X .

نحسب : $p[X = 0]$

الحدث $[X = 0]$ هو الحصول على أربع كرات كلها حمراء و توجد 3^4 إمكانية لسحب الكرات الأربع .

$$p[X = 0] = \frac{3^4}{7^4} = \frac{81}{2401} \quad \text{إذن :}$$

نحسب : $p[X = 1]$

الحدث $[X = 1]$ هو الحصول على كرة سوداء واحدة و ثلاث كرات حمراء . و من أجل ذلك لدينا :

4^1 إمكانية لسحب الكرة السوداء

C_4^1 إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة السوداء

3^3 إمكانية لسحب ثلاث كرات حمراء

$$p[X = 1] = \frac{4^1 \times C_4^1 \times 3^3}{7^4} = \frac{432}{2401} \quad \text{إذن :}$$

نحسب : $p[X = 2]$

الحدث $[X = 2]$ هو الحصول على كرتين حمراوين و كرتين سوداوين . و من أجل ذلك لدينا :

4^2 إمكانية لسحب الكرتين السوداوين .

C_4^2 إمكانية لاختيار مكان الكرتين السوداوين .

3^2 إمكانية لسحب الكرتين الحمراوين .

$$p[X = 2] = \frac{4^2 \times C_4^2 \times 3^2}{7^4} = \frac{864}{2401} \quad \text{إذن :}$$

لكي يكون $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي يكفي أن نتحقق من الشروط التالية :

$$(\forall x, y \in E) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{زمرة تبادلية } (E, +) \\ \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \\ (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x \\ (\alpha \times \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x) \\ 1 \cdot x = x \end{array} \right.$$

بحيث \times هو الضرب في \mathbb{R}

و $+$ هو جمع المصفوفات في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

و \cdot هو ضرب مصفوفة في عدد حقيقي .

في البداية نبين أن $(E, +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$

لدينا E جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

لنكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصفوفتان من E .

$$\begin{aligned} M(a, b) - M(c, d) &= aI + bA - cI - dA \\ &= (a - c)I + (b - d)A \\ &= M(a - c ; b - d) \in E \end{aligned}$$

إذن $(E, +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$

و بما أن $+$ تبادلي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ فإن $(E, +)$ زمرة تبادلية (1)

نستنتج الخاصيات المتبقية من خلال كون E جزء من الفضاء المتجهي

الحقيقي $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ و كون E جزء مستقر بالنسبة للقانون (·)

و ذلك لأن : $\forall M(a, b) \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R} ; \alpha \cdot M(a, b) = M(\alpha a, \alpha b) \in E$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{زمرة تبادلية } (E, +) \\ \alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \\ (\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A \\ (\alpha \times \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A) \\ 1 \cdot A = A \end{array} \right. \quad \text{إذن :}$$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

نعبر الأسرة (I, A) .

من الواضح أن الأسرة (I, A) مولدة للفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$.

لأن : $\forall M(a, b) \in E ; M(a, b) = aI + bA$

يعني أن كل مصفوفة من E نكتب على شكل تاليفة خطية للمصفوفتين I و A

لنبين الآن أن الأسرة (I, A) حرة .

من أجل ذلك ننطلق من تاليفة خطية منعدمة للمصفوفتين I و A .

$$a \cdot I + b \cdot A = O$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3b & 2b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 3b & 2b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

إذن الأسرة (I, A) حرة .

و بما أن (I, A) أسرة حرة و مولدة للفضاء المتجهي E فإنها أساس لهذا الفضاء المتجهي الحقيقي

$$p(E \cap N) = p_N(E) \times p(N) \text{ : يعني}$$

$$= p_N(E_1) \times p_N(E_2) \times p_N(E_3) \times p(N)$$

$$= \frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10} \times \frac{4}{7} = \frac{2016}{9240} = \frac{12}{55}$$



$$p(E) = p(E \cap N) + p(E \cap R)$$

$$= \frac{12}{55} + p_R(E_1) \times p_R(E_2) \times p_R(E_3) \times p(R)$$

$$= \frac{12}{55} + \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{7}$$

$$= \frac{12}{55} + \frac{72}{9240} = \frac{87}{385}$$



انحساب $p_E(R)$

$$p_E(R) = \frac{p(R \cap E)}{p(E)} = \frac{p_R(E) \times p(R)}{p(E)}$$

$$= \frac{p_R(E_1) \times p_R(E_2) \times p_R(E_3) \times p(R)}{p(E)}$$

$$= \frac{\frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{7}}{\frac{87}{385}} = \frac{1}{29}$$



لنحل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة التالية :

$$(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

$$\Delta = 4(a-1)^2 - 8(a-1)^2 \text{ : لدينا}$$

$$= -4(a-1)^2$$

$$= (2i(a-1))^2$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين عقديين z_2 و z_1 .

$$z_1 = \frac{2(a-1) + 2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1+i)}{2}$$

$$z_2 = \frac{2(a-1) - 2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1-i)}{2}$$



لدينا $a = e^{i\theta}$ مع $0 < \theta < \pi$ إذن : $(a-1) = e^{i\theta} - 1$

$$(a-1) = e^{i\theta} - 1 = \cos \theta + i \sin \theta - 1$$

$$= \cos(\theta) - 1 + i \sin(\theta)$$

هدفنا هو البحث عن r و φ بحيث : $(a-1) = r e^{i\varphi}$.

$$\cos(\theta) - 1 + i \sin(\theta) = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi) \text{ : يعني}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) - 1 = r \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) = r \sin(\varphi) \end{cases} \text{ : أي}$$

من خلال دمج مربعي هاتين المتساويتين :

$$(\cos(\theta) - 1)^2 + \sin^2 \theta = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \text{ : نجد}$$

انحساب : $p[X=3]$

الحدث $[X=3]$ هو الحصول على ثلاث كرات سوداء و كرة حمراء واحدة . و من أجل ذلك لدينا :
 3^1 إمكانية لسحب الكرة الحمراء .

C_4^1 إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة الحمراء .

4^3 إمكانية لسحب الكرات السوداء الثلاث .

$$p[X=3] = \frac{3^1 \times C_4^1 \times 4^3}{7^4} = \frac{768}{2401} \text{ : إذن}$$

انحساب : $p[X=4]$

الحدث $[X=4]$ هو الحصول على أربع كرات كلها سوداء .

$$p[X=4] = \frac{4^4}{7^4} = \frac{256}{2401} \text{ : إذن}$$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعروف بما يلي

$$P_X : \{0,1,2,3,4\} \mapsto [0,1]$$

$$0 \mapsto P_X(0) = \frac{81}{2401}$$

$$1 \mapsto P_X(1) = \frac{432}{2401}$$

$$2 \mapsto P_X(2) = \frac{864}{2401}$$

$$3 \mapsto P_X(3) = \frac{768}{2401}$$

$$4 \mapsto P_X(4) = \frac{256}{2401}$$

و للتأكد من صحة الجواب يجب أن نحصل على :

$$\frac{81}{2401} + \frac{432}{2401} + \frac{864}{2401} + \frac{768}{2401} + \frac{256}{2401} = 1$$



$$E(X) = \sum_0^4 k \cdot p[X=k]$$

$$= 0 \left(\frac{81}{2401} \right) + 1 \left(\frac{432}{2401} \right) + 2 \left(\frac{864}{2401} \right) + 3 \left(\frac{768}{2401} \right) + 4 \left(\frac{256}{2401} \right)$$

$$= \frac{5488}{2401} = \frac{16}{7}$$



لدينا : $p(E \cap N) = p_N(E) \times p(N)$

و لدينا كذلك الحدث E هو الحصول على ثلاث كرات سوداء من خلال

ثلاث سحب متتابعة بدون إحلال .

إذن نستطيع تجزئ الحدث E في المرحلة الثالثة إلى ثلاث أحداث جزئية

و مستقلة فيما بينها و هي :

- E_1 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الأولى
- E_2 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثانية
- E_3 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثالثة

إذن نكتب : $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$

و منه : $p_N(E) = p_N(E_1) \times p_N(E_2) \times p_N(E_3)$

2

II

لدينا r_1 دوران مركزه J و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

و لدينا $r_1(C) = C'$ إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(C') - aff(J)) = e^{i\frac{\pi}{2}}(aff(C) - aff(J))$$

$$\Leftrightarrow \left(c' - \frac{a+i}{2} \right) = i \left(i - \frac{a+i}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow c' = \frac{-1 - ia + a + i}{2} = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = z_2$$

و بنفس الطريقة لدينا r_2 دوران مركزه K و زاويته $\frac{\pi}{2}$

و لدينا $r_2(A) = A'$ إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(A') - aff(K)) = e^{i\frac{\pi}{2}}(aff(A) - aff(K))$$

$$\Leftrightarrow \left(a' - \frac{a-i}{2} \right) = i \left(a - \frac{a-i}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow a' = \frac{ia - 1 + a - i}{2} = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = z_1$$

إذن : $c' = z_2$ و $a' = z_1$

3

II

$$\frac{a' - c'}{a - 1} = \frac{\frac{(a-1)(i+1)}{2} - \frac{(a-1)(1-i)}{2}}{a-1} \text{ لدينا :}$$

$$= \frac{(a-1)(i+1-1+i)}{2} \times \frac{1}{(a-1)}$$

$$= \frac{i(a-1)}{(a-1)} = i$$

$$\arg\left(\frac{a' - c'}{a - 1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ و منه : } \frac{a' - c'}{a - 1} = i$$

$$\arg(\overline{B'A}, \overline{C'A'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ يعني}$$

و هذا يعني أن المستقيم (AB') عمودي على المستقيم $(A'C')$.

أي أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'B'C'$

لأن $B' \in (AB')$ و $(A'C') \perp (AB')$.

التمرين الرابع

1

أ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (0^+)^2}} \text{ لدينا :}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ إذن :}$$

و هذا يعني أن الدالة f متصلة على يمين الصفر .

لنحسب الآن نهاية f بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (+\infty)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ إذن :}$$

$$\text{يعني : } \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + 1 + \sin^2 \theta = r^2$$

$$\text{يعني : } 2(1 - \cos \theta) = r^2$$

$$\text{يعني : } 2 \left(1 - \left(2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1 \right) \right) = r^2$$

$$\text{يعني : } 2 \left(2 - 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) = r^2$$

$$\text{يعني : } 4 \left(1 - \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) = r^2$$

$$\text{يعني : } 4 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = r^2$$

$$\text{يعني : } r > 0 \text{ و } r = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

يكفي الآن تحديد قيمة φ . و ننتقل من الكتابة $\sin \theta = r \sin \varphi$

$$\text{يعني : } \sin \left(2 \cdot \frac{\theta}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin(\varphi)$$

$$\text{يعني : } 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin(\varphi)$$

$$\text{يعني : } \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = \sin(\varphi)$$

$$\text{يعني : } \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

$$\text{يعني : } \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{يعني : } \frac{\theta}{2} \equiv \varphi - \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{يعني : } \varphi \equiv \frac{\theta + \pi}{2} [2\pi] \text{ إذن : } (a - 1) = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i \left(\frac{\theta + \pi}{2} \right)}$$

ملاحظة : يمكن تطبيق القاعدة التالية مباشرة

$$e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos \left(\frac{x - y}{2} \right) e^{i \left(\frac{x + y}{2} \right)}$$

ب

2

I

في البداية لدينا :

$$(1 + i) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

و لدينا كذلك :

$$(1 - i) = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{إذن : } z_1 = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} e^{i \left(\frac{\theta + \pi}{2} \right)}$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{\frac{i(2\theta + 3\pi)}{4}}$$

$$z_2 = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} e^{i \left(\frac{\theta + \pi}{2} \right)}$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{\frac{i(2\theta + \pi)}{4}}$$

1

II

لدينا J هي منتصف القطعة $[AC]$.

$$\text{إذن : } aff(J) = \frac{aff(A) + aff(C)}{2} = \frac{a + i}{2}$$

و لدينا K هي منتصف القطعة $[AB]$.

$$\text{إذن : } aff(K) = \frac{aff(A) + aff(B)}{2} = \frac{a - i}{2}$$

لدينا : $\psi(x) = x \ln x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty \right[\subset \mathbb{R}$

إذن : $\psi(]0, +\infty[) \subseteq \mathbb{R}$

إذن الدالة $f = \varphi \circ \psi$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.

ليكن x عنصرا من المجال $]0, +\infty[$ لدينا :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} = (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{1}{2}}$$

إذن : $f'(x) = \frac{-1}{2} (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{1}{2}-1} (1 + (x \ln x)^2)'$

$$= \frac{-1}{2} (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{3}{2}} (2x \ln x)(x \ln x)'$$

$$= \frac{-1}{2} (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{3}{2}} (2x \ln x)(1 + \ln x)$$

$$= \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

إذن : $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$

1 د

نلاحظ في البداية أن : $(1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}} > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارتي الكميتين $(\ln x)$ و $(1 + \ln x)$.

الكمية $\ln x$ تنعدم في 1 و الكمية $1 + \ln x$ تنعدم في $\frac{1}{e}$.

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$		
$\ln x$		-	-	0	+	
$1 + \ln x$		-	0	+	+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-
f	1		$f\left(\frac{1}{e}\right)$	1	0	

2 أ

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\ln x} dx = \int \frac{(\ln x)'}{(\ln x)} dx$$

$$= \ln(|\ln x|) + c ; c \in \mathbb{R}$$

بما أن : $\ln x \geq 1$ فإن $x \in [e; +\infty[$

نأخذ الثابتة c تساوي 0 نجد أن الدالة $x \rightarrow \ln(\ln x)$ دالة أصلية

للدالة $x \rightarrow \frac{1}{x \ln x}$ على المجال $[e; +\infty[$.

و أشير إلى أن $x \rightarrow \ln(\ln x)$ دالة معرفة ومتصلة على $]1; +\infty[$

إذن فهي متصلة على $[e; +\infty[$ لأن $[e; +\infty[\subset]1; +\infty[$.

1 ب

لدراسة اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 نحسب النهاية التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right)$$

و من أجل ذلك نستعين بالنهايتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln x)^2 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0$$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} - 1 \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + (x \ln x)^2}}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \right)$$

نضرب البسط و المقام في المرافق $(1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})$ نجد :

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + (x \ln x)^2}}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2}}{1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1 - 1 - (x \ln x)^2}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2} (1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{-(x \ln x)^2}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2} (1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x (\ln x)^2) \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2} (1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})} \right)$$

$$= (-0) \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (0)^2} (1 + \sqrt{1 + (0)^2})} \right) = (0) \left(\frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 0$$

و هذا يعني أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و $f'_d(0) = 0$.

1 ج

تذكير : إذا كانت g دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I .

و كانت f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال J .

إذن تكون الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كان $g(I) \subseteq J$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \quad \text{لدينا :}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \text{نضع :}$$

و نضع : $\psi(x) = x \ln x ; \forall x \in]0; +\infty[$

إذن : $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \varphi \circ \psi(x)$

لدينا ψ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$

و φ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

إذن تكون الدالة $\varphi \circ \psi$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

إذا كان : $\psi(]0, +\infty[) \subseteq \mathbb{R}$

ليكن x عنصرا من المجال $]0, +\infty[$.

و هذا يعني حسب خاصية التآخير و النهايات أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_e^x f(t) dt = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt \quad \text{إذن :} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^e f(t) dt + \int_e^x f(t) dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^e f(t) dt \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_e^x f(t) dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{constante}) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_e^x f(t) dt \right) \\ &= (+\infty) + (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty \quad \text{إذن :}$$

من جهة ثانية ، لدينا :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x f(t) dt < \ln(\ln x)$$

نضرب أطراف هذا التآخير في العدد الموجب قطعا $\frac{1}{x}$ نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\ln(\ln x)}{x} \right) < \frac{1}{x} \int_e^x f(t) dt < \frac{\ln(\ln x)}{x}$$

لنحسب النهاية :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\ln x)}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\ln x)}{x} \right) \times \frac{\ln x}{\ln x} \quad \text{لدينا :} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \right) \times \frac{\ln x}{x} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty \\ y = \ln x}} \frac{\ln y}{y} \times \frac{\ln x}{x} = 0 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\ln x)}{x} \right) = 0 \quad \text{إذن :}$$

و نحصل بذلك على الوضعية التالية :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\ln(\ln x)}{x} \right) < \frac{1}{x} \int_e^x f(t) dt < \frac{\ln(\ln x)}{x}$$

$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \quad 0 \qquad \qquad \qquad 0$

و منه حسب خاصية النهايات و التآخير نستنتج أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_e^x f(t) dt = 0$$

2 ب

ليكن t عنصرا من المجال $[e, +\infty[$.
ننطلق من المتفاوتة $0 < 1$ و نضيف إلى طرفيها الكمية $(t \ln t)^2$
نجد : $(t \ln t)^2 < 1 + (t \ln t)^2$
و منه : $\sqrt{(t \ln t)^2} < \sqrt{1 + (t \ln t)^2}$

يعني : $(1) \quad (\forall t \geq e) ; t \ln t < \sqrt{1 + (t \ln t)^2}$
و لدينا كذلك $t \geq e$ إذن $\ln t \geq 1$.

نضرب هاتين المتفاوتتين طرفا بطرف نجد : $t \ln t \geq e > 1$
نحفظ بالمتفاوتة : $(\forall t \geq e) ; t \ln t > 1$
التي تصبح : $(\forall t \geq e) ; (t \ln t)^2 > 1$
نضيف إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية $(t \ln t)^2$
نجد : $(\forall t \geq e) ; 2(t \ln t)^2 > 1 + (t \ln t)^2$

يعني : $(2) \quad (\forall t \geq e) ; \sqrt{2} t \ln t > \sqrt{1 + (t \ln t)^2}$
من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall t \geq e) ; t \ln t < \sqrt{1 + (t \ln t)^2} < \sqrt{2} t \ln t$$

2 ج

من خلال آخر تآخير حصلنا عليه نستنتج أن :

$$(\forall t \geq e) ; \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{t \ln t} \right) < \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} < \frac{1}{t \ln t}$$

ليكن x عددا حقيقيا بحيث $x \geq e$.

ندخل التكامل $\int_e^x dt$ على هذا التآخير نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_e^x \left(\frac{1}{t \ln t} \right) dt < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < \int_e^x \frac{1}{t \ln t} dt$$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{2}} [\ln(\ln t)]_e^x < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < [\ln(\ln t)]_e^x$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < \ln(\ln x)$

2 د

لدينا حسب آخر تآخير :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < \ln(\ln x)$$

إذن : $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x f(t) dt < \ln(\ln x)$

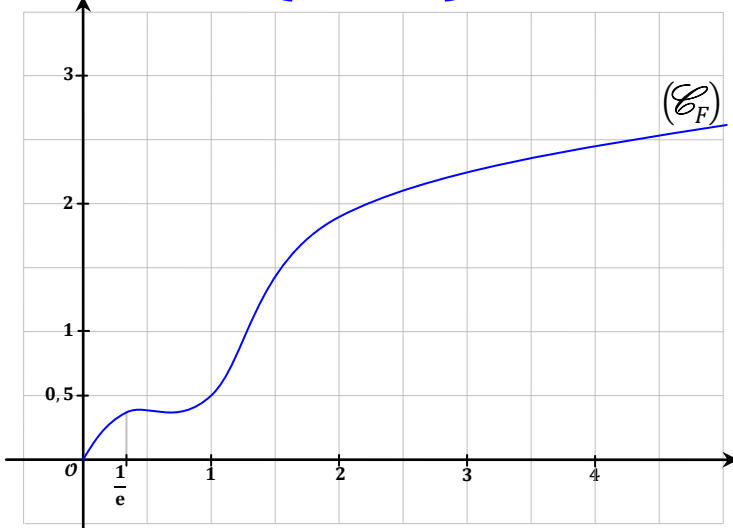
لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln x) = \ln(\ln(+\infty)) = \ln(+\infty) = +\infty$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x f(t) dt < \ln(\ln x)$$

$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \quad +\infty \qquad \qquad \qquad +\infty$

2 ز



3 أ

نستعمل النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - F(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{F(x)}{x}\right) = (+\infty)(1 - 0) = +\infty$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$

من جهة ثانية لدينا φ معرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $\varphi(x) = x - F(x)$ ولدينا كذلك F قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ بحيث : $F'(x) = f(x)$

إذن φ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ ولدينا : $\varphi'(x) = 1 - F'(x) = 1 - f(x)$ نلاحظ أنه إذا كان $x = 0$ فإن $f(x) = 1$ يعني : $1 - f(x) = 0$ أي : $\varphi'(x) = 0$

إذا كان $0 \leq x \leq \frac{1}{e}$ فإن $f(0) \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$ لأن f دالة تناقصية على المجال $\left[0, \frac{1}{e}\right]$. إذن : $1 \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$

يعني : $1 - f(x) \geq 0$ أي : $\varphi'(x) \geq 0$ إذن φ دالة تزايدية على المجال $\left[0, \frac{1}{e}\right]$.

إذا كان $\frac{1}{e} \leq x \leq 1$ فإن $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(x) \leq f(1)$ لأن f دالة تزايدية على المجال $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

إذن $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(x) \leq 1$ يعني : $1 - f(x) \geq 0$ أي : $\varphi'(x) \geq 0$ إذن φ دالة تزايدية على المجال $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

إذا كان : $x \geq 1$ فإن $f(x) \leq f(1)$ لأن f دالة تناقصية على المجال $[1, +\infty[$.

إذن : $f(x) \leq 1$ يعني : $1 - f(x) \geq 0$ أي : $\varphi'(x) \geq 0$. إذن φ دالة تزايدية على المجال $[1, +\infty[$.

خلاصة : φ دالة تزايدية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$

نستغل إذن هذه النهاية لحساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{ لدينا :} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\int_0^e f(t) dt + \int_e^x f(t) dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\int_0^e f(t) dt \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\int_e^x f(t) dt \right) \\ &= \left(\frac{1}{+\infty} \right) \times (\text{constante réelle}) + 0 = 0 \end{aligned}$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ (2)

و يمكن تفسير النهايتين (1) و (2) بقولنا : المنحنى (E_F) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأفصيل .

2 هـ

لدراسة نقط انعطاف المنحنى (E_F) ندرس إشارة المشتقة الثانية $F''(x)$.

لدينا F دالة عددية معرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ إذن F دالة أصلية للدالة f على المجال $[0, +\infty[$.

أو بتعبير الاشتقاق نكتب : $\forall x \in [0, +\infty[; F'(x) = f(x)$ و بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ فإن الدالة F' قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$.

$$\text{و لدينا : } (\forall x \in]0, +\infty[) ; F''(x) = f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^2}$$

إذن تنعدم الدالة $F''(x)$ على المجال $]0, +\infty[$ عندما تنعدم الكميّتين $(\ln x)$ و $(1 + \ln x)$. أي تنعدم الدالة $F''(x)$ إذا كان $x = 1$ أو $x = \frac{1}{e}$ و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطتين و ذلك حسب جدول الإشارة السابق . و بالتالي (E_F) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي $\frac{1}{e}$ و 1 .

و يمكن أن نضيف جدول التغير للمنحنى (E_F) و ذلك انطلاقاً من جدول إشارة $f'(x)$. لأن : $\forall x \in]0, +\infty[; F''(x) = f'(x)$

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$	
$F''(x)$	-	0	+	0	-
(E_F)		نقطة انعطاف مقعر		نقطة انعطاف محدب	

لدينا f دالة متصلة و تناقصية على كل مجال $[0, x]$ حيث $x \geq 1$.

ولدينا $0 < f(x) < 1$; $(\forall x \geq 1)$.

إذن : $M = \text{Max}_{[0, x]}(f(x)) = f(0)$ و $m = \text{min}_{[0, x]}(f(x)) = f(x)$

$$\Rightarrow (x - 0)f(x) < \int_0^x f(t) dt < (x - 0)f(0)$$

$$\Rightarrow xf(x) < F(x) < x$$

$$\Rightarrow g'(x) < 0 ; \text{car } g'(x) = \frac{xf(x) - F(x)}{x^2}$$

$$\Rightarrow g \text{ est } \searrow \text{ sur } [1, +\infty[$$

$$\Rightarrow g(\alpha_n) \leq g(n) ; \text{car } \alpha_n \geq n$$

$$\Rightarrow \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n) ; \text{car } f(n) > 0$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n) ; \text{car } \begin{cases} \text{et } F(\alpha_n) \geq 0 \\ \text{et } \alpha_n > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow d'où \text{ le résultat voulu } *$

الطريقة الثانية : استعمال TAF

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[1, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = \frac{F(x)}{x}$
شرطا الإتصال و الإشتقاق محققين في هذه الدالة لأنها خارج مُعرّف
لداالتين متصلتين و قابلتين للإشتقاق على المجال $[1, +\infty[$.

نطبق إذن مبرهنة التزايد المنتهية على المجال $[n, \alpha_n]$ نجد :

$$\Rightarrow \exists c \in]n, \alpha_n[; \frac{F(\alpha_n) - F(n)}{\alpha_n - n} = g'(c) = \frac{cf(c) - F(c)}{c^2}$$

نلاحظ أن : $1 \leq n < c \leq \alpha_n$ إذن حسب ما سبق نستنتج أن :

$$\Rightarrow cf(c) - F(c) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{cf(c) - F(c)}{c^2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{F(\alpha_n) - F(n)}{\alpha_n - n} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{n} < 0 ; \text{car } \alpha_n - n \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n) ; \text{car } f(n) > 0$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n) ; \text{car } \begin{cases} \text{et } F(\alpha_n) \geq 0 \\ \text{et } \alpha_n > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow d'où \text{ le résultat voulu } *$

4 ب

نعلم حسب الأسئلة السابقة أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

3 ب

لدينا φ دالة متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$.

إذن φ تقابل من المجال $[0, +\infty[$ نحو صورته $\varphi([0, +\infty[)$.

ولدينا : $\varphi([0, +\infty[) = [\varphi(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)[= [0, +\infty[$

إذن φ تقابل من المجال $[0, +\infty[$ نحو المجال $[0, +\infty[$.

و هذا يعني حسب تعريف التقابل :

$$(\forall y \in [0, +\infty[), (\exists ! x \in [0, +\infty[) ; \varphi(x) = y$$

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

إذن : $n \in [0, +\infty[$ لأن $n \in \mathbb{N} \subset [0, +\infty[$

إذن يوجد عنصر وحيد نرسم له ب α_n في المجال $[0, +\infty[$

بحيث : $\varphi(\alpha_n) = n$

أو بتعبير آخر : المعادلة $\varphi(x) = n$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا

و هو α_n في المجال $[0, +\infty[$ و ذلك কিما كان n من \mathbb{N} .

أو بتعبير أخير : $(\exists ! \alpha_n \geq 0) ; \varphi(\alpha_n) = n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

3 ج

رأينا حسب السؤال ب) أن : $\alpha_n \geq 0$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

إذن $F(\alpha_n) \geq F(0)$ لأن F تزايدية على المجال $[0, +\infty[$.

يعني أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; F(\alpha_n) \geq 0$ (1)

و نعلم أن : $\varphi(x) = x - F(x)$; $(\forall x \geq 0)$

إذن : $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$ لأن $\alpha_n \geq 0$

يعني : $F(\alpha_n) = \alpha_n - \varphi(\alpha_n)$ (2)

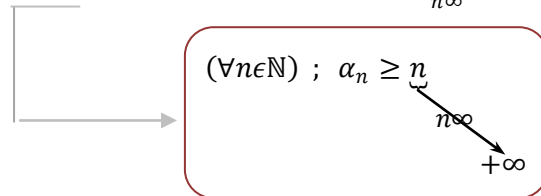
بدمج (1) و (2) نحصل على : $\alpha_n - \varphi(\alpha_n) \geq 0$

يعني : $\alpha_n \geq \varphi(\alpha_n)$

و نعلم أن : $\varphi(\alpha_n) = n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

إذن : $\alpha_n \geq n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

نلاحظ أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ إذن نحصل على الوضعية التالية :



إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = +\infty$

4 أ

الطريقة الأولى : استعمال الرتبة

في البداية سوف نبين أن : $\forall x \in [1, +\infty[; xf(x) < F(x)$

ثم بعد ذلك نعتبر الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = \frac{F(x)}{x}$

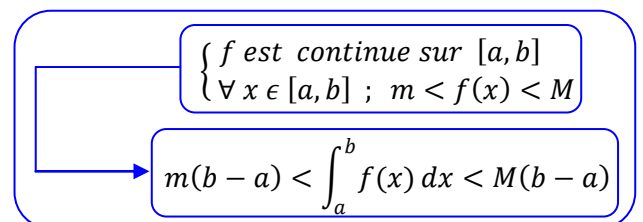
نبين أن هذه الدالة g تناقصية على $[1, +\infty[$ و ذلك عن طريق تحديد

إشارة مشتقتها الأولى $g'(x)$. ثم نستغل هذه الرتبة لإظهار المتفاوتة

المطلوبة . (let's get back to work now)

لنبين أن : $\forall x \in [1, +\infty[; xf(x) < F(x)$

من أجل ذلك سوف نستعمل الخاصية التالية :



لدينا : $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \ln(\arctan(x))$

إذن :

$$f'(x) = \frac{(\arctan(x))'}{\arctan(x)} = \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{\arctan(x)} = \frac{1}{(1+x^2)\arctan(x)}$$

إذن بالرجوع إلى المتساوية (**): نجد :

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = \frac{1}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

يعني :

$$\ln(\arctan(n+1)) - \ln(\arctan(n)) = \frac{1}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

يعني :

$$\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1)) = \frac{-1}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم n^2 نجد :

$$n^2[\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))] = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

$$v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)} \quad \text{و باستعمال نتيجة السؤال (1) نجد :}$$

خلاصة :

$$(\forall n \geq 1), (\exists c \in]n; n+1[) ; v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$$



لدينا : $n < c < n+1$

ندخل الدالة \arctan على هذا التأيير و علما أنها تزايدية قطعا على \mathbb{R} نجد :

$$(1) \arctan(n) < \arctan(c) < \arctan(n+1)$$

و لدينا كذلك : $n < c < n+1$

$$(2) (1+n^2) < (1+c^2) < 1+(n+1)^2$$

نضرب التأييرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$(1+n^2)\arctan(n) < (1+c^2)\arctan(c) < (1+(n+1)^2)\arctan(n+1)$$

ندخل على هذا التأيير دالة المقلوب نجد :

$$\frac{1}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)} < \frac{1}{(1+c^2)\arctan(c)} < \frac{1}{(1+n^2)\arctan(n)}$$

و نضرب أطرف هذا التأيير في العدد السالب قطعا $-n^2$ نجد :

$$\frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)} < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$$

و نستغل بعد ذلك نتيجة السؤال (2) نجد :

$$\frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F(n)}{n} + f(n) \right) = 0 \quad \text{إذن :}$$

و منه فإن التأيير (*) يُصبح :

$$(\forall n \geq 1) ; 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $n \rightarrow \infty \quad \quad \quad n \rightarrow \infty$
 $0 \quad \quad \quad 0$

و منه حسب مصاديق التقارب نستنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = 0$ (■)

من جهة أخرى نعلم أن : $(\forall x \geq 0) ; \varphi(x) = x - F(x)$

لدينا $\alpha_n \geq 0$ إذن $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$

و نعلم كذلك أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \varphi(\alpha_n) = n$

إذن : $n = \alpha_n - F(\alpha_n)$ يعني : $F(\alpha_n) = \alpha_n - n$

$$\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \frac{\alpha_n - n}{\alpha_n} = 1 - \frac{n}{\alpha_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n}{\alpha_n} \right) \quad \text{يعني :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\alpha_n} \right) = 1 \quad \text{يعني :} \quad 0 = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\alpha_n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_n}{n} \right) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\alpha_n} \right)} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{و بالتالي :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_n}{n} \right) = 1 \quad \text{أي :}$$



ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $n \geq 1$

$$v_n = \ln(u_n) = \ln \left(\left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right)^{n^2} \right)$$

$$= n^2 \ln \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right)$$

$$= n^2 [\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))]$$



نعتبر f المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \ln(\arctan(x))$

لدينا حسب الخاصيات العامة لاتصال مركب الدالتين أن الدالة f متصلة

على $]0; +\infty[$ و كذلك f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

لأن \ln دالة قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و \arctan دالة قابلة

للاشتقاق على \mathbb{R} و $\mathbb{R} \subset]0; +\infty[$.

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية على الدالة f في أي مجال

محدود و يوجد ضمن $]0; +\infty[$

ليكن $n \geq 1$ و نختار المجال $[n; n+1]$.

إذن يوجد عدد حقيقي c من المجال $]n; n+1[$ بحيث :

$$(**) \quad \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c)$$

في البداية أذكركم بالنهايتين المهمتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = \frac{-\pi}{2}$$

لدينا : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{(1 + (n+1)^2) \arctan(n+1)}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n^2}{n^2 + 2n + 2} \right) \left(\frac{1}{\arctan(n+1)} \right) \\ &= (-1) \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{-2}{\pi} \end{aligned}$$

و لدينا كذلك : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{(1 + n^2) \arctan(n)}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n^2}{n^2 + 1} \right) \left(\frac{1}{\arctan(n)} \right) \\ &= (-1) \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{-2}{\pi} \end{aligned}$$

إذن التأيير (⊗) يُصبح :

$$\left(\frac{-n^2}{(1 + n^2) \arctan(n)} \right) < v_n < \left(\frac{-n^2}{(1 + (n+1)^2) \arctan(n+1)} \right)$$

$\begin{array}{ccc} \swarrow & & \swarrow \\ n \rightarrow \infty & & n \rightarrow \infty \\ \frac{-2}{\pi} & & \frac{-2}{\pi} \end{array}$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نجد : $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \frac{-2}{\pi}$

و لدينا $v_n = \ln(u_n)$ إذن : $u_n = e^{v_n}$

و منه : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{v_n} = e^{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \right)} = e^{\left(\frac{-2}{\pi} \right)}$

و بالتالي : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = e^{\left(\frac{-2}{\pi} \right)}$

سوف نستعمل البرهان بالخلف .

نفترض وجود x و y من \mathbb{Z} بحيث $a_n x + 31y = 1$

و ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ بحيث : $n \equiv 1 [30]$

إذن : $n = 30k + 1$; $(\exists k \in \mathbb{Z})$

نعلم أن 31 يقسم a_{30k+1} مهما يكن k من \mathbb{Z}

إذن 31 يقسم a_n لأن : $n = 30k + 1$

إذن : $a_n = 31k'$; $(\exists k' \in \mathbb{Z})$

نعوض إذن $a_n x + 31y = 1$ في المعادلة فنحصل على :

$$31k'x + 31y = 1$$

$$\Leftrightarrow 31(k'x + y) = 1$$

$$\Rightarrow 31 \text{ divide } 1, (car (k'x + y) \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \text{Absurde (contradiction)}$$

و بالتالي نستنتج من هذا التناقض ما يلي :

إذا كان $n \equiv 1 [30]$ فالمعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حولا في \mathbb{Z}^2

يكفي أن نبين أن E جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ وأن :

$$\forall M(a, b), M(c, d) \in E ; M(a, b) - M(c, d) \in E$$

E جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لأنه يضم مصفوفات مربعة من الرتبة 2 .

و هو غير فارغ لأنه بإمكاننا رصد عنصر واحد على الأقل و هو $M(0,0)$

لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصفوفتين من E .

$$\text{لدينا : } M(a, b) - M(c, d) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-c & a-b-c+d \\ b-d & a+b-c-d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a-c) & (a-c) - (b-d) \\ (b-d) & (a-c) + (b-d) \end{pmatrix}$$

$$= M((a-c); (b-d)) \in E$$

لأن : $(a-c) \in \mathbb{R}$ و $(b-d) \in \mathbb{R}$

نستنتج إذن أن $(E, +)$ زمرة جزئية من الزمرة التبادلية الأم $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +)$

و ذلك حسب الخاصية المميزة لزمرة جزئية .

$$J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin E$$

المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ليست عنصرا من المجموعة E .

لأنه لا وجود لعددتين حقيقيين a و b بحيث : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$

و التناقض الذي نحصل عليه هو أن : $1 - 0 = 2$

لكي يكون E جزءا مستقرا من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ يكفي أن نتحقق من أن :

$$\forall (A, B) \in E^2 ; A \times B \in E$$

مع كامل الأسف ، هذه الخاصية غير محققة دائما لأننا نتوفر على مثال

مضاد و هو المصفوفة $J = M(1,0) \in E$

و بتعبير آخر : لدينا $J \in E$ و $J \in E$ لكن $J \times J \notin E$

و بالتالي E جزء غير مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

أجوبة امتحان الدورة العادية 2014

يكفي أن نبين أن جميع الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي

31 و 331 لا تقسم كلا من العددين 31 و 331 .

الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 31 هي : 2 و 3 و 5 .

و نلاحظ أن هذه الأعداد لا تقسم العدد 31 . إذن عدد أولي .

الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 331 هي : 2 و 3 و 5

و 7 و 11 و 13 و 17 . و نلاحظ أن هذه الأعداد لا تقسم العدد 331 .

إذن عدد أولي .

خلاصة : $a_1 = 31$ و $a_2 = 331$ عدنان أوليان .

سوف نستعمل نظمة العد العشري و كذلك صيغة مجموع حدود متتابعة

من متتالية هندسية أساسها 10 . ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

لدينا : $a_n = \underbrace{333 \dots 31}_{n \text{ fois}}$

$$= 1 + 3(10^1 + 10^2 + \dots + 10^n)$$

$$= 3(10^0 + 10^1 + 10^2 + \dots + 10^n) + 1 - 3 \times 10^0$$

$$= 3 \left(\frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} \right) - 2 = \frac{10^{n+1} - 1}{3} - 2$$

$$\Rightarrow 3a_n + 7 = 3 \left(\frac{10^{n+1} - 1}{3} - 2 \right) + 7$$

$$= 10^{n+1} - 1 - 6 + 7$$

$$= 10^{n+1}$$

la conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 3a_n + 7 = 10^{n+1}$

ليكن k عنصرا من \mathbb{N} .

لدينا عدد أولي و نلاحظ أن العدد 10 لا يقسم العدد 31 .

إذن : $10 \wedge 31 = 1$ و 31 عدد أولي .

و منه حسب مبرهنة (Fermat) : $10^{31-1} \equiv 1 [31]$

$$\Rightarrow 10^{30} \equiv 1 [31]$$

$$\Rightarrow (10^{30})^k \equiv 1^k [31] ; (\forall k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow 10^{30k} \equiv 1 [31] ; (\forall k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow 10^{30k+2} \equiv 100 [31] \quad (1)$$

من جهة أخرى لدينا : $100 \equiv 7 [31]$ (2)

إذن من (1) و (2) نستنتج أن : $10^{30k+2} \equiv 7 [31]$

la conclusion : $(\forall k \in \mathbb{N}) ; 10^{30k+2} \equiv 7 [31]$

ليكن k عددا صحيحا طبيعيا . $a_{30k+1} = 1 + 3 \left(\frac{10^{30k+1+1} - 1}{10 - 1} \right) - 3$

$$\Leftrightarrow 3a_{30k+1} = 3 + 3 + 10^{30k+2} - 1 - 9 = 10^{30k+2} - 7$$

$$\Leftrightarrow 3a_{30k+1} = 10^{30k+2} - 7 \quad (*)$$

بما أن : $(\forall k \in \mathbb{N}) ; 10^{30k+2} - 7 \equiv 0 [31]$

فإن : $(\forall k \in \mathbb{N}) ; (10^{30k+2} - 7) \equiv 0 [31]$ (**)

إذن من (*) و (**) نستنتج أن : $3a_{30k+1} \equiv 0 [31]$

يعني أن العدد 31 يقسم الجداء $3a_{30k+1}$.

و بما أن $31 \wedge 3 = 1$ فإنه حسب Gauss نستنتج أن 31 يقسم a_{30k+1} .

التمرين الثاني

4

نعلم أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة. إذن \times توزيعي على $+$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
ومن \times توزيعي على $+$ في E لأن $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
لتكن A و B و C ثلاث مصفوفات من المجموعة E .

$$\begin{aligned} A * (B + C) &= A \times N \times (B + C) \\ &= A \times (N \times B + N \times C) \\ &= A \times N \times B + A \times N \times C \end{aligned}$$

و بالتالي: $\forall (A, B, C) \in E^3 ; A * (B + C) = A * B + A * C$
و بنفس الطريقة نبين المتساوية الثانية.

يعني: $\forall (A, B, C) \in E^3 ; (B + C) * A = B * A + C * A$
و بالتالي القانون * توزيعي بالنسبة للقانون +.

التمرين الثاني

5

$(E, +)$ زمرة تبادلية
 $(E^*, *)$ زمرة
يكون $(E, +, *)$ جسما إذا و فقط إذا كان: * توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E

و هذه الأشياء تم الحصول عليها من خلال النتائج السابقة. و لكي يكون $(E, +, *)$ تبادليا يكفي أن يكون * تبادليا في E .

لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصفوفتين من E . من جهة أولى لدينا:

$$\begin{aligned} M(a, b) * M(c, d) &= M(a, b) \times N \times M(c, d) \\ &= \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac-bd & ac-bd+ad+bc \\ ad+bc & ac-bd-ad-bc \end{pmatrix} \\ &= M((ac-bd); (bc+ad)) \end{aligned}$$

من جهة ثانية لدينا: $M(c, d) * M(a, b) = M(c, d) \times N \times M(a, b)$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac-bd & ac-bd+ad+bc \\ ad+bc & ac-bd-ad-bc \end{pmatrix} \\ &= M((ac-bd); (bc+ad)) \end{aligned}$$

و بالتالي: $\forall M(a, b), M(c, d) \in E ; M(a, b) * M(c, d) = M(c, d) * M(a, b)$

الخلاصة: $(E, +, *)$ جسم تبادلي.

التمرين الثالث

1

$$\begin{aligned} \Delta &= (-\sqrt{2} e^{i\theta})^2 - 4e^{2i\theta} \\ &= 2e^{2i\theta} - 4e^{2i\theta} \\ &= -2e^{2i\theta} \\ &= (\sqrt{2} i e^{i\theta})^2 \end{aligned}$$

التمرين الثالث

1

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} - \sqrt{2}ie^{i\theta}}{2} : \text{المعادلة تقبل حلين } z_1 \text{ و } z_2 \text{ معرفين بما يلي:} \\ &= \frac{\sqrt{2}e^{i\theta}(1-i)}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta} \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= e^{i\theta} \cdot e^{-\frac{i\pi}{4}} = e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

التمرين الثاني

3

لدينا φ تطبيق معرف بما يلي:
 $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
 $(a + ib) \rightarrow M(a, b)$

لكي يكون تشاكلا من (\mathbb{C}^*, \times) نحو $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), *)$ يكفي أن نبين أن:

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^* ; \varphi(z \times z') = \varphi(z) * \varphi(z')$$

ليكن $z = a + ib$ و $z' = c + id$ عددين عقديين غير منعدمين،
من جهة أولى لدينا:

$$\begin{aligned} \varphi(z) * \varphi(z') &= \varphi(a + ib) * \varphi(c + id) \\ &= M(a, b) * M(c, d) \\ &= M(a, b) \times N \times M(c, d) \\ &= \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ac-bd) & (ac-ad-bc-bd) \\ (bc+ad) & (bc-bd+ac+ad) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ac-bd) & (ac-bd) - (ad+bc) \\ (bc+ad) & (ac-bd) + (ad+bc) \end{pmatrix} \\ &= M((ac-bd); (bc+ad)) \in E \end{aligned}$$

لأن: $(ac-bd) \in \mathbb{R}$ و $(bc+ad) \in \mathbb{R}$
من جهة ثانية لدينا:

$$\begin{aligned} \varphi(z \times z') &= \varphi((a + ib) \times (c + id)) \\ &= \varphi((ac-bd) + i(ad+bc)) \\ &= M((ac-bd); (ad+bc)) \in E \end{aligned}$$

نستنتج أن: $\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2 ; \varphi(z \times z') = \varphi(z) * \varphi(z')$
و هذا يعني أن φ تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), *)$.

التمرين الثاني

3

لدينا: $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
 $(a + ib) \rightarrow M(a, b)$

لنبين أن φ تقابل من \mathbb{C}^* نحو E^* .
لتكن $M(a, b)$ مصفوفة من E^* .

و لنحل في \mathbb{C}^* المعادلة $\varphi(x + iy) = M(a, b)$ ذات المجهول $(x + iy)$.

$$\begin{pmatrix} x & x-y \\ y & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} : \text{يعني:}$$

إذن: $x = a$ و $y = b$.

و هذا يعني أن للمعادلة السابقة حلا وحيدا في \mathbb{C}^* و هو العدد العقدي الغير المنعدم $(a + ib)$. و بذلك نستنتج ما يلي:

$(\forall M(a, b) \in E^*, (\exists! (x + iy) \in \mathbb{C}^*) ; \varphi(x + iy) = M(a, b))$

و هذا يعني أن التطبيق φ تقابل من \mathbb{C}^* نحو E^* .

و بالتالي: $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

التمرين الثاني

3

نعلم أن $(\mathbb{C}, +, \times)$ جسم تبادلي. إذن (\mathbb{C}^*, \times) زمرة تبادلية.
و نعلم أن φ تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), *)$.

إذن صورة الزمرة التبادلية (\mathbb{C}^*, \times) هي الزمرة التبادلية $(\varphi(\mathbb{C}^*), *)$
و نعلم أن: $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$. إذن $(E^*, *)$ زمرة تبادلية.

$$\Leftrightarrow z' = iz + \sqrt{2} e^{i\theta}$$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن الصيغة العقدية للدوران r . يعني:

$$r : (\mathcal{P}) \rightarrow (\mathcal{P}) \\ M(z) \rightarrow M'(\sqrt{2} e^{i\theta} + iz)$$

ب لدينا $r(I) = B$:

$$\Leftrightarrow z_B = \sqrt{2} e^{i\theta} + iz_I \\ \Leftrightarrow b = \sqrt{2} e^{i\theta} + i$$

التمرين الثالث

$$\frac{z_B - z_A}{z_I - z_J} = \frac{\sqrt{2} e^{i\theta} + i - \sqrt{2} e^{i\theta}}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} i \in i\mathbb{R} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_I - z_J}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow (\overline{JI}, \overline{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow (IJ) \perp (AB)$$

التمرين الثالث

لدينا C هي صورة A بالإزاحة ذات المتجهة $-\vec{v}$. إذن نكتب:

$$\overline{AC} = -\vec{v} \Leftrightarrow aff(\overline{AC}) = aff(-\vec{v})$$

$$\Leftrightarrow z_C - z_A = -i$$

$$\Leftrightarrow z_C = z_A + i$$

$$\Leftrightarrow z_C = \sqrt{2} e^{i\theta} - i$$

التمرين الثالث

$$\frac{z_B + z_C}{2} = \frac{\sqrt{2} e^{i\theta} + i + \sqrt{2} e^{i\theta} - i}{2} \quad \text{لدينا :} \\ = \frac{2\sqrt{2} e^{i\theta}}{2} = \sqrt{2} e^{i\theta} = z_A$$

$$z_A = \frac{z_B + z_C}{2} \quad \text{إذن :}$$

و بالتالي A هي منتصف القطعة $[BC]$.

التمرين الرابع

ندرس أولا الإتصال على المجال $]0; +\infty[$.

$$\text{لدينا : } f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2} \quad (\forall x > 0)$$

ليكن x عنصرا من المجال $]0; +\infty[$.

لدينا الدالة $x \rightarrow -x \ln x$ متصلة على \mathbb{R}_+^* .

لأنها عبارة عن جداء دالتين متصلتين على \mathbb{R}_+^* .

و لدينا الدالة $x \rightarrow 1 + x^2$ متصلة لأنها حدودية ذات معاملات حقيقية.

و لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (1 + x^2) \neq 0$

إذن الدالة $f : x \rightarrow \frac{-x \ln x}{1+x^2}$ متصلة على المجال $]0; +\infty[$

لأنها عبارة عن خارج دالتين متصلتين على المجال $]0; +\infty[$

و كذلك $(\forall x > 0) ; 1 + x^2 \neq 0$.

الإتصال على يمين الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x \ln x}{1+x^2} \quad \text{لدينا :} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-1}{1+x^2}\right) \\ = 0 \times (-1) = 0 = f(0)$$

إذن f متصلة على اليمين في الصفر.

$$z_2 = \frac{\sqrt{2} e^{i\theta} + \sqrt{2} i e^{i\theta}}{2} = \frac{\sqrt{2} e^{i\theta} (1+i)}{2} \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta} \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ = e^{i\theta} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}$$

التمرين الثالث

$$\frac{z_{T_1} - z_{T_2}}{z_A - z_O} = \frac{e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} - e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2} e^{i\theta} - 0} = \frac{e^{i\theta} (e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}})}{\sqrt{2} e^{i\theta}} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (2i \sin(\frac{\pi}{4}))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = i \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_{T_1} - z_{T_2}}{z_A - z_O}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow (OA) \perp (T_1 T_2)$$

$$\Rightarrow (\overline{OA}, \overline{T_2 T_1}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

التمرين الثالث

لدينا k منتصف القطعة $[T_1 T_2]$. إذن :

$$z_k = \frac{z_{T_1} + z_{T_2}}{2} = \frac{e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} + e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}}{2} \\ = \frac{e^{i\theta} (e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}})}{2} = \frac{e^{i\theta} (2 \cos(\frac{\pi}{4}))}{2} \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{z_k - z_O}{z_A - z_O} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta} - 0}{\sqrt{2} e^{i\theta} - 0} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{z_k - z_O}{z_A - z_O} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{Ok} = \frac{1}{2} \overline{OA}$$

$$\Rightarrow k \in [OA]$$

k و O نقط مستقيمة

التمرين الثالث

$(T_1 T_2) \perp (OA)$
من خلال ما سبق حصلنا على الأشياء التالية : k منتصف $[T_1 T_2]$
 $k \in [OA]$

إذن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1 T_2]$.

التمرين الثالث

ليكن r الدوران الذي مركزه T_1 و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$.

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى و $M'(z')$ صورتها بالدوران r .

$$r(M) = M' \Leftrightarrow (z_{M'} - z_{T_1}) = e^{i\frac{\pi}{2}} (z_M - z_{T_1}) \\ \Leftrightarrow (z' - e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}) = e^{i\frac{\pi}{2}} (z - e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}) \\ \Leftrightarrow z' = i (z - e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}) + e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} \\ \Leftrightarrow z' = iz + (1 - i) e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} \\ \Leftrightarrow z' = iz + \left(\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \Rightarrow \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = (-f(x))'$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x^2} \left(f'\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -f'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\alpha^2} \left(f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) = -f'(\alpha) \text{ car } \alpha > 0$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0 ; \text{ car } f'(\alpha) = 0$$

التمرين الرابع

ملاحظة: لدينا : $(\forall x \geq 0) ; F(x) = \int_0^x f(t) dt$ نلاحظ أن الدالة f متصلة فقط على المجال $]0; +\infty[$ و على يمين الصفر . و هذا كاف للبحث عن الدالة F . و نستطيع أن نكتب :

$$F(x) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^x f(t) dt ; \left(\text{si cette limite existe bien sûr} \right)$$

و هذا النوع من التكاملات يسمى :

Les intégrales impropres
Ou bien
Les intégrales généralisées

و أشهر هذه التكاملات هو : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

التمرين الرابع

يكفي أن نبين أن : $\frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2}$ و $\frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$ ($\forall t \geq 1$) ;

$$\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{1}{2} = \frac{2t^2 - 1 - t^2}{2(1+t^2)}$$

$$= \frac{t^2 - 1}{2(1+t^2)} = \frac{(t-1)(t+1)}{2(1+t^2)}$$

نلاحظ أن : $(\forall t \geq 1) ; (t-1) \geq 0$

إذن : $(\forall t \geq 1) ; \frac{(t-1)(t+1)}{2(1+t^2)} \geq 0$

يعني : $(\forall t \geq 1) ; \frac{t^2}{1+t^2} - \frac{1}{2} \geq 0$

يعني : $(\forall t \geq 1) ; \frac{t^2}{1+t^2} \geq \frac{1}{2}$

و بنفس الطريقة لدينا : $1 - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1+t^2-t^2}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}$

نلاحظ أن : $(\forall t \geq 1) ; \frac{1}{1+t^2} \geq 0$

إذن : $(\forall t \geq 1) ; 1 - \frac{t^2}{1+t^2} \geq 0$

يعني : $(\forall t \geq 1) ; 1 \geq \frac{t^2}{1+t^2}$

الخلاصة : $(\forall t \geq 1) ; 1 \geq \frac{t^2}{1+t^2} \geq \frac{1}{2}$

التمرين الرابع

ب 1 I

لدينا : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f(x) = \left(\frac{-x}{1+x^2}\right) \ln x$

نلاحظ أن : $(\forall x \geq 0) ; \left(\frac{-x}{1+x^2}\right) \leq 0$

إذن إشارة $f(x)$ على $]0; +\infty[$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $\ln x$.

إذا كان : $x = 1$: فإن $\ln x = 0$

إذا كان : $x > 1$: فإن $\ln x > 0$

إذا كان : $x < 1$: فإن $\ln x < 0$

x	0	1	+	∞
f(x)	0	+	0	-

التمرين الرابع

أ 2 I

ليكن x عنصرا من المجال $]0; +\infty[$.

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x} (-\ln x)$$

$$= \frac{-1}{x} \ln x \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \frac{x \ln x}{1+x^2} = -f(x)$$

و بالتالي : $(\forall x > 0) ; f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

التمرين الرابع

ب 2 I

لدينا الدالة $t \ln t \rightarrow t$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$.

و لدينا $t \rightarrow 1+t^2$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

لأنها حدودية ذات معاملات حقيقية .

إذن : $f : t \rightarrow \frac{-t \ln t}{1+t^2}$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

باعتبارها خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$.

مع : $(\forall t > 0) ; 1+t^2 \neq 0$.

التمرين الرابع

ج 2 I

لدينا f دالة متصلة على $[0, +\infty[$. إذن فهي متصلة على $[0, 1]$.

و لدينا f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$.

إذن فهي قابلة للاشتقاق على المجال $]0; 1[$.

و منه حسب ميرهنة التزايد المتناهية :

$$\exists \alpha \in]0, 1[; \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(\alpha)$$

$\Rightarrow \exists \alpha \in]0, 1[; f'(\alpha) = 0$ car $f(1) - f(0) = 0$

التمرين الرابع

د 2 I

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعيا . لدينا : $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$

نلاحظ أن الدالتين f و $x \rightarrow \frac{1}{x}$ قابلتين للاشتقاق على $]0; +\infty[$.

إذن : $x \rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$.

و كذلك $x \rightarrow -f(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

إذن نستطيع اشتقاق الدالتين $f\left(\frac{1}{x}\right)$ و $-f(x)$ من أجل $x > 0$.

ليكن $t \geq 1$ و $x \geq 1$
 نطلق من التطاير التالي : $\frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$

نضرب جميع الأطراف في العدد الموجب $\frac{\ln t}{t}$ نحصل على :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t}{t} \right) \leq \left(\frac{t^2}{1+t^2} \right) \frac{\ln t}{t} \leq \frac{\ln t}{t}$$

ندخل التكامل $\int_1^x dt$ على هذه الدوال المتصلة و $1 \leq x$ نجد :

$$\frac{1}{2} \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt \leq \int_1^x \left(\frac{t^2}{1+t^2} \right) \frac{\ln t}{t} dt \leq \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt$$

لنحسب الآن التكامل التالي : $\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt$ وذلك باستعمال مكاملة بالأجزاء .

$$\begin{aligned} \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt &= \int_1^x (\ln t)' (\ln t) dt \\ &= [(\ln t)^2]_1^x - \int_1^x (\ln t)(\ln t)' dt \\ &= (\ln x)^2 - \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt = (\ln x)^2 - \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt$$

$$\Rightarrow 2 \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt = (\ln x)^2$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

نعود إلى آخر تطاير حصلنا عليه فنكتب :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{(\ln x)^2}{2} \right) \leq \int_1^x \left(\frac{t^2}{1+t^2} \right) \frac{\ln t}{t} dt \leq \frac{(\ln x)^2}{2}$$

نضرب جميع الأطراف في العدد -1 ثم نضيف الكمية $F(1)$ إلى جميع الأطراف نجد :

$$\begin{aligned} F(1) - \frac{(\ln x)^2}{2} &\leq F(1) - \int_1^x \left(\frac{t^2}{1+t^2} \right) \frac{\ln t}{t} dt \leq \\ &\leq F(1) - \frac{(\ln x)^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(1) - \frac{(\ln x)^2}{2} &\leq \int_0^1 f(t) dt - \int_1^x -f(t) dt \leq \\ &\leq F(1) - \frac{(\ln x)^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(1) - \frac{(\ln x)^2}{2} &\leq \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \leq \\ &\leq F(1) - \frac{(\ln x)^2}{4} \end{aligned}$$

$$F(1) - \frac{(\ln x)^2}{2} \leq \int_0^x f(t) dt \leq F(1) - \frac{(\ln x)^2}{4}$$

$$F(1) - \frac{(\ln x)^2}{2} \leq F(x) \leq F(1) - \frac{(\ln x)^2}{4}$$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(F(1) - \frac{(\ln x)^2}{4} \right) = -\infty$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

cette quantité é tend vers -∞ lorsque x tend vers +∞

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$: إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب نكتب :

$$F(1) - \frac{(\ln x)^2}{2} \leq F(x) \leq F(1) - \frac{(\ln x)^2}{4}$$

نضرب جميع الأطراف في العدد الموجب $\frac{1}{x}$ نحصل على :

$$\frac{F(1)}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{(\ln x)^2}{x} \right) \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{4} \left(\frac{(\ln x)^2}{x} \right)$$

لنحسب النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\ln x)^2}{x} \right)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\ln x)^2}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\ln \sqrt{x^2})^2}{(\sqrt{x})^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) = 4 \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln y}{y} \right) \\ &= 4 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\frac{F(1)}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{(\ln x)^2}{x} \right) \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{4} \left(\frac{(\ln x)^2}{x} \right)$$

tend vers 0 lorsque x tend vers +∞

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$: نستنتج إذن أن

و من النهايتين (1) و (2) نستنتج أن (C) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور الأفصائل بجوار $+\infty$.

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I وكان a عنصرا من I

فإن الدالة :

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال I و التي تنعدم في a .

لدينا $F : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow \int_0^x f(t) dt$ هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f

على المجال $[0; +\infty[$ و التي تنعدم في 0

و ذلك لأن f دالة متصلة على المجال $[0; +\infty[$ و $0 \in [0; +\infty[$

إذن F قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ و مشتقتها على هذا المجال هي الدالة f .

يعني : $\forall x \in [0; +\infty[; F'(x) = f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2}$

التمرين الرابع

III 1 ج

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعيا. $(t \geq 0) \Rightarrow f(t) \leq \frac{1}{e}$
 $\Rightarrow \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x \frac{1}{e} dt$ car : $\begin{cases} 0 \leq x \\ et f \leq \frac{1}{e} \\ sont continues \end{cases}$
 $\Rightarrow F(x) \leq \frac{1}{e}x$
 $\Rightarrow F(x) \leq \frac{1}{e}x < x$; car $x > 0$
 $\Rightarrow F(x) < x$; $\forall x > 0$

و بالتالي : $(\forall x > 0) ; F(x) < x$

التمرين الرابع

III 2 ا

سوف نستعمل البرهان بالترجع .
 نعتبر العبارة (P_n) التالية : $u_n \in]0,1[$
 من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 \in]0,1[$
 إذن العبارة (P_0) صحيحة .
 ليكن n عنصرا من \mathbb{N} ونفترض أن (P_n) صحيحة .

$(P_n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n \in]0,1[$
 $\Rightarrow 0 < u_n < 1$
 $\Rightarrow F(0) < F(u_n) < F(1)$
 لم يتغير الترتيب لأن F تزايدية على المجال $[0,1]$
 $\Rightarrow 0 < F(u_n) < F(1)$
 $\Rightarrow 0 < u_{n+1} < F(1)$
 $\Rightarrow 0 < u_{n+1} < F(1) < 1$
 car $F(x) < x$; $\forall x > 0$
 $\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$
 $\Rightarrow u_{n+1} \in]0,1[$
 $\Rightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie}$

و بالتالي نحصل على الوضعية التالية : $(P_0) \text{ est vraie}$
 $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; (\forall n \in \mathbb{N})$
 إذن حسب مبدأ التراجع نستنتج أن : $(P_n) \text{ est vraie} ; (\forall n \in \mathbb{N})$
 يعني : $u_n \in]0,1[; (\forall n \in \mathbb{N})$

التمرين الرابع

III 2 ب

لدينا : $(\forall x > 0) ; F(x) < x$ (*)

و كذلك ، لدينا لكل n من \mathbb{N} : $u_n \in]0,1[$
 يعني أن : $u_n > 0 ; (\forall n \in \mathbb{N})$
 نستطيع إذن تعويض x بـ u_n في الكتابة (*) . نحصل على :

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; F(u_n) < u_n$
 يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$
 إذن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .
 و بما أنها مصغرة بـ 0 ($u_n > 0$) فهي متقاربة .

التمرين الرابع

III 2 ج

لدينا $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية ترجعية معرفة بما يلي : $u_{n+1} = F(u_n)$
 و لدينا دالة متصلة على المجال $[0; +\infty[$.
 و كذلك $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة . إذن نهايتها تحقق : $F(l) = l$
 من جهة أخرى لدينا : $(\forall x > 0) ; F(x) < x$
 و كذلك $F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$
 إذن الحل الوحيد للمعادلة $F(l) = l$ هو الصفر . و بالتالي : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0$

التمرين الرابع

III 2 ب

$(\forall x \geq 0) ; F'(x) = f(x)$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	0	+	-
F	0	$F(1)$	$-\infty$

التمرين الرابع

III 1 ا

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي :

$(\forall t > 0) ; \varphi(t) = \frac{1}{e} + t \ln t$

نلاحظ أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$.
 باعتبارها مجموع دوال قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$.
 و لدينا : $(\forall t > 0) ; \varphi'(t) = 1 + \ln t$

$t = \frac{1}{e} \Rightarrow \varphi'(t) = 0$
 $t > \frac{1}{e} \Rightarrow \varphi'(t) > 0$
 $t < \frac{1}{e} \Rightarrow \varphi'(t) < 0$

t	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$\varphi'(t)$		-	+
φ	$\frac{1}{e}$	0	$+\infty$

نلاحظ أن 0 قيمة دنوية للدالة φ على المجال $]0; +\infty[$.
 يعني : $(\forall t > 0) ; \varphi(t) \geq 0$
 و منه : $(\forall t > 0) ; \frac{1}{e} \geq -t \ln t$

التمرين الرابع

III 1 ب

ليكن t عنصرا من المجال $]0; +\infty[$. لدينا : $-t \ln t \leq \frac{1}{e}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $\frac{1}{1+t^2}$ نجد :

$$\frac{-t \ln t}{1+t^2} \leq \frac{1}{e} \left(\frac{1}{1+t^2} \right)$$

و بما أن : $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$

فان : $(\forall t > 0) ; \frac{-t \ln t}{1+t^2} \leq \frac{1}{e} \left(\frac{1}{1+t^2} \right) \leq \frac{1}{e}$

و من أجل $t = 0$ لدينا : $f(0) = 0 < \frac{1}{e}$

إذن : $(\forall t \geq 0) ; f(t) = \frac{1}{e}$

الطريقة الثانية : (la réponse universitaire) :

$$\begin{aligned}
 L(x) &= \int_0^x g(t) dt ; x \text{ fixé} \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^x g(t) dt ; x \text{ fixé} \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^x \left(\frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \right) dt ; x \text{ fixé} \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^x \left(e^{-\frac{1}{t}} \right)' dt ; x \text{ fixé} \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[e^{-\frac{1}{t}} \right]_a^x ; x \text{ fixé} \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(e^{-\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{a}} \right) ; x \text{ fixé} \\
 &= e^{-\frac{1}{x}} - \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(e^{-\frac{1}{a}} \right) ; x \text{ fixé} \\
 &= e^{-\frac{1}{x}} - \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u ; x \text{ fixé} \\
 &= e^{-\frac{1}{x}} - \lim_{u = -\frac{1}{x}} e^u ; x \text{ fixé} \\
 &= e^{-\frac{1}{x}} ; x \text{ fixé}
 \end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall x > 0) ; L(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

التمرين الخامس

ب 2

لدينا : $(\forall x > 0) ; L(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

الدالة L عبارة عن مُركب دالتين متصلتين φ و ψ المعرفتين بما يلي :

$$\begin{aligned}
 \varphi : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\rightarrow \frac{-1}{x}
 \end{aligned}
 \quad \text{و} \quad
 \begin{aligned}
 \psi : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\rightarrow e^x
 \end{aligned}$$

نلاحظ أن جل صور عناصر \mathbb{R}^* بالدالة φ تقبل صوراً بالدالة ψ أو بتعبير آخر $\varphi(\mathbb{R}^*) \subseteq \mathbb{R}$.
 إذن الدالة $e^{-\frac{1}{x}} : x \rightarrow e^{-\frac{1}{x}}$ متصلة على المجال $]0; +\infty[$.

التمرين الخامس

ج 2

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$

التمرين الخامس

أ 1

$$\begin{aligned}
 v : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\rightarrow e^x
 \end{aligned}
 \quad \text{و} \quad
 \begin{aligned}
 u : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\rightarrow -\frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

لدينا u دالة متصلة على \mathbb{R}^* . ولدينا v دالة متصلة على \mathbb{R} .
 إذن الدالة $v \circ u$ متصلة على \mathbb{R}^*
 وذلك لأن جل صور عناصر \mathbb{R}^* بالدالة u تقبل صوراً بالدالة v
 $(u(\mathbb{R}^*) \subseteq \mathbb{R})$

إذن الدالة $x \rightarrow e^{-\frac{1}{x}}$ متصلة على $]0; +\infty[$

و نعلم أن : $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$ متصلة على المجال $]0; +\infty[$.

إذن الدالة $x \rightarrow \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ متصلة على المجال $]0; +\infty[$.

لأنها عبارة عن جداء دالتين متصلتين على المجال $]0; +\infty[$.

التمرين الخامس

ب 1

لدينا :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{2x} e^{-\frac{1}{2x}} \right)^2 = 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2x} e^{-\frac{1}{2x}} \right)^2 \\
 &= 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^t} \right)^2 = 4 \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u} \right)^2 \\
 &= 4 \lim_{t = \frac{1}{2x}} \left(\frac{1}{e^t} \right)^2 = 4 \lim_{u = \frac{e^x}{x}} \left(\frac{1}{u} \right)^2 \\
 &= 0 = g(0)
 \end{aligned}$$

إذن الدالة g متصلة على اليمين في الصفر .

التمرين الخامس

ج 1

لدينا :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{2x} e^{-\frac{1}{2x}} \right)^2 = 4 \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{2x} e^{-\frac{1}{2x}} \right)^2 \\
 &= 4 \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^u} \right)^2 = 4 \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{t} \right)^2 \\
 &= 4 \lim_{u = \frac{1}{2x}} \left(\frac{1}{e^u} \right)^2 = 4 \lim_{t = \frac{e^u}{u}} \left(\frac{1}{t} \right)^2 \\
 &= +\infty \neq g(0)
 \end{aligned}$$

إذن الدالة g غير متصلة على يسار الصفر .

و بالتالي g غير متصلة في الصفر .

لكن هذا لا يمنع من وجود الدالة L المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي :

$$L(x) = \int_0^x g(t) dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^x g(t) dt$$

(Si cette limite existe bien sûr)

التمرين الخامس

أ 2

لنحسب $L(x)$ لكل x من \mathbb{R}_+

و من أجل ذلك أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى : (la réponse triviale) :

$$\begin{aligned}
 L(x) &= \int_0^x g(t) dt = \int_0^x \left(\frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \right) dt = \int_0^x \left(e^{-\frac{1}{t}} \right)' dt \\
 &= \int_0^x (t^2 g(t))' dt = [t^2 g(t)]_0^x \\
 &= x^2 g(x) - 0^2 g(0) \\
 &= x^2 g(x) = e^{-\frac{1}{x}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= n \left(\left(\frac{1}{1} \right)^2 e^{-\frac{n}{1}} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 e^{-\frac{n}{2}} + \dots + \left(\frac{1}{n-1} \right)^2 e^{-\frac{n}{n-1}} \right) \\
&= \frac{n^2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} \right)^2 e^{-\frac{n}{k}} ; n \geq 1 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n}{k} \right)^2 e^{-\frac{n}{k}} ; n \geq 1 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{k}{n} \right)^2} e^{-\frac{1}{\left(\frac{k}{n} \right)}} ; n \geq 1 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) ; n \geq 1 \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) + \underbrace{g\left(\frac{0}{n}\right)}_{=0} \right) ; n \geq 1 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) ; n \geq 1
\end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall n \geq 1) ; S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ فإن المتتالية :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) ; n \geq 1 \\
&\text{مقاربة و نهايتها هي التكامل } \int_a^b f(t) dt . \\
\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) &= \int_a^b f(t) dt \text{ : أو بتعبير آخر}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \text{ لدينا في هذا التمرين :} \\
&= \frac{(1-0)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(0 + \frac{k(1-0)}{n}\right)
\end{aligned}$$

و بما أن g متصلة على المجال $[0,1]$ حسب الافتراض . فإنه حسب الخاصية المذكورة نستنتج أن المتتالية $(S_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و تؤول إلى $\int_0^1 g(t) dt$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = \int_0^1 g(t) dt = L(1) = \frac{1}{e} \text{ : أو بتعبير آخر}$$

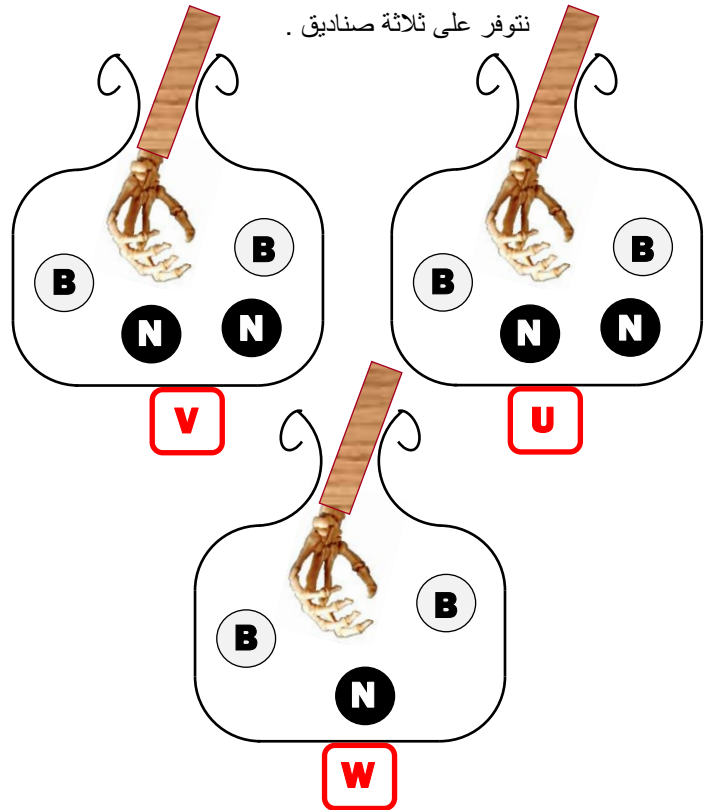
و بالتالي : $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = \frac{1}{e}$

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2014

التمرين الأول

1

نتوفر على ثلاثة صناديق .



السحب الآتي من هذه الصناديق يُحتم علينا استعمال التآليفات C_n^k في جل مراحل التمرين .

نحن أمام تجربة عشوائية تتساوى فيها احتمالات الأحداث الابتدائية .
لأننا بصدد سحب عشوائي من صناديق تحتوي على كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس . و بذلك يكون احتمال أي حدث مساويا لخارج عدد امكانيات حدوثه على العدد الإجمالي للحالات الممكنة للتجربة المطروحة .

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} ; \forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ يعني :}$$

نعتبر الحدث التالي : $A = \{ \text{يتم السحب من الصندوق } U \}$
الحصول على كرة بيضاء عندما نسحب كرة من الصندوق W
عندما نسحب عشوائيا كرة من الصندوق W الذي يحتوي على ثلاث كرات فإنه توجد C_3^1 نتيجة ممكنة لهذه التجربة العشوائية .

يعني : $\text{card}(\Omega_1) = C_3^1 = 3$ بحيث Ω_1 هو كون امكانيات هذه التجربة العشوائية الأولى (سحب كرة من W) .

$$\text{إذن : } p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega_1)} = \frac{C_2^1}{C_3^1} = \frac{2}{3}$$

إذن احتمال أن يتم السحب من الصندوق U يساوي $\frac{2}{3}$.

Autrement-dit, on a deux chances sur trois de tirer une boule blanche de l'urne W

التمرين الأول

1

نعتبر الأحداث التالية : $B_1 = \{ \text{نسحب الكرتين من الصندوق } U \}$
 $= \{ \text{سحب كرة بيضاء من } W \}$

$N_1 = \{ \text{نسحب الكرتين من الصندوق } V \}$
 $= \{ \text{سحب كرة بيضاء من } W \}$

$G = \{ \text{سحب كرتين بيضاوين في نهاية التجربة } \}$

$$\begin{aligned} p(G) &= p(G \cap B_1) + p(G \cap N_1) \\ &= p(B_1) \times p(G/B_1) + p(N_1) \times p(G/N_1) \\ &= \left(\frac{C_2^1}{C_3^1} \right) \times \left(\frac{C_3^2}{C_5^2} \right) + \left(\frac{C_1^1}{C_3^1} \right) \times \left(\frac{C_2^2}{C_5^2} \right) \\ &= \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{10} \right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{10} \right) = \frac{7}{30} \end{aligned}$$

إذن احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة هو $\frac{7}{30}$.

Autrement-dit, on a sept chances sur 30 pour obtenir vers la fin du jeu deux boules blanches

التمرين الأول

3

نرمز بـ Ω لكون امكانيات التجربة العشوائية المنصوص عليها في التمرين بأكمله .

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X التطبيق P_X المعروف بما يلي :

$$\begin{aligned} P_X : X(\Omega) &\rightarrow [0; 1] \\ k &\rightarrow P_X(k) = p[X = k] \end{aligned}$$

لنحدد أولا المجموعة $X(\Omega)$.

X هو المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المحصل عليها في نهاية التجربة .

في نهاية التجربة يمكن الحصول على :

- كرة بيضاء واحدة و أخرى سوداء .
- كرتين بيضاوين .
- كرتين سوداوين .

إذن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 0 و 1 و 2 .

أو بتعبير آخر : $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

لنحسب إذن احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي X

لنحسب : $p[X = 0]$

الحدث $[X = 0]$ هو الحصول على كرتين سوداوين في نهاية التجربة .

إذن : $p[X = 0] = p(NN)$

$$\begin{aligned} p[X = 0] &= p(NN \cap N_1) + p(NN \cap B_1) \\ &= p(N_1) \times p(NN/N_1) + p(B_1) \times p(NN/B_1) \\ &= \left(\frac{C_1^1}{C_3^1} \right) \times \left(\frac{C_3^2}{C_5^2} \right) + \left(\frac{C_2^1}{C_3^1} \right) \times \left(\frac{C_2^2}{C_5^2} \right) \\ &= \left(\frac{C_1^1}{C_3^1} \right) \times \left(\frac{C_3^2}{C_5^2} \right) + \left(\frac{C_2^1}{C_3^1} \right) \times \left(\frac{C_2^2}{C_5^2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{10} \right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{10} \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

لنحسب : $p[X = 1]$

الحدث $[X = 1]$ هو الحصول على كرة بيضاء واحدة و أخرى سوداء في نهاية التجربة .

إذن : $p[X = 1] = p(BN)$

$$\begin{aligned} p[X = 1] &= p(BN \cap B_1) + p(BN \cap N_1) \\ &= p(B_1) \times p(BN/B_1) + p(N_1) \times p(BN/N_1) \\ &= \left(\frac{C_2^1}{C_3^1} \right) \times \left(\frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} \right) + \left(\frac{C_1^1}{C_3^1} \right) \times \left(\frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} \right) \\ &= \frac{2}{3} \times \left(\frac{3 \times 2}{10} \right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{3 \times 2}{10} \right) = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

التمرين الثاني

2

وجود زوج (x_n, y_n) من \mathbb{Z}^2 بحيث $b_n \cdot x_n + c_n \cdot y_n = 1$ مكفول و مضمون بنص مبرهنة Bezout .
تذكير بمبرهنة Bezout :

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} ; au + bv = 1$$

لنبحث الآن عن x_n و y_n .

لدينا : $c_n = 2 \cdot 10^n - 1$

إذن : $(1) \quad 2 \cdot 10^n - c_n = 1$

و لدينا : $(2) \quad 2 = b_n - c_n$

نعوض 2 بـ $(b_n - c_n)$ في المتساوية (1) نجد : $(b_n - c_n)10^n - c_n = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow b_n \cdot 10^n - c_n \cdot 10^n - c_n &= 1 \\ \Rightarrow b_n \cdot 10^n + c_n \cdot (-10^n - 1) &= 1 \\ \Rightarrow b_n \cdot x_n + c_n \cdot y_n &= 1 \end{aligned}$$

avec : $\begin{cases} x_n = 10^n \\ y_n = -(10^n + 1) \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

التمرين الثالث

1 I

لنبين أن : $\forall (a, b) \in J^2 ; 1 + ab > 0$ من أجل ذلك أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى : ليكن a و b عنصرين J .

$$\begin{aligned} (a, b) \in J^2 &\Rightarrow \begin{cases} -1 < a < 1 \\ -1 < b < 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} |a| < 1 \\ |b| < 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow |ab| < 1 \\ &\Rightarrow -1 < ab < 1 \\ &\Rightarrow -1 < ab \\ &\Rightarrow ab + 1 > 0 \end{aligned}$$

الطريقة الثانية : ليكن a و b عنصرين J . ن فصل بين ثلاث حالات :

إذا كان a موجب و b موجب

إذن : $ab \geq 0 > -1$ يعني : $ab + 1 > 0$

إذا كان a سالب و b سالب

إذن : $ab \geq 0 > -1$ يعني : $ab + 1 > 0$

إذا كان أحدهما موجب و الآخر سالب

ليكن مثلا $-1 < a \leq 0$ و $0 \leq b < 1$.

إذن : $0 \leq -a < 1$ و $0 \leq b < 1$.

عند المرور إلى الجداء نجد : $0 \leq -ab < 1$.

يعني : $-ab < 1$ أي : $ab + 1 > 0$

و بالتالي : $\forall (a, b) \in J^2 ; ab + 1 > 0$

الآن سوف نستنتج أن * قانون تركيب داخلي في J .

من أجل ذلك يكفي أن نبين أن : $\forall (a, b) \in J^2 ; a * b \in J$

ليكن a و b عنصرين من J .

$$\begin{aligned} (a, b) \in J^2 &\Rightarrow \begin{cases} a < 1 \\ b < 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (1 - a) < 0 \\ (1 - b) < 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow (1 - a)(1 - b) > 0 \\ &\Rightarrow 1 - (a + b) + ab > 0 \\ &\Rightarrow 1 + ab > (a + b) \\ &\Rightarrow \frac{1 + ab}{1 + ab} > \frac{a + b}{1 + ab} ; \text{car} \left(\frac{1}{1 + ab} \right) > 0 \\ &\Rightarrow 1 > a * b \quad (1) \end{aligned}$$

لنحسب : $p[X = 2]$

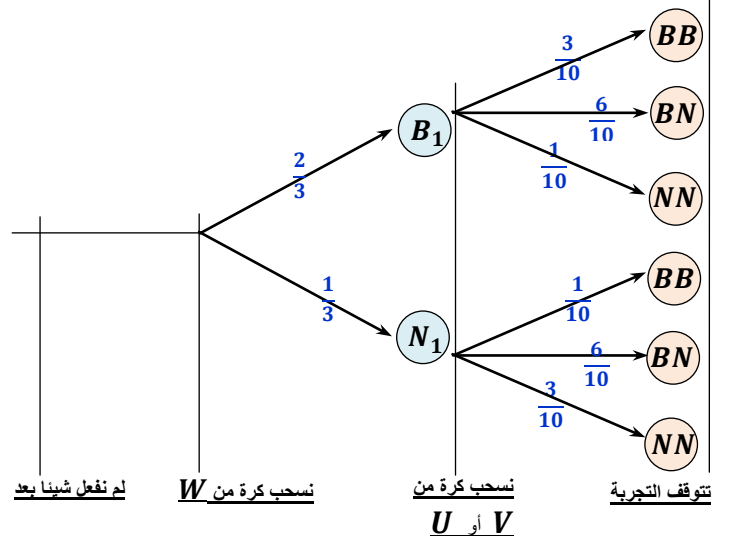
الحدث $[X = 2]$ هو الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة . و نلاحظ أنه قد تم حسابه من خلال السؤال (2) .

ولدينا : $p[X = 2] = p(BB) = \frac{7}{30}$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بـ :

$$\begin{aligned} P_X : \{0, 1, 2\} &\rightarrow [0; 1] \\ 0 &\rightarrow P_X(0) = \frac{1}{6} \\ 1 &\rightarrow P_X(1) = \frac{3}{5} \\ 2 &\rightarrow P_X(2) = \frac{7}{30} \end{aligned}$$

إضافة : يمكن نمذجة هذا التمرين باستعمال شجرة الاحتمالات التالية :



التمرين الثاني

1

تذكير بمبدأ خوارزمية إقليدس $\frac{x}{t} \mid \frac{y}{z} \Rightarrow x \wedge y = y \wedge t$

ننجز القسمة الأقليدية للعدد b_n على العدد c_n نجد :

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 10^n + 1 \mid 2 \cdot 10^n - 1 \\ \underline{2 \cdot 10^n - 1} \quad \quad \quad 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

إذن حسب مبدأ خوارزمية إقليدس نكتب : $(1) \quad b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$

لنبين الآن أن : $c_n \wedge 2 = 1$.

نلاحظ في البداية أن : $c_n = 2 \cdot 10^n - 1 > 2$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; لكي يكون c_n و 2 أوليان فيما بينهما .

يكفي أن نبين أن 2 لا يقسم c_n .

بالخلف، نفترض أن 2 يقسم c_n . إذن : $c_n \equiv 0 [2]$

يعني : $2 \cdot 10^n - 1 \equiv 0 [2]$

من جهة أخرى لدينا : $-2 \cdot 10^n \equiv 0 [2]$

نجمع هاتين المتفاوتتين طرفا بطرف نحصل على : $-1 \equiv 0 [2]$

يعني أن العدد 2 قاسم للعدد -1 .

و هذا تناقض واضح . إذن ما افترضناه كان خاطئا .

يعني أن العدد 2 لا يقسم العدد c_n .

و منه : $c_n \wedge 2 = 1$

و منه : $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2 = 1$

إذن b_n و c_n عددان أوليان فيما بينهما .

الزمرة (*, J) . لقد حصلنا لحد الآن على المعلومات التالية :

- مجموعة غير فارغة .
- * قانون تركيب داخلي في J .
- * تجميعي في *
- 0 هو العنصر المحايد لـ * في J .

إن لـ $(J, *)$ زمرة يكفي أن يكون لكل عنصر x من J ممتثل بالقانون *

ليكن x عنصرا من J و x' ممتثله من J .
 إذن : $x * x' = x' * x = 0$ يعني : $\frac{x+x'}{1+xx'} = 0$.

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الحقيقي الغير منعدم $(1 + xx')$
 نجد : $x + x' = 0$

التعبير $1 + xx'$ غير منعدم لأن : $1 + xx' > 0 \Rightarrow (x, x') \in J$
 إذن : $x' = -x \in J$

و بالفعل $x' \in J$ لأن من التأطير $-1 < x < 1$
 نستنتج أن : $-1 < -x < 1$

إذن كل عنصر x من J يقبل ممتثلا وهو $-x$ من J بالقانون * .
 وهذه النتيجة إضافة إلى ما تم إيجاده سابقا :

- مجموعة غير فارغة .
- * قانون تركيب داخلي في J .
- * تجميعي في J
- * يقبل عنصرا محايدا من J وهو 0 .

نستنتج إذن أن $(J, *)$ زمرة

و بما أن * تبادلي فإن $(J, *)$ زمرة تبادلية .

نعتبر الدالة المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
 نلاحظ أن f دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} بأكمله لأنها عبارة عن خارج دالتين متصلتين و قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} .
 إضافة إلى ذلك لدينا : $e^x + 1 > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$;
 ليكن x عنصرا من \mathbb{R} . لدينا :

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

إذن f دالة تزايدية قطعيا على \mathbb{R} .

و بما أنها متصلة على \mathbb{R} فهي تقابل من \mathbb{R} نحو $f(\mathbb{R})$

و لدينا : $f(\mathbb{R}) = f(-\infty; +\infty[)$
 $=] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) = \left(\frac{0 - 1}{0 + 1} \right) = -1$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})}$
 $= \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{(1 - e^u)}{(1 + e^u)}$
 $= \left(\frac{1 - 0}{1 + 0} \right) = 1$

و بالتالي f تقابل من \mathbb{R} نحو $]-1; 1[$.

أي أن f تقابل من \mathbb{R} نحو J .

de même : $(a, b) \in J^2 \Rightarrow \begin{cases} a > -1 \\ b > -1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a + 1) > 0 \\ (b + 1) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a + 1)(b + 1) > 0$$

$$\Rightarrow ab + (a + b) + 1 > 0$$

$$\Rightarrow 1 + ab > -(a + b)$$

$$\Rightarrow \frac{1 + ab}{1 + ab} > \frac{-(a + b)}{1 + ab} ; \text{car} \left(\frac{1}{1 + ab} \right) > 0$$

$$\Rightarrow 1 > -(a * b)$$

$$\Rightarrow -1 < a * b \quad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow -1 < a * b < 1$

$$\Rightarrow a * b \in]-1; 1[$$

و بالتالي نحصل على ما يلي : $\forall (a, b) \in J^2 ; a * b \in J$
 إذن * قانون تركيب داخلي في المجموعة J .

تبادلية القانون * في J نستنتجها من تبادلية القانونين + و \times في \mathbb{R} .
 ليكن a و b عنصريين من J .

$$a * b = \frac{a + b}{1 + ab} = \frac{b + a}{1 + ba} = b * a$$

إذن * قانون تبادلي في J .

التجميعية : لتكن x و y و z ثلاثة عناصر من المجال J .

$$(x * y) * z = \left(\frac{x + y}{1 + xy} \right) * z = \frac{\left(\frac{x + y}{1 + xy} \right) + z}{1 + z \left(\frac{x + y}{1 + xy} \right)}$$

$$= \frac{\frac{x + y + z + xyz}{1 + xy}}{\frac{xy + xz + yz + 1}{1 + xy}}$$

نختزل بالعدد الموجب قطعيا $(1 + xy)$ نجد :

$$= \frac{x + y + z + xyz}{xy + xz + yz + 1}$$

و بنفس الطريقة نبين أن : $x * (y * z) = \frac{x + y + z + xyz}{xy + xz + yz + 1}$

و بالتالي : $\forall (x, y, z) \in J^3 ; (x * y) * z = x * (y * z)$
 يعني أن * قانون تجميعي في J .

العنصر المحايد : ليكن e العنصر المحايد للقانون * في J .
 إذن : $(\forall x \in J) ; x * e = e * x = x$

نهتم بإحدى المتساويتين فقط لأن * تبادلي في J .

$$x * e = x \Leftrightarrow \frac{x + e}{1 + xe} = x$$

$$\Leftrightarrow x + e = x + x^2 e$$

$$\Leftrightarrow e = x^2 e$$

$$\Leftrightarrow e(1 - x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } e = 0 \\ \text{ou bien } (1 - x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow e = 0 , \text{ car } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow e = 0 \in]-1; 1[$$

إذن 0 هو العنصر المحايد للقانون * في J .

التمرين الرابع

I 2 I

لدينا : $1 + a = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - i \frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن : $|1 + a| = \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$
 $= \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

لتحديد عمدة العدد العقدي $(1 + a)$ سوف نستعين بالقاعدة التالية :

$e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x - y}{2}\right) e^{\frac{(x+y)}{2}}$

لدينا : $1 + a = 1 + e^{-\frac{i\pi}{4}} = e^{i0} + e^{-\frac{i\pi}{4}}$
 $= 2 \cos\left(\frac{0 - (-\frac{\pi}{4})}{2}\right) e^{-\frac{i\pi}{8}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-\frac{i\pi}{8}}$

إذن : $\arg(1 + a) \equiv \arg\left(2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-\frac{i\pi}{8}}\right) [2\pi]$

يعني : $\arg(1 + a) \equiv \arg\left(2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) + \arg\left(e^{-\frac{i\pi}{8}}\right) [2\pi]$

يعني : $\arg(1 + a) \equiv 0 - \frac{\pi}{8} [2\pi]$

أي : $\arg(1 + a) \equiv -\frac{\pi}{8} [2\pi]$

إذن : $(1 + a) = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{i\pi}{8}}\right)$

التمرين الرابع

I 2 I

لدينا : $(1 + a) = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{i\pi}{8}}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-\frac{i\pi}{8}}$

إذن : $\frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ أي $\sqrt{2 + 2\sqrt{2}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

التمرين الرابع

I 2 I

لدينا : $a^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)\right)^2 = \frac{1}{2}(-2i) = -i$

إذن : $(1 + a)(1 - a) = 1^2 - a^2 = 1 + i$

نحصل إذن على ما يلي : $(1 + a)(1 - a) = (1 + i) = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |1 + a| \times |1 - a| = \sqrt{2} \\ \arg(1 + a) + \arg(1 - a) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |1 - a| = \frac{\sqrt{2}}{|1 + a|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\ \arg(1 + a) + \arg(1 - a) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |1 - a| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\ \arg(1 - a) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |1 - a| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\ \arg(1 - a) \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi] \end{cases}$

التمرين الثالث

II 2 I

التشاكل : لدينا f تقابل من \mathbb{R} نحو J و تقابله العكسي هو التطبيق g
 بحيث : $f \circ g = Id_J$ و $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$

ليكن x و y عنصرين من \mathbb{R}^*

لدينا : $x = g \circ f(x)$ و $y = g \circ f(y)$

و منهما نستنتج أن : $x \times y = g(f(x)) \times g(f(y))$

نُدخل التقابل f على هذه المتساوية نجد :

$f(x \times y) = f(g(f(x)) \times g(f(y)))$

و حسب تعريف القانون \perp نستنتج أن : $f(x \times y) = f(x) \perp f(y)$
 و هذا يعني أن f تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (J^*, \perp)

التمرين الثالث

II 3 I

تذكير : لنكن K مجموعة مزودة بقانوني التركيب الداخليين $*$ و \perp .
 تكون المجموعة $(K, *, \perp)$ جسما إذا و فقط إذا كان :

- $(K, *)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد e
- \perp توزيعي بالنسبة لـ $*$ في K
- المعلومات التي نتوفر عليها لحد الآن هي :

- $(J, *)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو 0
- \perp توزيعي بالنسبة لـ $*$ في J (مقبولة)

يكفي إذن أن نبين أن (K^*, \perp) زمرة . حيث $K^* = K \setminus \{0\}$
 لدينا f تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (J^*, \perp)

إذن صورة الزمرة التبادلية (\mathbb{R}^*, \times) هي الزمرة التبادلية $(f(\mathbb{R}^*), \times)$
 و بما أن f تقابل من \mathbb{R}^* نحو J^* فإن : $f(\mathbb{R}^*) = J^*$
 إذن صورة الزمرة التبادلية (\mathbb{R}^*, \times) هي الزمرة التبادلية (J^*, \perp)
 بالتشاكل التقابلي f

و بالتالي حسب الخاصية التي ذكرت لكم نستنتج أن $(J, *, \perp)$ جسم .
 و بما أن (J^*, \perp) زمرة تبادلية فإن \perp تبادلي في J
 إذن $(J, *, \perp)$ جسم تبادلي .

التمرين الرابع

I 1 I

لنحل في \mathbb{C} المعادلة $z^2 + i = 0$ نضع $Z = r e^{i\theta}$

$z^2 + i = 0 \Leftrightarrow z^2 = -i$

$\Leftrightarrow (r e^{i\theta})^2 = e^{-\frac{i\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow r^2 e^{2i\theta} = e^{-\frac{i\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\theta \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ 2\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \{0; 1\} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ أو } \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = e^{-\frac{i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) = a \\ z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{2}(1 - i) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = e^{-\frac{i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) = a \\ z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{2}(1 - i) \end{cases}$

للتأكد لدينا بالفعل :

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)\right)^2 + i = \frac{2}{4}(-2i) + i = 0$

$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}(1 - i)\right)^2 + i = \frac{2}{4}(-2i) + i = 0$

$$\frac{z' - a}{z' + a} = \frac{i(z - a)}{az(z' + a)} = \frac{i(z - a)}{azz' + a^2z} \quad \text{إذن :}$$

$$= \frac{i(z - a)}{a(-i) - iz} \quad ; \quad \text{car : } \begin{cases} a^2 = -i \\ zz' = -i \end{cases}$$

$$= \frac{i(z - a)}{-i(z + a)} = -\frac{(z - a)}{(z + a)}$$

$$\frac{z' - a}{z' + a} = -\frac{(z - a)}{(z + a)} \quad \text{و بالتالي :}$$

التمرين الرابع

$$\left(\frac{z' - a}{z' + a}\right) = -\frac{(z - a)}{(z + a)} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a - z'}{-a - z'}\right) = -\left(\frac{a - z}{-a - z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a - z'}{-a - z'}\right) \equiv \arg\left(-\left(\frac{a - z}{-a - z}\right)\right) [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_A - z_{M'}}{z_B - z_{M'}}\right) \equiv \pi + \arg\left(\frac{z_A - z_M}{z_B - z_M}\right) [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv \pi + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) [2\pi]$$

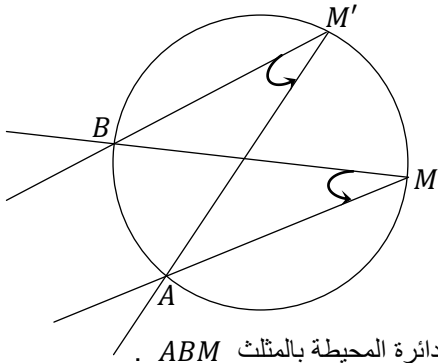
$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv \pi + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) + k'\pi \quad ; \quad k' = 1 + 2k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{أو } A \text{ و } B \text{ و } M \text{ و } M' \text{ متداورة} \\ \text{أو } A \text{ و } B \text{ و } M \text{ و } M' \text{ مستقيمة} \end{cases}$$

و بما أن A و B و M و M' نقط غير مستقيمة و ذلك حسب افتراض السؤال (3) فإن : $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) \neq 0 [\pi]$ و منه : $(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \neq 0 [\pi]$ إذن النقط A و B و M و M' غير مستقيمة .
إذن فهي متداورة . و نحصل بذلك على الوضعية التالية :



إذن M' تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث ABM .

التمرين الخامس

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln(\sqrt{x^2})}{\sqrt{x}} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = -2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln t}{t}\right)$$

$$= (-2)(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}\right) = -2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln t}{t}\right) \quad \text{و لدينا :}$$

$$= (-2)(0^+) = 0$$

$$(1 - a) = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}; \frac{3\pi}{8}\right] \quad \text{إذن الشكل المثلثي هو :}$$

$$(1 - a) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}\right) e^{\frac{i3\pi}{8}} \quad \text{و شكله الأسّي هو :}$$

التمرين الرابع

لدينا حسب المعطيات : $zz' + i = 0$ (نتيجة مقبولة)
إذن : $zz' = -i$

$$\frac{z_{M'} - z_0}{z_N - z_0} = \frac{z'}{z} = \frac{z'z}{zz} = \frac{-i}{zz} = \left(\frac{-1}{|z|^2}\right) i \in i\mathbb{R}^-$$

لدينا :
و ذلك لأن $\left(\frac{-1}{|z|^2}\right) i$ عدد حقيقي سالب.

$$\frac{z_{M'} - z_0}{z_N - z_0} = \left(\frac{-1}{|z|^2}\right) i \in i\mathbb{R}^- \quad \text{نستنتج إذن أن :}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_{M'} - z_0}{z_N - z_0}\right) \equiv \arg\left(\left(\frac{-1}{|z|^2}\right) i\right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_{M'} - z_0}{z_N - z_0}\right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow (OM') \perp (ON)$$

التمرين الرابع

$$(z' - a) = \frac{z(z' - a)}{z} = \frac{zz' - za}{z} = \frac{-ia - za^2}{za}$$

$$= \frac{-ia - z(-i)}{za} \quad \text{car } (a^2 = -i)$$

$$= \frac{-ia + zi}{za} = \frac{i(z - a)}{za}$$

$$(z' - a) = \frac{i(z - a)}{az} \quad \text{إذن :}$$

التمرين الرابع

سوف نستعمل في هذا السؤال التكافؤ التالي .

$$[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [non(B) \Rightarrow non(A)]$$

لنبين إذن صحة الاستلزام التالي : $(z' = a) \Rightarrow (z = -a)$
و سوف نستعين بالمتساوية (*).

$$\text{نفترض أن } (z' = -a) \text{ إذن } (z' + a) = 0$$

$$(z' - a) = \frac{i(z - a)}{az}$$

$$\Rightarrow (z' - a) + 2a = i\left(\frac{z - a}{az}\right) + 2a$$

$$\Rightarrow (z' + a) = \frac{i(z - a) + 2a^2z}{az}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{i(z - a) + 2(-i)z}{az}$$

$$\Rightarrow iz - ia - 2iz = 0$$

$$\Rightarrow -ia - iz = 0$$

$$\Rightarrow iz = -ia$$

$$\Rightarrow -iiz = iia$$

$$\Rightarrow z = -a$$

نحصل إذن على الاستلزام التالي : $(z' = -a) \Rightarrow (z = -a)$
الذي يكافئ : $non(z = -a) \Rightarrow non(z' = -a)$
يعني : $(z \neq -a) \Rightarrow (z' \neq -a)$
نفترض أن $M \neq B$ يعني : $z \neq -a$
إذن : $z' \neq -a$ أي : $M' \neq B$
و لدينا : $(z' - a) = \frac{i(z - a)}{az}$

و بالتالي g_n تقابل من $]0,1[$ نحو $]-1; +\infty[$. و هذا يعني أن كل عنصر من المجال $]-1; +\infty[$ يقبل سابقا واحدا بالدالة g_n من $]0,1[$. بما أن 0 عنصر من المجال $]-1; +\infty[$ إذن يوجد سابق وحيد α_n من المجال $]0,1[$ بحيث $g_n(\alpha_n) = 0$.
أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , (\exists! \alpha_n \in]0,1[) ; f_n(\alpha_n) - (\alpha_n)^2 = 0$
أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , (\exists! \alpha_n \in]0,1[) ; f_n(\alpha_n) = (\alpha_n)^2$

التمرين الخامس

لدينا دالة متصلة و تناقصية على المجال $]0,1[$.
و لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < \alpha_n < 1$
إذن من أجل $(n+1) \in \mathbb{N}^*$ لدينا $0 < \alpha_{n+1} < 1$
و سوف نهتم فقط بالمتفاوتة اليسرى $\alpha_{n+1} > 0$.
ندخل على هذه المتفاوتة الدالة التناقصية قطعا g_n
نحصل على $g_n(\alpha_{n+1}) < g_n(0)$
إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; g_n(\alpha_{n+1}) < -1 < 0$
و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; g_n(\alpha_{n+1}) < -1 < 0$
أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; g_n(\alpha_{n+1}) < 0$

التمرين الخامس

ليكن n عنصرا من \mathbb{N}^* . لدينا : $g_n(\alpha_{n+1}) < g_n(\alpha_n)$
و نعلم أن g_n تقابل و تقابله العكسي g_n^{-1} دالة تناقصية .
نُدخل الدالة g_n^{-1} على المتفاوتة نجد : $g_n^{-1}(g_n(\alpha_{n+1})) > g_n^{-1}(g_n(\alpha_n))$
يعني أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_{n+1} > \alpha_n$
و هذا يعني أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية تزايدية .
و بما أنها مكبورة بالعدد 1 (لأن : $0 < \alpha_n < 1$)
فهي متقاربة و نضع : $\lim(\alpha_n) = l$

التمرين الخامس

في البداية لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_{n+1} > \alpha_n$
و لدينا : $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \geq 1$
 $\Rightarrow \alpha_n \geq \alpha_1$ car $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est ↗
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty}(\alpha_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty}(\alpha_1)$
 $\Rightarrow l \geq \alpha_1$ (2)
و لدينا كذلك : $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < \alpha_n < 1$
 $\Rightarrow \alpha_n \leq 1$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty}(\alpha_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 1$; passage aux limites
 $\Rightarrow l \leq 1$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $0 < \alpha_1 \leq l \leq 1$

التمرين الخامس

لدينا : $g_n(\alpha_n) = 0 \Rightarrow f_n(\alpha_n) - (\alpha_n)^n = 0$
 $\Rightarrow f_n(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$
 $\Rightarrow \frac{-\ln(\alpha_n)}{\sqrt{\alpha_n}} = (\alpha_n)^n$
 $\Rightarrow -\ln(\alpha_n) = \sqrt{\alpha_n} (\alpha_n)^n$

إذن : $h(\alpha_n) = \frac{-1}{2} + \frac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$
 $= \frac{-1}{2} + \frac{\ln(\sqrt{\alpha_n} (\alpha_n)^n)}{\ln(\alpha_n)}$
 $= \frac{-1}{2} + \frac{\frac{1}{2} \ln(\alpha_n)}{\ln(\alpha_n)} + \frac{n \ln(\alpha_n)}{\ln(\alpha_n)} = n$
و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; h(\alpha_n) = n$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى (C) على يمين الصفر
و لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

التمرين الخامس

في البداية نلاحظ أن f عبارة عن خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}_*^+
و $\forall x > 0 ; \sqrt{x} \neq 0$. إذن f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_*^+ .
ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_*^+ =]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{(-\ln x)'}{\sqrt{x}} - \frac{(\sqrt{x})'(-\ln x)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(-\ln x)' - (\sqrt{x})'(-\ln x)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\left(-\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(-\ln x)}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \left(\frac{-2}{2\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$= \frac{1}{2x\sqrt{x}} (-2 + \ln x)$$

نلاحظ أن : $(\forall x > 0) ; \frac{1}{2x\sqrt{x}} > 0$
إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة العدد $(-2 + \ln x)$.
إذا كان : $f'(x) = 0$: فإن $x = e^2$
إذا كان : $f'(x) > 0$: فإن $x > e^2$
إذا كان : $f'(x) < 0$: فإن $x < e^2$
و نستنتج بذلك جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0	1	e^2	$+\infty$	
$f'(x)$		-	-	0	+
f	$+\infty$	↘	0	↗	0

التمرين الخامس

ليكن x و y عنصريين من المجال $]0;1[$ بحيث $x > y$
 $x > y \Rightarrow \begin{cases} f(x) < f(y) ; \text{car } f \text{ est } \searrow \\ x^n > y^n ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} f(x) < f(y) \\ -x^n > -y^n \end{cases}$
 $\Rightarrow f(x) - x^n < f(y) - y^n$
 $\Rightarrow g_n(x) < g_n(y)$

و نحصل بذلك على الاستلزام التالي : $x > y \Rightarrow g_n(x) < g_n(y)$
و هذا يعني أن الدالة g_n تناقصية قطعا على المجال $]0,1[$.

التمرين الخامس

لدينا دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]0,1[$.
إذن g_n تقابل من $]0,1[$ نحو $]0,1[$.
 $g_n(]0,1[) =]g_n(1) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x)[$ و بذلك نكتب :
و لدينا : $g_n(1) = f_n(1) - 1^n = -1$
و لدينا كذلك : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f_n(x) - x^n) = +\infty$

لتكن \mathcal{A} مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C) والمستقيمتين التي معادلاتها $x = e^2$ و $x = 1$ و $y = 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left(\int_1^{e^2} |f(t)| dt \right) (l'unité)^2 \text{ : إذن} \\ &= - \int_{e^2}^1 |f(t)| dt \text{ cm}^2 \\ &= - \int_{e^2}^1 -f(t) dt \text{ cm}^2 ; \text{ car } (\forall x \geq 1), f(x) \leq 0 \\ &= \int_{e^2}^1 f(t) dt \text{ cm}^2 \\ &= (2\sqrt{e^2} \ln(e^2) + 4 - 4\sqrt{e^2}) \text{ cm}^2 \\ &= (2 \times e \times 2 + 4 - 4 \times e) \text{ cm}^2 \\ &= (4e + 4 - 4e) \text{ cm}^2 \\ &= 4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

ليكن k و n عددين صحيحين طبيعيين بحيث $n \geq 2$ و $1 \leq k \leq n$. نلاحظ أن جميع المجالات $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ توجد ضمن المجال $]0; 1]$. نعتبر قصور الدالة f على المجال $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ و سوف نستعمل فيما يلي تناقصية الدالة f على المجال $]0; 1]$.

$$\begin{aligned} t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right] &\Rightarrow \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n} \\ &\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &\Rightarrow \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt \\ &\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 1 dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 1 dt \\ &\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right) \left[t\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \left[t\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\ &\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right) \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\alpha_n) = n &\Leftrightarrow \frac{-1}{2} + \frac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)} = n \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)} = n + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(\alpha_n)}{\ln(-\ln(\alpha_n))} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(\alpha_n)}{\ln(-\ln(\alpha_n))} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\ln(l)}{\ln(-\ln(l))} = 0 \\ &\Rightarrow \ln(l) = 0 \\ &\Rightarrow l = e^0 = 1 \end{aligned}$$

نعلم أن $\lim(\alpha_n) = 1$ و $f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$ إذن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)\right)$
 $= f(1) = \frac{-\ln 1}{\sqrt{1}} = 0$
 و بالتالي : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^n = 1$

في البداية نلاحظ أن الدالة f موجبة على المجال $]0; 1]$ و سالبة على المجال $[1; +\infty[$ و ذلك من خلال جدول تغيراتها.

$$\begin{aligned} x \in]0; 1] &\Rightarrow \int_x^1 f(t) dt \geq 0 \text{ : إذن} \\ x \in [1; +\infty[&\Rightarrow \int_x^1 f(t) dt = - \int_1^x f(t) dt \geq 0 \\ &= -\text{Quantité négative} \\ &= \text{Quantité positive} \end{aligned}$$

خلاصة : $\forall x > 0 ; \int_x^1 f(t) dt \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_x^1 f(t) dt &= \int_x^1 \left(\frac{-\ln t}{\sqrt{t}} \right) dt = \int_x^1 \left(\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{u'(t)} \right) \frac{(-\ln t)}{v(t)} dt \\ &= [u(t) \times v(t)]_x^1 - \int_x^1 u(t) \cdot v'(t) dt \\ &= \left[2t^{\frac{1}{2}} \times (-\ln t) \right]_x^1 + 2 \int_x^1 \left(t^{\frac{1}{2}} \cdot t^{-1} \right) dt \\ &= 2\sqrt{x} \ln x + 2 \left[2t^{\frac{1}{2}} \right]_x^1 \\ &= 2\sqrt{x} \ln x + 2(2 - 2\sqrt{x}) \\ &= 2\sqrt{x} \ln x + 4 - 4\sqrt{x} \end{aligned}$$

نجمع هذه التآطيرات طرفا طرفا نجد :

$$(*) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$$

نأخذ من هذا التآطير المتفاوتة اليسرى

و نضيف إلى كلا الطرفين العدد 0 نجد :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$$

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) \right) \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$$

$$(1) \quad \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$$

u_n

بعد ذلك نأخذ من التآطير (*) المتفاوتة اليمنى :

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$$

و نضيف إلى كلا الطرفين العدد 0 نجد :

$$0 + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} f(1) + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{n}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow u_n \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$$

التمرين الخامس

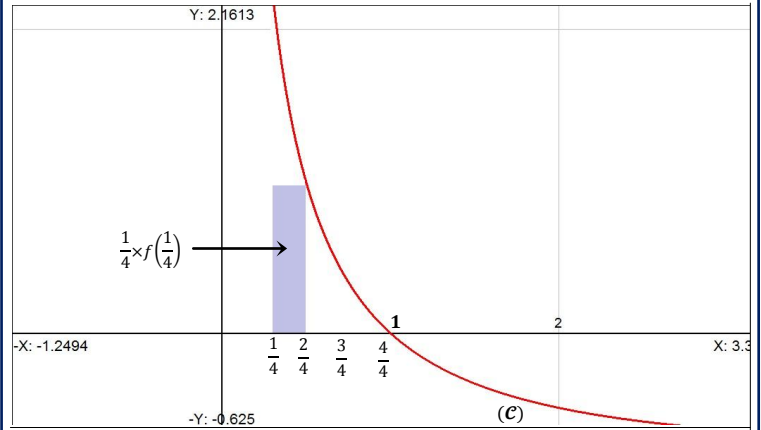
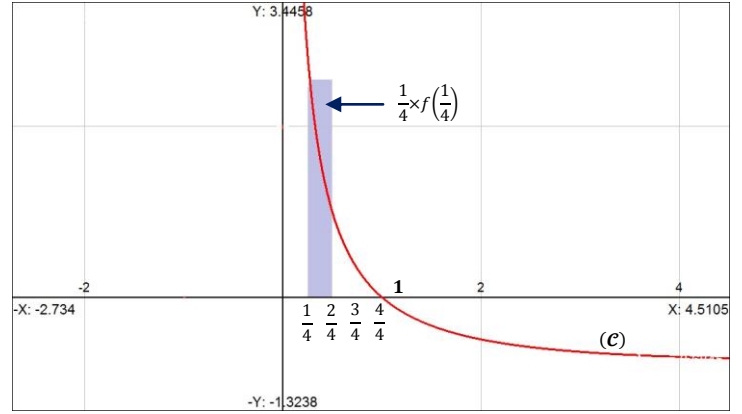
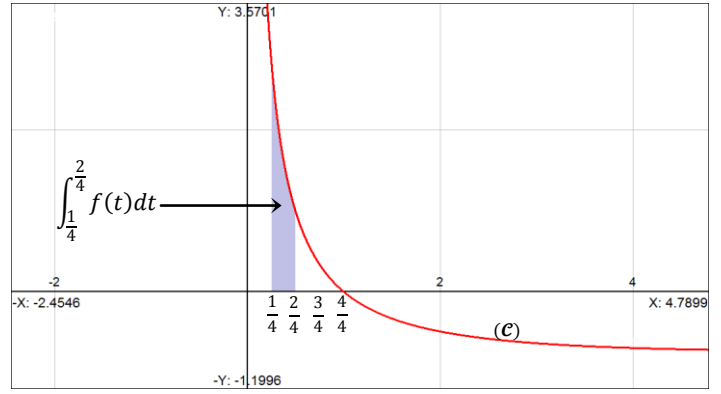
2 II

في هذا السؤال سوف نحاول حساب نهايتي طرفي التآطير (***) عندما
يؤول n إلى $+\infty$

لدينا حسب نتيجة السؤال (1) :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt &= 2 \sqrt{\frac{1}{n}} \ln\left(\frac{1}{n}\right) + 4 - 4 \sqrt{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{-2 \ln n}{\sqrt{n}} + 4 - \frac{4}{\sqrt{n}} \\ &= -2 f(n) + 4 - \frac{4}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

هندسيا : نأخذ مثال $n = 4$



و نلاحظ بالفعل أن : $\frac{1}{4} f\left(\frac{2}{4}\right) \leq \int_{\frac{1}{4}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{4}\right)$

التمرين الخامس

2 II

ليكن n عنصرا من \mathbb{N}^* . و سوف نستعمل نتيجة السؤال (1) .

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) \leq \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{4}{n}\right) \leq \int_{\frac{3}{n}}^{\frac{4}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right)$$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$$\frac{1}{n} f(1) \leq \int_{\frac{n-1}{n}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$k(\sqrt{x}) = \int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt = - \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt = -g(x) \quad \text{لدينا :}$$

$$g(x) = -k(\sqrt{x}) = -k \circ J(x) \quad \text{لدينا :}$$

$$J(x) = \sqrt{x} \quad \text{بحيث :}$$

نلاحظ أن k و J دالتان متصلتان على المجال $[0; +\infty[$.
و جميع عناصر \mathbb{R}^+ تقبل صوراً بالدالة J . لأن $J(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}$.
إذن مُركَّب الدالتين k و J دالة متصلة على $[0; +\infty[$.

الإشتقاق :

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصراً من I فإن :

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال I والتي تنعدم في a .
لدينا $x \rightarrow e^{-x^2}$ دالة متصلة على \mathbb{R} بأكمله.

إذن فهي متصلة على المجال $[0; +\infty[$. و لدينا $1 \in [0; +\infty[$

$$k : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \int_1^x e^{-t^2} dt$$

إذن الدالة :

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة $x \rightarrow e^{-x^2}$ على المجال $[0; +\infty[$.
حيث : $k(1) = 0$ و $k'(x) = e^{-x^2}$; $\forall x \geq 0$

لدينا إذن : $J(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = -k \circ J(x)$

و نلاحظ أن الدالة J قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$. و k قابلة للإشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ و جميع عناصر المجال $]0; +\infty[$ تقبل صوراً بالدالة J . لأن : $J(]0; +\infty[) \subseteq \mathbb{R}$

إذن مُركَّب الدالتين k و J عبارة عن دالة قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$.
يعني أن الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$.

$$k'(x) = e^{-x^2} ; \forall x \geq 0$$

$$J'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} ; \forall x > 0$$

$$g'(x) = (-k(J(x)))' = -J'(x) k'(J(x))$$

$$= \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right) \times (e^{-J(x)^2})$$

$$= \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right) \times (e^{-(\sqrt{x})^2})$$

$$= \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right) \times (e^{-x}) ; \forall x > 0$$

$$(\forall x > 0) ; \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} > 0$$

ونلاحظ أن : $(\forall x > 0) ; g'(x) < 0$ و منه :

و هذا يعني أن الدالة g تناقصية قطعاً على حيز تعريفها $]0; +\infty[$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt = -2 \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) + 4 - 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{إذن :}$$

$$= -2 \times 0 + 4 - 4 \times 0 = 4$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \right) \quad \text{و كذلك :}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \right) + 4$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{-\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \right) + 4$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \ln n \right) + 4$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right) + 4$$

$$= 2 \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln m}{m} \right) \right) + 4$$

$$= 2 \times 0 + 4 = 4$$

و بذلك نحصل على الوضعبة التالية :

$$\underbrace{\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt}_{\text{tend vers 4}} \leq u_n \leq \underbrace{\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt}_{\text{tend vers 4}}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim(u_n) = 4$

إضافة : بإمكاننا حساب النهاية $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$ بالإستعانة بتقنية بسيطة .

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ فإن المتتالية

$$u_n = \left(\frac{b-a}{n} \right) \sum_{k=1}^n f\left(a + k \left(\frac{b-a}{n} \right) \right) ; n \geq 1$$

تكون متقاربة إذا كانت النهاية : $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt = l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt = l \in \mathbb{R} \quad \text{و نكتب :$$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{لدينا :}$$

$$= \left(\frac{1-0}{n} \right) \sum_{k=1}^n f\left(0 + k \left(\frac{1-0}{n} \right) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_x^1 f(t) dt \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x) \quad \text{فإن :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x})^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (4 - 4\sqrt{x} + 4\sqrt{x} \ln \sqrt{x})$$

$$= 4 - \lim_{x \rightarrow 0^+} (4\sqrt{x} - 4\sqrt{x} \ln \sqrt{x})$$

$$= 4 - \lim_{x \rightarrow 0^+} (4t - 4t \ln t)$$

$$= 4 - 0 + 0 = 4$$

إذن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية متقاربة و نهايتها هي 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \int_0^1 f(t) dt = 4 \quad \text{و نكتب :}$$

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعاً . و نعتبر المجال $[0, x]$ الموجود ضمن المجال $[0, +\infty[$ لدينا g متصلة على $[0; +\infty[$ إذن فهي متصلة على $[0, x]$.
و لدينا g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ إذن فهي قابلة للاشتقاق على $]0, x[$ نستنتج إذن حسب مبرهنة التزايديات المنتهية أن :

$$\exists c \in]0, x[; \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) = g'(c)$$

لنبين الآن أن الدالة g' المعرفة على $]0, +\infty[$ تزايدية على $]0, +\infty[$.
لدينا : $g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}} e^{-x}$
إذن g' قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ لأنها عبارة عن جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{و لدينا : } (\forall x > 0) ; (g'(x))' &= \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}} e^{-x} \right)' \\ &= \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}} \right)' e^{-x} + (e^{-x})' \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{1}{4x\sqrt{x}} e^{-x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} \\ &= (1 + 2x) \frac{e^{-x}}{4x\sqrt{x}} > 0 \end{aligned}$$

إذن الدالة g' تزايدية قطعاً على المجال $]0; +\infty[$.
نعود إلى الوضعية التالية .
 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(c) \\ c < x \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} c < x &\Rightarrow g'(c) < g'(x) \\ &\Rightarrow \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(c) < g'(x) \end{aligned}$$

$$(\forall x > 0) ; \frac{g(x) - g(0)}{x} < g'(x) : \text{ وبالتالي}$$

$$(*) (\forall x > 0) ; \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-1}{2\sqrt{x}} e^{-x} \text{ أي}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}} e^{-x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}} \right) (e^{-x}) : \text{ لدينا} \\ &= (-\infty)(1) = -\infty \end{aligned}$$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\left(\frac{g(x) - g(0)}{x} \right) < \underbrace{\left(\frac{-1}{2\sqrt{x}} e^{-x} \right)}_{\substack{\text{tend vers } -\infty \\ \text{lorsque } x \text{ tend} \\ \text{vers } 0^+}}$$

إذن نستنتج حسب خاصيات النهايات و الترتيب أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) = -\infty \notin \mathbb{R}$$

إذن g غير قابلة للاشتقاق على يمين الصفر .

$$\text{و نفسر النهاية : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) = -\infty$$

بقولنا : منحني الدالة g يقبل نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $(0; g(0))$ و موجه نحو الأسفل .

أجوبة امتحان مدينة بولمان 2010

التمرين الأول

1

لكي يكون $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ يكفي أن يكون E جزءا غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ومستقر بالنسبة للقانونين $+$ و \cdot .

نلاحظ في البداية أن المجموعة E تتكون من مصفوفات مربعة من الرتبة 2. إذن $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. ولدينا E غير فارغ لأننا نستطيع رصد عنصر واحد على الأقل في E وهو المصفوفة $M(0,0)$ أو $M(1,1)$ أو $M(2,3)$ أو ...
لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E .

$$\begin{aligned} M(a,b) + M(c,d) &= \begin{pmatrix} a+b & 3b \\ b & a-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d & 3d \\ d & c-d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b+c+d & 3b+3d \\ b+d & a-b+c-d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a+c) + (b+d) & 3(b+d) \\ b+d & (a+c) - (b+d) \end{pmatrix} \\ &= M(a+c; b+d) \in E \end{aligned}$$

لأنه a و b و c و d أعداد حقيقية.

إذن $(a+c)$ و $(b+d)$ عدنان حقيقيان كذلك. نستنتج إذن أن E مستقر بالنسبة لـ $+$ (1).

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E و α عدد حقيقي.

$$\begin{aligned} \alpha \cdot M(a,b) &= \alpha \begin{pmatrix} a+b & 3b \\ b & a-b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a + \alpha b & 3\alpha b \\ \alpha b & \alpha a - \alpha b \end{pmatrix} \\ &= M(\alpha a; \alpha b) \in E \end{aligned}$$

لأن a و b و α أعداد حقيقية إذن αa و αb عدنان حقيقيان كذلك.

نستنتج إذن أن E مستقر بالنسبة لـ \cdot (2).

خلاصة: E جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ومستقر بالنسبة للقانونين $+$ و \cdot وبالتالي $(E, +, \cdot)$ فضاء جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

التمرين الأول

1

تكون الأسرة (I, J) أساسا للفضاء المتجهي الحقيقي $(E, +, \cdot)$ إذا كان I و J عنصرين من E وإذا كانت الأسرة (I, J) حرة و تولد الفضاء E .
لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E .

$$\begin{aligned} M(a,b) &= \begin{pmatrix} a+b & 3b \\ b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 3b \\ b & -b \end{pmatrix} \\ &= a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= a \cdot I + b \cdot J \end{aligned}$$

نستنتج إذن أن: $M(a,b) = aI + bJ$; $\forall M(a,b) \in E$

إذن (I, J) أسرة مولدة للفضاء المتجهي E (3).

لتكن $(xI + yJ)$ تآليفة خطية منعدمة للمتجهتين I و J .

$$\begin{aligned} xI + yJ = 0 &\Rightarrow M(x,y) = M(0,0) \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} x+y & 3y \\ y & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 3y=0 \\ y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{aligned}$$

إذن (I, J) أسرة حرة (4).

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3 \times 0 \\ 0 & 1-0 \end{pmatrix} = M(1,0) \in E \quad \text{و لدينا}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 3 \times 1 \\ 1 & 0-1 \end{pmatrix} = M(0,1) \in E \quad \text{و كذلك}$$

إذن I و J عنصرين من E (5).

من النتائج (3) و (4) و (5) نستنتج أن (I, J) أساس للفضاء $(E, +, \cdot)$.

التمرين الأول

2

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{لدينا}$$

$$= 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4I$$

إذن: $J^2 = 4I$

و نعلم أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي إذن E مستقر بالنسبة للقانون \cdot .

يعني: $(\forall A \in E), (\forall \alpha \in \mathbb{R}); \alpha \cdot A \in E$

و لدينا $I = M(1,0) \in E$ إذن $4I$ عنصر من E .

و بالتالي: $J^2 \in E$.

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E .

لدينا: $M(a,b) \times M(c,d) = (aI + bJ) \times (cI + dJ)$

$$= acI + adJ + bcJ + bdJ^2$$

$$= acI + (ad + bc)J + bdJ^2$$

بما أن I و J و J^2 عناصر من E .

و بما أن ac و $(ad + bc)$ و bd أعداد حقيقية.

فإن: $ac \cdot I + (ad + bc) \cdot J + bd \cdot J^2 \in E$

يعني أن: $M(a,b) \times M(c,d) \in E$.

و بالتالي E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

ملاحظة: يُمكن إتمام الحساب السابق على النحو التالي:

$$\begin{aligned} M(a,b) \times M(c,d) &= acI + (ad + bc)J + bdJ^2 \\ &= acI + (ad + bc)J + 4bdI \\ &= (ac + 4bd)I + (ad + bc)J \\ &= M(ac + 4bd; ad + bc) \in E \end{aligned}$$

التمرين الأول

2

لنبين أن $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية و **واحدية**.

\times تبادلي في E \times زمرة تبادلية $(E, +)$ تجميعي في E \times توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E \times يقبل عنصرا محايدا في E

لدينا $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

إذن $(E, +)$ زمرة تبادلية.

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ و $M(e,f)$ ثلاث مصفوفات من E .

من جهة أولى لدينا: $(M(a,b) \times M(c,d)) \times M(e,f)$

$$= M(ac + 4bd; ad + bc) \times M(e,f)$$

$$= M(e(ac + 4bd) + 4f(ad + bc); f(ac + 4bd) + e(ad + bc))$$

$$= M(eac + 4bde + 4fad + 4fbc; fac + 4bdf + ead + ebc)$$

و من جهة ثانية لدينا: $M(a,b) \times (M(c,d) \times M(e,f))$

$$= M(a,b) \times M(ce + 4df; cf + de)$$

$$= M(a(ce + 4df) + 4b(cf + de); a(cf + de) +$$

$$+ b(ce + 4df))$$

$$= M(ace + 4dfa + 4bcf + 4bde; acf + ade + bce + 4dfb)$$

و نلاحظ من هاتين النتيجتين أن:

$$\forall M(a,b), M(c,d), M(e,f) \in E; (M(a,b) \times M(c,d)) \times M(e,f)$$

$$= M(a,b) \times (M(c,d) \times M(e,f))$$

و بالتالي القانون \times تجميعي في E (2).

نجمع المعادلتين (2) و (3) طرفا بطرف . و بعد النشر و التبسيط نحصل على $ya + xb = 0$. يعني : $ya = -xb$ (5) .
ننجز بعد ذلك عملية الطرح بين المعادلتين (1) و (3) نجد :

$$\begin{aligned} (1) - (3) &\Rightarrow ax + 4yb = 0 \\ &\Rightarrow -b(ax + 4yb) = 0 ; b \neq 0 \\ &\Rightarrow a(-xb) - 4b^2 y = 0 \\ &\Rightarrow a(ay) - 4b^2 y = 0 ; d'après(5) \\ &\Rightarrow a^2 y - 4b^2 y = 0 \\ &\Rightarrow (a^2 - 4b^2)y = 0 \\ &\Rightarrow (a^2 - 4b^2) = 0 ; \text{car } y \neq 0 \end{aligned}$$

عكسيا : لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E^* حيث $a^2 - 4b^2 = 0$.
و لنبين أن المصفوفة $M(a,b)$ قاسم للصفر في الحلقة $(E, +, \times)$.

يكفي أن نبين وجود مصفوفة $M(x,y)$ من E^* حيث :
 $M(x,y) \times M(a,b) = M(0,0)$ و $M(a,b) \times M(x,y) = M(0,0)$

$$\begin{aligned} a^2 - 4b^2 = 0 &\Rightarrow a^2 = 4b^2 \\ &\Rightarrow a = \pm 2b \\ &\Rightarrow \begin{cases} M(a,b) = M(2b,b) \\ M(a,b) = M(-2b,b) \end{cases} \end{aligned}$$

نختار الحالة $a = 2$ و الحالة الأخرى تخضع لنفس المراحل.

لنبحث عن مصفوفة $M(x,y)$ من E^* حيث $M(2b,b) \times M(x,y) = M(0,0)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3b & 3b \\ b & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x+y & 3y \\ y & x-y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3b(x+y) + 3by & 9yb + 3b(x-y) \\ b(x+y) + by & b(x+y) + by \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3bx + 3by + 3by = 0 \\ 9yb + 3bx - 3by = 0 \\ xb + by + by = 0 \\ bx + by + by = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3b(x+2y) = 0 \\ 3b(3y+x-y) = 0 \\ b(x+2y) = 0 \\ b(x+2y) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x+2y) = 0 ; \text{car } b \neq 0$$

للحصول على المصفوفة $M(x,y)$ يكفي أن نختار x و y من \mathbb{R}

حيث $(x,y) \neq (0,0)$ و $x+2y=0$.
بصفة عامة يمكن أن نقول أن جميع المصفوفات التي تُكتب على شكل $M(-2y,y)$

حيث $y \neq 0$ تحقق الشرطين $M(2b,b) \times M(-2y,y) = M(0,0)$

و $M(-2y,y) \times M(2b,b) = M(0,0)$

و بالتالي المصفوفة $M(a,b)$ حيث $a^2 - 4b^2 = 0$ قاسم للصفر في الحلقة $(E, +, \times)$

ملاحظة : لدينا : $M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 3b \\ b & a-b \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(M(a,b)) &= (a+b)(a-b) - 3b^2 \\ &= (a^2 - b^2) - 3b^2 \\ &= a^2 - 4b^2 \end{aligned}$$

إن يمكن أن نقول أن المصفوفة $M(a,b)$ تكون قاسما للصفر في E إذا و فقط إذا كانت غير قابلة للقلب .

la matrice $M(a,b)$ de E est diviseur de zéro si et si et seulement si elle n'est pas inversible

التمرين الثاني

بصفة عامة : إذا كانت $az^2 + bz + c = 0$ معادلة من الدرجة الثانية $(a \neq 0)$ بمجهول عقدي واحد z فإن هذه المعادلة تقبل حلين z_0 و z_1

حيث $z_0 z_1 = \frac{c}{a}$ و $z_0 + z_1 = -\frac{b}{a}$

لدينا : $(E) : z^2 - az + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ليكن z_0 و z_1 حلي المعادلة (E) .

$$\begin{aligned} z_0 z_1 &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &\Rightarrow \begin{cases} |z_0 z_1| = |z_0| |z_1| = \left| e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = 1 \\ \arg(z_0 z_1) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

لنبين الآن أن الضرب توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E .

$$\begin{aligned} \text{من جهة أولى لدينا : } &M(a,b) \times (M(c,d) + M(e,f)) \\ &= M(a,b) \times M(c+e; d+f) \\ &= M(a(c+e) + 4b(d+f) ; a(d+f) + b(c+e)) \\ &= M(ac+ae+4bd+4bf ; ad+af+bc+be) \\ \text{من جهة ثانية لدينا : } &M(a,b) \times M(c,d) + M(a,b) \times M(e,f) \\ &= M(ac+4bd ; ad+bc) + M(ae ; af+be+4bf) \\ &= M(ac+4bd+ae+4bf ; ad+bc+af+be) \end{aligned}$$

نلاحظ إذن أن : $\forall M(a,b), M(c,d), M(e,f) \in E ;$

$$M(a,b) \times (M(c,d) + M(e,f)) = M(a,b) \times M(c,d) + M(a,b) \times M(e,f)$$

$$\text{و بنفس الطريقة نستطيع أن نبين المتساوية الثانية : } (M(c,d) + M(e,f)) \times M(a,b) = M(c,d) \times M(a,b) + M(e,f) \times M(a,b)$$

و يمكن كذلك أن نستخرج هذه المتساوية الثانية بعد أن نبين أن \times تبادلي في E و هذا ما سنقوم به بعد الفاصل الأشهاري ، إبقو معنا .

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } M(a,b) \times M(c,d) &= M(ac+4bd ; ad+bc) \\ &= M(ca+4db ; da+cb) \\ &= M(c,d) \times M(a,b) \end{aligned}$$

إذن الضرب \times تبادلي في E (4) .

و منه نستخرج المتساوية الثانية .

و من المتساويتين الأولى و الثانية نستنتج أن \times توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E سوف نبحت الآن عن العنصر المحايد لـ \times في E .

نعلم أن كل قانون تركيب داخلي في مجموعة يمتلك على الأكثر عنصرا محايدا واحدا . يعني أن العنصر المحايد إن وجد فإنه يكون وحيدا .

لدينا E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

إذن \times قانون تركيب داخلي في E .

و بما أن $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ فإن العنصر المحايد للضرب \times في E هو نفسه العنصر المحايد للضرب \times في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

و لدينا $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد لـ \times في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

إذن $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(1,0)$ هو العنصر المحايد لـ \times في E

و بالتالي $M(1,0)$ هو العنصر المحايد لـ \times في E (5) .

خلاصة : من (1) و (2) و (3) و (4) و (5) نستنتج أن $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية و واحدة وحدتها المصفوفة $M(1,0)$ و صفرها

المصفوفة $M(0,0)$.

التمرين الأول

ج

2

تذكير : لتكن $(A, *, T)$ حلقة عنصرها المحايد e (يعني e هو العنصر

المحايد لـ $*$ في A) . نقول أن العنصر a من A قاسم للصفر في الحلقة $(A, *, T)$ إذا و فقط إذا كان : $a \neq e$ و يوجد b من A حيث $b \neq e$

و $a \uparrow b = e$ و $b \uparrow a = e$. (انتهى التذكير)

نضع : $E^* = E \setminus \{M(0,0)\}$.

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E و نفترض أنها قاسم للصفر في الحلقة $(E, +, \times)$.

إذن حسب التذكير توجد مصفوفة $M(x,y)$ من E^* حيث

$$M(a,b) \times M(x,y) = M(0,0) \text{ و } M(x,y) \times M(a,b) = M(0,0)$$

نشتغل بإحدى المتساويتين لأن \times تبادلي في E^* .

لدينا : $M(a,b) \times M(x,y) = M(0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & 3b \\ b & a-b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x+y & 3y \\ y & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (a+b)(x+y) + 3by & 3y(a+b) + 3b(x-y) \\ b(x+y) + y(a-b) & 3yb + (a-b)(x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) & (a+b)(x+y) + 3by = 0 \\ (2) & 3y(a+b) + 3b(x-y) = 0 \\ (3) & b(x+y) + y(a-b) = 0 \\ (4) & 3yb + (a-b)(x-y) = 0 \end{cases}$$

التمرين الثاني

3

نفترض أن: $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

لكي نكتب z_1 على شكله المثلثي (أو الأسّي) نحدد $|z_1|$ و $\arg(z_1)$.

لدينا: $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{4}} = \left[1, \frac{\pi}{4}\right]$

ونعلم أن $|z_0| \cdot |z_1| = 1$ إذن $|z_0| = 1$ أي: $|z_1| = 1$ ونعلم كذلك أن: $\arg(z_1) + \arg(z_0) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

إذن: $\arg(z_1) + \arg\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

يعني: $\arg(z_1) + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

إذن: $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$

وبالتالي نكتب z_1 في شكله الأسّي والمثلثي كما يلي:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{12}} = \left[1, \frac{\pi}{12}\right] \quad (1)$$

لنكتب الآن z_1 على شكله الجبري.

ومن أجل ذلك نستعمل العلاقة التالية: $z_0 \times z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z_1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i + \frac{\sqrt{6}}{4}i + \frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) \quad (2)$$

نستعمل إذن النتيجة (1) و (2) لتحديد قيمتي $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

لدينا: $z_1 = e^{i\frac{\pi}{12}}$

$$\Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) \end{cases}$$

التمرين الثاني

3

لكتابة a على شكله المثلثي نستعمل نتيجة السؤال (2) أ) لدينا: $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$a = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right) e^{i\frac{\pi}{6}} = \left[\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}; \frac{\pi}{6}\right]$$

ولكتابة a على شكله الجبري نستعمل القاعدة بين جذري ثلاثية الحدود $z_0 + z_1 = a$

$$a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) \quad \text{إذن}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z_0| \cdot |z_1| = 1 \\ \arg(z_0) + \arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

التمرين الثاني

2

بما أن z_0 حل للمعادلة (E). فإن: $z_0^2 - az_0 + e^{i\frac{\pi}{3}} = 0$

يعني: $(e^{i\theta})^2 - a(e^{i\theta}) + e^{i\frac{\pi}{3}} = 0$

يعني: $e^{2i\theta} - a(e^{i\theta}) + e^{i\frac{\pi}{3}} = 0$

يعني: $a = \frac{e^{2i\theta}}{e^{i\theta}} + \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\theta}}$ يعني: $a(e^{i\theta}) = e^{2i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}}$

يعني: $a = e^{i\theta} + e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}$

فيما يلي سوف نستعين بالخاصية المهمة التالية:

$$e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$a = e^{i\theta} + e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)} = 2 \cos\left(\frac{\theta - \left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta + \left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{2}\right)}$$

$$= 2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

في حالة جهلنا بالخاصية المذكورة. يمكن أن نجيب كما يلي:

$$a = e^{i\theta} + e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= e^{i\theta} + (e^{-i\theta}) \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right) \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$$

$$= \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right) \left(e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)} + e^{-i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}\right)$$

$$= \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right) \left(2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

التمرين الثاني

2

نفترض أن $z_0 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ إذن $z_0 = i$

ومنه: $a = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

إذن: $ai = i e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

أثناء الحساب سوف نستعمل الخاصية التالية:

$$e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

لدينا: $1 + ia - a^2 - ia^3 + a^4 + ia^5$

$$= (ai)^0 + (ai)^1 + (ai)^2 + (ai)^3 + (ai)^4 + (ai)^5$$

$$= \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^0 + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^1 + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^5$$

$$= 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} + 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$= 2 + 2e^{i\frac{2\pi}{3}} + 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$= 2 + 2\left(e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)$$

$$= 2 + 2\left(2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}\right) e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)}\right)$$

$$= 2 + 2\left(2 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) e^{i\pi}\right)$$

$$= 2 + 2\left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1)\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
 R(C) = D &\Leftrightarrow (z_D - a) = i(z_C - a) \\
 &\Leftrightarrow z_D = i(c - a) + a \\
 &\Leftrightarrow \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{b + i(c - a) + a}{2} \\
 &= \frac{(b + a) + i(c - a)}{2} \\
 &= \frac{(b + a) + i(i(b - a))}{2} \\
 &= \frac{(b + a) - (b - a)}{2} = a
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_B + z_D}{2} = z_A \Leftrightarrow \text{le point } A \text{ est le milieu du segment } [BD]$$

تذكير: تكون المعادلة $ax + by = c$ قابلة للحل في \mathbb{Z}^2 إذا و فقط إذا كان c يقسم $(a \wedge b)$.
مراحل الحل سوف تكون على الشكل التالي:

- تحديد $a \wedge b$ باستعمال (Algorithmme d'Euclide).
 - تحديد حل خاص باستعمال الخوارزمية السابقة عكسيا.
 - استعمال مبرهنة Gauss لتحديد صيغة الحل العام.
- لنحل في \mathbb{Z}^2 المعادلة: (E) : $27x - 31y = 1$.

$$\begin{array}{r|l} 31 & 27 \\ 4 & 1 \end{array} \Rightarrow 4 = 31 - 1 \times 27 \quad (1)$$

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ 3 & 6 \end{array} \Rightarrow 3 = 27 - 6 \times 4 \quad (2)$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 1 = 4 - 3 \times 1 \quad (3)$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{array} \Rightarrow \text{Stop it right now}$$

نستنتج إذن أن : $31 \wedge 27 = 1$.

لأن القاسم المشترك الأكبر هو آخر باقي غير منعدم في القسامات المتتالية لخوارزمية أقليدس.
نلاحظ بسداجة أن 1 يقسم 1. إذن حسب التذكير نستنتج أن المعادلة (E) تقبل حولا في \mathbb{Z}^2 .

لنحدد الآن حلا خاصا أو بديهيا للمعادلة باستعمال المتساويات (1) و (2) و (3)

$$\begin{aligned}
 (3) &\Leftrightarrow 1 = 3 - 3 \times 1 \\
 &\Leftrightarrow 1 = 4 - 1(27 - 6 \times 4) ; d'après(2) \\
 &\Leftrightarrow 1 = 4 - 27 - 6 \times 4 \\
 &\Leftrightarrow 1 = 7 \times 4 - 27 \\
 &\Leftrightarrow 1 = 7 \times (31 - 27) - 27 ; d'après(1) \\
 &\Leftrightarrow 1 = 7 \times 31 - 7 \times 27 - 27 \\
 &\Leftrightarrow 1 = 7 \times 31 - 8 \times 27 \\
 &\Leftrightarrow 1 = 27 \times (-8) - 31 \times (-7)
 \end{aligned}$$

إذن الزوج $(-8; -7)$ حل خاص للمعادلة السابقة (E).

ليكن (x, y) الحل العام للمعادلة (E) و ننتقل من النظمة التالية:

$$\begin{cases} (x, y) \text{ est solution} \\ (-8; -7) \text{ est solution} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27x - 31y = 1 \\ 27(-8) - 31(-7) = 1 \end{cases}$$

لدينا R تحويل مُعرف بما يلي:

$$\begin{aligned}
 R : (\mathcal{P}) &\rightarrow (\mathcal{P}) \\
 M(z) &\rightarrow M' \left(iz + \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{6}} \right)
 \end{aligned}$$

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى و $M'(z')$ صورتها بالتحويل R .

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' = iz + \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{6}}$$

لكي يكون R دوراناً و يجب علينا البحث عن عدد عقدي ω و زاوية θ

حيث $(z' - \omega) = e^{i\theta}(z - \omega)$.

و سوف نستعمل أثناء الحساب القاعدة التالية.

$$e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z' = iz + \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{6}} \\ z' = e^{i\theta} \cdot z - e^{i\theta} \omega + \omega \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\theta} = i \\ \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{6}} = -e^{i\theta} \omega + \omega \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\theta} = i = e^{\frac{i\pi}{2}} \\ \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{6}} = \omega(1 - i) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\theta} = i = e^{\frac{i\pi}{2}} \\ \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{6}} = \omega \left(e^{i0} - e^{-i\pi} e^{\frac{i\pi}{2}} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\theta} = i = e^{\frac{i\pi}{2}} \\ \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{6}} = \omega \left(e^{i0} - e^{-\frac{i\pi}{2}} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\theta} = i = e^{\frac{i\pi}{2}} \\ \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{6}} = \omega \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) e^{-\frac{i\pi}{4}} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\theta} = i = e^{\frac{i\pi}{2}} \\ \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{6}} = \omega \left(\sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \omega = \left(\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \omega = e^{-\frac{i\pi}{6} + \frac{i\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}} = a \end{cases}$$

إذن التحويل R عبارة عن دوران مركزه $a = e^{i\frac{\pi}{12}}$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
 R(B) = C &\Leftrightarrow (z_C - a) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_B - a) \\
 &\Leftrightarrow (c - a) = i(b - a)
 \end{aligned}$$

- الطريقة الذكية:** ليكن a عنصراً من E حيث $27a \equiv 1 [31]$.
- إذن العدد 31 يقسم الفرق $(27a - 1)$.
- يوجد إذن b من \mathbb{Z} بحيث: $27a - 1 = 31b$.
- أي أن $27a - 31b = 1$.
- يعني أن الزوج (a, b) حل للمعادلة (E) .
- يوجد إذن k من \mathbb{Z} بحيث: $a = 31k - 8$ و $b = 27k - 7$.
- سوف نهتم فقط بالمتساوية $a = 31k - 8$.
- بما أن $a \in E$ فإن $0 \leq a \leq 30$.
- ومنه: $0 \leq 31k - 8 \leq 30$ و $k \in \mathbb{Z}$.
- أي: $8 \leq 31k \leq 38$ و $k \in \mathbb{Z}$.
- أي: $\frac{8}{31} \leq k \leq \frac{38}{31}$ و $k \in \mathbb{Z}$.
- أي: $0,25 \leq k \leq 1,22$ و $k \in \mathbb{Z}$.
- إذن العدد الوحيد الذي يحقق هذين الشرطين في آن واحد هو $k = 1$.
- ومنه: $a = 31k - 8 = 31 - 8 = 23$.
- إذن العدد a من E الذي يحقق $27a \equiv 1 [31]$ هو العدد 23.

التمرين الثالث



لدينا التطبيق f معرف بما يلي:

$$f : E \rightarrow E$$

$$n \rightarrow f(n); 27n + 4 \equiv f(n) [31]$$

- لنبين أن: $\forall (m, n) \in E^2; f(m) = f(n) \Leftrightarrow m = n$.
- أو بتعبير آخر لنبين أن التطبيق f تبايني.
- ليكن m و n عنصريين من E .
- في البداية نلاحظ أن $m \leq 30$ و $n \leq 30$.
- إذن $(m - n) \leq 30$ يعني $(m - n) < 31$ (*)
- نفترض أن: $f(m) = f(n)$. لدينا: $27m + 4 \equiv f(m) [31]$
- $$27m + 4 \equiv 27n + 4 [31]$$
- بما أن: $f(m) = f(n)$ فإن: $27m + 4 \equiv 27n + 4 [31]$
- ومنه: $27m \equiv 27n [31]$.
- يعني أن 31 يقسم الجداء $27(m - n)$.
- و بما أن $27 \wedge 31 = 1$ فإنه حسب Gauss نستنتج أن 31 يقسم $(m - n)$.
- نلاحظ أن 31 يقسم عدداً أصغر منه و هو العدد $(m - n)$ حسب (*).
- إذن بالضرورة: $(m - n) = 0$ أي $m = n$.
- نتمكن بذلك من الحصول على الإستلزام التالي:

$$\forall (m, n) \in E^2; f(m) = f(n) \Rightarrow m = n$$

- عكسياً:** ليكن m و n عنصريين من E حيث $m = n$.
- إذن: $m \equiv n [31]$ و منه: $27m \equiv 27n [31]$.
- يعني: $27m + 4 \equiv 27n + 4 [31]$.
- إذن: $f(m) \equiv f(n) [31]$.
- يعني أن 31 يقسم الفرق $(f(m) - f(n))$.
- من جهة أخرى f تطبيق من E نحو E .
- إذن: $f(m) \in E$ و $f(n) \in E$.
- أي: $f(m) \leq 30$ و $f(n) \leq 30$.
- و منهما نستنتج أن $f(m) - f(n) < 31$.
- نلاحظ أن 31 يقسم عدداً أصغر منه و هو العدد $(f(m) - f(n))$.
- إذن: $(f(m) - f(n)) = 0$. أي: $f(m) = f(n)$.

و بذلك نحصل على الإستلزام التالي:

$$\forall (m, n) \in E^2; m = n \Rightarrow f(m) = f(n)$$

و من الإستلزامين (■) و (■) نستنتج التكافؤ التالي:

$$\forall (m, n) \in E^2; f(m) = f(n) \Leftrightarrow m = n$$

و بالتالي f تطبيق تبايني من E نحو E .

نجز عملية الطرح بين هاتين المتساويتين نجد:

$$27(x + 8) - 31(y + 7) = 0$$

يعني: $27(x + 8) = 31(y + 7)$ (*)

- نستنتج إذن أن 27 يقسم الجداء $31(y + 7)$.
- و بما أن 27 و 31 أوليان فيما بينهما $(31 \wedge 27 = 1)$.
- فإنه حسب Gauss نستنتج أن 27 يقسم $(y + 7)$.
- يوجد إذن $ke \in \mathbb{Z}$ بحيث: $(y + 7) = 27k$.
- ومنه: $y = 27k - 7$.
- نعوض y بـ $(27k - 7)$ في الكتابة (*) نحصل على:
- $$27(x + 8) = 31(27k)$$
- يعني: $(x + 8) = 31k$. إذن: $x = 31k - 8$.
- و بالتالي نستنتج أنه إذا كان (x, y) حلاً للمعادلة في \mathbb{Z}^2 ، فإنه بالضرورة سوف يُكتب على شكل $(31k - 8; 27k - 7)$ مع $k \in \mathbb{Z}$.
- عكسياً: لنبين أن جميع الأزواج من \mathbb{Z}^2 المكتوبة على شكل $(31k - 8; 27k - 7)$ هي حلول للمعادلة (E) .
- نعوض x و y على التوالي بكلٍ من $(31k - 8)$ و $(27k - 7)$ في (E) (you can check that, they really satisfy it)

لدينا: $27(31k - 8) - 31(27k - 7)$

$$= 837k - 216 - 837k + 217$$

$$= 217 - 216$$

$$= 1$$

- إذن بالفعل، كل زوج $(31k - 8; 27k - 7)$ من \mathbb{Z}^2 حيث $k \in \mathbb{Z}$ هو حل للمعادلة (E) .
- و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي:

$$S = \{ (31k - 8; 27k - 7); k \in \mathbb{Z} \}$$

التمرين الثاني



لدينا: $E = \{0; 1; 2; \dots; 30\}$.

- لتحديد a من E حيث $27a \equiv 1 [31]$ أقترح طريقتين إحداهما صحيحة لكنها غيبية والأخرى صحيحة و ذكية.
- الطريقة الغيبية:** بالاستعانة بالآلة الحاسبة لدينا:

$$27 \times 0 \equiv 0 [31]$$

$$27 \times 1 \equiv 27 [31]$$

$$27 \times 2 \equiv 23 [31]$$

$$27 \times 3 \equiv 19 [31]$$

$$27 \times 4 \equiv 15 [31]$$

$$27 \times 5 \equiv 11 [31]$$

$$27 \times 6 \equiv 7 [31]$$

$$27 \times 7 \equiv 3 [31]$$

$$27 \times 8 \equiv 30 [31]$$

$$27 \times 9 \equiv 26 [31]$$

$$27 \times 10 \equiv 22 [31]$$

$$27 \times 11 \equiv 18 [31]$$

$$27 \times 12 \equiv 14 [31]$$

$$27 \times 13 \equiv 10 [31]$$

$$27 \times 14 \equiv 6 [31]$$

$$27 \times 15 \equiv 2 [31]$$

$$27 \times 16 \equiv 29 [31]$$

$$27 \times 17 \equiv 25 [31]$$

$$27 \times 18 \equiv 21 [31]$$

$$27 \times 19 \equiv 17 [31]$$

$$27 \times 20 \equiv 13 [31]$$

$$27 \times 21 \equiv 9 [31]$$

$$27 \times 22 \equiv 5 [31]$$

$$27 \times 23 \equiv 1 [31]$$

$$27 \times 24 \equiv 28 [31]$$

$$27 \times 25 \equiv 24 [31]$$

$$27 \times 26 \equiv 20 [31]$$

$$27 \times 27 \equiv 16 [31]$$

$$27 \times 28 \equiv 12 [31]$$

$$27 \times 29 \equiv 8 [31]$$

$$27 \times 30 \equiv 4 [31]$$

- إذن العدد a من E الذي يُحقق $27a \equiv 1 [31]$ هو العدد 23.
- هذه الطريقة رغم غيبتها فهي تُعطينا صورة واضحة للتقابل f من E نحو E المعروف في الأسئلة الموالية.

إن f متصلة في الصفر .

لندرس اتصال الدالة f على يمين -1 . من جهة أولى لدينا :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{t \ln t}{t-1} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t-1} \right) (t \ln t) = (-1)(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \exp \left(\frac{(x+1) \ln(x+1)}{x} \right) : \text{ إذن}$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t=x+1}} \exp \left(\frac{t \ln t}{t-1} \right)$$

$$= e^0 = 1 = f(-1)$$

إن f دالة متصلة على يمين -1 .

التمرين الرابع

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left(\frac{(x+1) \ln(x+1)}{x} \right) : \text{ لدينا}$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t=x+1}} \exp \left(\frac{t \ln t}{t-1} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp \left(\left(\frac{t}{t-1} \right) (\ln t) \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right) \exp \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \right) : \text{ لدينا}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \exp \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{x+1}{x+1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \exp \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right) \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) \right)$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t=x+1}} \left(1 + \frac{1}{t-1} \right) \exp \left(\left(1 + \frac{1}{t-1} \right) \frac{\ln t}{t} \right)$$

$$= (1+0)e^{(1+0)(0)} = 1$$

التمرين الرابع

سوف نستعمل الصيغة الأولى للدالة f .

$$f(x) - x = (x+1)e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - x$$

$$= x e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} + e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - x$$

$$= x \left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - 1 \right) + e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$

التمرين الرابع

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{x+1}{x+1} : \text{ من جهة أولى لدينا}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t=x+1}} \left(\frac{\ln t}{t} \right) \left(1 + \frac{1}{t-1} \right)$$

$$= (0)(1+0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - 1 \right) + e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - 1}{\frac{\ln(x+1)}{x}} \right) \ln(x+1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$

التمرين الثالث

2 II

ليكن m عنصرا من E .

و لنحل في E المعادلة $f(n) = m$ ذات المجهول n .

$$\text{لدينا : } \begin{cases} f(n) = m \\ 27n + 4 \equiv m \end{cases} [31] \text{ إذن : } \begin{cases} f(n) = m \\ 27n + 4 \equiv f(n) \end{cases} [31]$$

أي : $27n \equiv (m-4) [31]$.

نضرب طرفي هذه المتوافقة في العدد a نجد :

$$(1) \quad 27an \equiv a(m-4) [31]$$

من جهة أخرى لدينا : $27a \equiv 1 [31]$.

إذن : $(\forall n \in E) ; 27an \equiv n [31]$ (2)

من المتوافتين (1) و (2) نستنتج أن : $n \equiv a(m-4) [31]$.

أي : $a = 23$ لأن $n \equiv 23(m-4) [31]$.

$$\text{نستنتج إذن أن : } \begin{cases} n \equiv 23(m-n) [31] \\ f(n) = m \end{cases} (\forall m \in E), (\exists n \in E) ;$$

و هذا يعني أن التطبيق f شمولي من E نحو E .

التمرين الثالث

2 II

رأينا فيما سبق أن التطبيق f ثنائي و شمولي من E نحو E .

إذن f تقابل من E نحو E و تقابله العكسي f^{-1} نستنتج من حل المعادلة $f(m) = n$.

f^{-1} سوف يكون إذن معرفا بما يلي :

$$f^{-1} : E \rightarrow E$$

$$m \rightarrow f^{-1}(m) ; 23(m-4) \equiv f^{-1}(m) [31]$$

$$(\forall n \in E), (\exists ! m \in E) : 27n + 4 \equiv m [31]$$

$$\Leftrightarrow 23(m-4) \equiv n [31]$$

خلاصة التمرين :

فيما يلي أمثلة لصور بعض عناصر المجموعة E بالتطبيقات f و f^{-1} (للاستئناس فقط)

$$\begin{array}{c|c} f & \\ \hline 8 & \rightarrow 3 \\ 11 & \rightarrow 22 \\ 13 & \rightarrow 14 \end{array} \quad et \quad \begin{array}{c|c} f^{-1} & \\ \hline 6 & \rightarrow 15 \\ 19 & \rightarrow 4 \\ 23 & \rightarrow 3 \end{array}$$

التمرين الرابع

1 I

ليكن x عنصرا من $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$.

$$f(x) = (x+1)e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} = e^{\ln(x+1)} \cdot e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$

$$= e^{\left(\ln(x+1) + \frac{\ln(x+1)}{x} \right)} = e^{\frac{x \ln(x+1) + \ln(x+1)}{x}}$$

$$= e^{\frac{(x+1) \ln(x+1)}{x}}$$

التمرين الرابع

1 I

لندرس اتصال الدالة f في الصفر . من جهة أولى لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \right) = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t=x+1}} \left(\frac{\ln t}{t-1} \right) = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{\ln t - \ln 1}{t-1} \right)$$

$$= (\ln t)' /_{t=1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{(x+1) \ln(x+1)}{x}} : \text{ إذن}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left((x+1) \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \right) \right)$$

$$= e^{(0+1)(1)} = e = f(0)$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_0^x + [\ln(1+t)]_0^x$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)$$

التمرين الرابع

4 I

ليكن t عنصرا من المجال $\left[\frac{-1}{2}; +\infty \right]$

$$t \geq \frac{-1}{2} \Rightarrow (t+1) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{t+1} \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{t^2}{t+1} \leq 2t; \text{ avec } t^2 > 0$$

التمرين الرابع

4 I

ليكن x و t عنصريين من المجال $\left[\frac{-1}{2}; +\infty \right]$

$$t \geq \frac{-1}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{t^2}{1+t} \leq 2t^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t} \right) dt \leq \int_0^x 2t^2 dt$$

car ces fonctions sont continues et $0 \leq x$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t} \right) dt \leq 2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t} \right) dt \leq \frac{2x^3}{3}$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t} \right) dt \right| \leq \frac{2}{3} |x^3|$$

التمرين الرابع

4 I

من خلال نتيجة السؤال (4) لدينا:

$$\left(\forall x \geq \frac{-1}{2} \right); \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t} \right) dt = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

$$\left(\forall x \geq \frac{-1}{2} \right); \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t} \right) dt - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t} \right) dt - \frac{1}{2}$$

ولدينا كذلك حسب نتيجة السؤال (4) ج: $\frac{1}{x^2} \left| \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t} \right) dt \right| \leq \frac{2}{3} |x^3|$

إذن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left| \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t} \right) dt \right| = 0$

يعني: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t} \right) dt = 0$

وبالتالي: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \right) = \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t} \right) dt - \frac{1}{2}$

$$= \frac{-1}{2}$$

$$= \left(\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) \right) + e^0$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - e^0}{t - 0} \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) \right) + 1$$

$$= (e^t)'_{/t=0} \times (+\infty) + 1$$

$$= e^0(+\infty) + 1 = +\infty$$

ملاحظة: ربما سلكت طريقا طويلا لحساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ وقد توجد طريقة أسهل مما اقترحت سابقا. إبحث عن تلك الطريقة وأرسلها عبر رسالة قصيرة للفوز بسيارة رائعة. هاهاهاهاهاها

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x = +\infty \end{cases}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية:

نستنتج إذن أن (C_f) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (أي المُنصّف الأول للمعلم) (la première bissectrice). بجوار $+\infty$.

التمرين الرابع

3 I

في البداية لدينا:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{t \ln t}{t-1} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t-1} \right) (t \ln t) = \left(\frac{1}{0-1} \right) (0) = 0$$

إذن: $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{e^{\frac{(x+1) \ln(x+1)}{x}} - 1}{x+1} \right)$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\left(\frac{t \ln t}{t-1} \right)} - 1}{t} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\left(\frac{t \ln t}{t-1} \right)} - 1}{\left(\frac{t \ln t}{t-1} \right)} \right) \left(\frac{\ln t}{t-1} \right)$$

$$= \lim_{m \rightarrow 0} \left(\frac{e^m - 1}{m} \right) \times \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln t}{t-1} \right)$$

$$= \lim_{m \rightarrow 0} \left(\frac{e^m - e^0}{m - 0} \right) \times \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t-1} \right) (\ln t)$$

$$= (e^m)'_{/m=0} \times \left(\frac{1}{0-1} \right) (-\infty)$$

$$= e^0 \times (-1)(-\infty) = +\infty$$

و تأويل ذلك هندسيا هو أن المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $(-1, 1)$ موجه نحو الأعلى.

التمرين الرابع

4 I

ليكن x عنصرا من المجال $\left[\frac{-1}{2}; +\infty \right]$

$$\int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t} \right) dt = \int_0^x \left(\frac{t^2 - 1 + 1}{1+t} \right) dt$$

$$= \int_0^x \left(\frac{t^2 - 1}{t+1} \right) dt + \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$= \int_0^x \frac{(t-1)(t+1)}{t+1} dt + \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$= \int_0^x (t-1) dt + \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} \right) dt$$

تعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بما يلي :

$$g(x) = x - \ln(x + 1)$$

رأينا من خلال ما سبق أن الدالة $\ln(x + 1)$ قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ لأنها قابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقطه
 إذن الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-1; +\infty[$ لأنها فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$. ولدنيا :

$$(\forall x > -1) ; g'(x) = (x - \ln(x + 1))' = 1 - (\ln(x + 1))' \\ = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

من أجل $x > -1$ لدينا $x + 1 > 0$.
 إذن إشارة $g'(x)$ متعلقة بإشارة $x + 1 > 0$.

إذا كان $x = 0$ فإن $g'(x) = 0$.

إذا كان $x > 0$ فإن $g'(x) > 0$.

إذا كان $x < 0$ فإن $g'(x) < 0$.

نضيف نهايتي الدالة g عند -1 و عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x - \ln(x + 1)) \text{ : ولدنيا :} \\ = \lim_{t \rightarrow 0^+} ((t - 1) - \ln t) \\ = 0 - 1 - \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t \right) \\ = -1 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x + 1)) \text{ : ولدنيا :} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(x + 1)}{x} \right) \\ = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t - 1) \left(1 - \frac{\ln t}{t - 1} \right) \\ = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t - 1) \left(1 - \left(\frac{\ln t}{t} \right) \left(\frac{t}{t - 1} \right) \right) \\ = (+\infty - 1)(1 - (0)(1)) = +\infty$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
g	$+\infty$		$+\infty$

و من خلال هذا الجدول الجميل نلاحظ أن 0 قيمة دنوية للدالة g على المجال $]-1; +\infty[$. لأن g تناقصية على المجال $]-1; 0[$ و تزايدية على المجال $]0; +\infty[$ و $g(0) = 0$.

إذن : $(\forall x \in]-1; +\infty[) ; g(x) \geq 0$.

توجد طريقة أخرى للجواب و هي كالآتي :

على المجال $]-1; 0[$ ، لدينا g دالة تناقصية .

إذن : $x \leq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0) \Rightarrow g(x) \geq 0$.

و على المجال $]0; +\infty[$ ، لدينا g دالة تزايدية .

إذن : $x \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0) \Rightarrow g(x) \geq 0$.

و بالتالي : $(\forall x \in]-1; +\infty[) ; g(x) \geq 0$.

ليكن x عنصرا من $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$.

$$f'(x) = \left((x + 1)e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \right)' \\ = (x + 1)' \left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \right) + (x + 1) \left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \right)'$$

لنبين في البداية أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 1) \ln(x + 1)}{x} = 1$$

تذكير : إذا كانت g دالة معرفة على مجال I و قابلة للاشتقاق في عنصر x_0 من I ، و كانت f دالة معرفة على مجال J يضم $g(x_0)$ ، و قابلة للاشتقاق في $g(x_0)$ فإن الدالة $f \circ g$ قابلة للاشتقاق x_0 و نكتب :

$$(f(g(x)))'_{/x=x_0} = g'(x_0) \times f'(g(x_0)) \\ = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \right)$$

سوف نستغل هذا التذكير لحساب النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x + 1)}{x} \right)$.

نضع : $f : x \rightarrow \ln x$ و $g : x \rightarrow x + 1$.

لدينا g دالة حدودية معرفة على \mathbb{R} و قابلة للاشتقاق في 0 .

و لدينا الدالة \ln معرفة على \mathbb{R}_+ الذي يضم $g(0) = 1$.

و هي قابلة للاشتقاق في $g(0) = 1$.

إذن حسب التذكير : الدالة $f \circ g$ قابلة للاشتقاق في 0 و نكتب :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x + 1) - \ln(0 + 1)}{x - 0} \right) \\ = (\ln(x + 1))'_{/t=0} = \left(\frac{1}{1+x} \right)_{/t=0} = 1$$

لنحسب بعد ذلك النهاية الأخرى :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 1) \ln(x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \ln(x + 1) - \ln(x + 1)}{x} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln(x + 1) + \frac{\ln(x + 1)}{x} \right) \\ = 0 + 1 = 1$$

نستعمل إذن هاتين النهايتين و النهاية المحصل عليها من خلال نتيجة السؤال (4 د) للإجابة على السؤال المطروح .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\frac{(x+1) \ln(x+1)}{x}} - e}{x} \right) \text{ : ولدنيا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\frac{(x+1) \ln(x+1)}{x}} - e^1}{(x + 1) \ln(x + 1) - 1} \right) \left(\frac{(x + 1) \ln(x + 1) - 1}{x} \right) \\ = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{e^t - e^1}{t - 1} \right) \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x + 1) \ln(x + 1) - x}{x^2} \right)$$

$$= e^1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x + 1)}{x} + \frac{\ln(x + 1) - x}{x^2} \right) \\ = e \times \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x + 1) - x}{x^2} \right) \right) \\ = e \times \left(1 + \frac{-1}{2} \right) = \frac{e}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \frac{e}{2} \text{ : وبالتالي}$$

و هذا يعني أن f قابلة للاشتقاق في الصفر و العدد المشتق عند 0 هو $\frac{e}{2}$.
 أو بتعبير آخر : منحني الدالة f يقبل ، عند النقطة ذات الأضلاع 0 ، مماسا ميله $\frac{e}{2}$.

ملاحظة : قد تبدو بعض الطرق التي أسلكها في حساب بعض النهايات طويلة . لكن هذا لا يمنع من وجود طرق بسيطة للحساب و التي أجعلها حاليا . أو بتعبير واضح : this is my best .

التمرين الرابع

1 II

يكفي أن ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$ على المجال $[0; +\infty[$.
في البداية لدينا لكل x من $[0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) - x &= (x+1)e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - x \\ &= (x+1)e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - x e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} e^{-\frac{\ln(x+1)}{x}} \\ &= e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \left((x+1) - x e^{-\frac{\ln(x+1)}{x}} \right) \\ &= x e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \left(1 - e^{-\frac{\ln(x+1)}{x}} \right) \end{aligned}$$

إذن: $x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1$
 $\Rightarrow \ln(x+1) \geq 0$
 $\Rightarrow \frac{\ln(x+1)}{x} \geq 0$ et $\frac{-\ln(x+1)}{x} \leq 0$
 $\Rightarrow e^{\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)} \geq 1$ et $e^{\left(\frac{-\ln(x+1)}{x}\right)} \leq 1$
 $\Rightarrow e^{\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)} \geq 1$ et $1 - e^{\left(\frac{-\ln(x+1)}{x}\right)} \geq 0$
 $\Rightarrow x e^{\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)} \left(1 - e^{\left(\frac{-\ln(x+1)}{x}\right)} \right) \geq 0$
 $\Rightarrow f(x) - x \geq 0 ; (\forall x \geq 0)$
 $\Rightarrow (\forall x \geq 0) ; f(x) \geq x$ (*)

التمرين الرابع

1 II

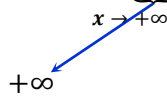
ليكن t عددا حقيقيا من $[0; 1]$. « t est une variable muette »

$$\begin{aligned} x \geq 0 &\Rightarrow xt \geq 0 ; \text{ car } t \geq 0 \\ &\Rightarrow f(xt) \geq xt ; \text{ d'après (*)} \\ &\Rightarrow \int_0^1 f(xt) dt \geq \int_0^1 (xt) dt \\ &\Rightarrow F(x) \geq x \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 \\ &\Rightarrow F(x) \geq \frac{x}{2} \end{aligned}$$

التمرين الرابع

1 II

لدينا: $(\forall x \geq 0) ; F(x) \geq \left(\frac{x}{2}\right)$



إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

التمرين الرابع

2 II

سوف نستعمل مكاملة بتغيير المتغير.
 $F(x) = \int_0^1 f(xu) du ; x \geq 0$

نضع: $t = xu$: إذن $dt = x du$
 إذا كان $u = 0$ فإن $t = 0$
 إذا كان $u = 1$ فإن $t = x$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 f(xu) du ; x \geq 0 \\ &= \int_0^x f(t) \cdot \frac{1}{x} \cdot dt ; x > 0 \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt ; x > 0 \end{aligned}$$

و بالتالي: $\forall x \in]0; +\infty[; F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$

$$\begin{aligned} &= \left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \right) + (x+1) \left(\left(\frac{\ln(x+1)}{x} \right)' \right) e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \\ &= \left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \right) + (x+1) \left(\frac{x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right) e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \\ &= \left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \right) + \left(\frac{x - (x+1) \ln(x+1)}{x^2} \right) e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \\ &= \left(1 + \frac{x - (x+1) \ln(x+1)}{x^2} \right) e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \\ &= \left(\frac{x^2 + x - (x+1) \ln(x+1)}{x^2} \right) e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \\ &= \left(\frac{x(x+1) - (x+1) \ln(x+1)}{x^2} \right) e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \\ &= \frac{(x+1)(x - \ln(x+1))}{x^2} e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \\ &= \left(\frac{(x+1)g(x)}{x^2} \right) e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \end{aligned}$$

التمرين الرابع

5 I

نعلم أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x > 0$

إذن: $\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[; e^x > 0$

و لدينا كذلك: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 > 0$

و لدينا كذلك: $(\forall x > -1) ; (x+1) > 0$

و كذلك: $(\forall x > -1) ; g(x) \geq 0$

يعني: $\forall x \in]-1, 0[\cup]0; +\infty[; g(x) > 0$

إذن $\frac{(x+1)g(x)}{x^2} e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$ كمية موجبة قطعاً على $] -1; 0[\cup]0; +\infty[$

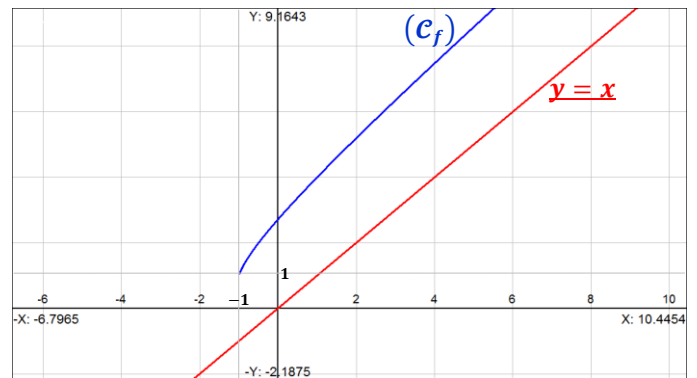
يعني: $\forall x \in]-1, 0[\cup]0; +\infty[; f'(x) > 0$

أي أن الدالة f تزايدية قطعاً على حيز تعريفها

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
f	1	e	$+\infty$

التمرين الرابع

6 I



التمرين الرابع

III 1 أ

ليكن t عددا حقيقيا من المجال $[0; 1]$. وليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .
 $(n + 1) > n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} ; (\forall n \geq 1)$
 $\Leftrightarrow \frac{t}{n+1} \leq \frac{t}{n} ; \text{car } t \geq 0$
 $\Leftrightarrow f\left(\frac{t}{n+1}\right) \leq f\left(\frac{t}{n}\right) ; \text{car } f \text{ est } \nearrow$
 $\Rightarrow \int_0^1 f\left(\frac{t}{n+1}\right) dt \leq \int_0^1 f\left(\frac{t}{n}\right) dt$
car ces fonctions sont continues et $0 < 1$
 $\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n ; (\forall n \geq 1)$
 $\Rightarrow (u_n)_{n \geq 1} \text{ est une suite décroissante}$

التمرين الرابع

III 1 ب

ليكن t عددا حقيقيا من المجال $[0; 1]$. وليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .
 $\begin{cases} t \geq 0 \\ n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{t}{n} \geq 0$
 $\Rightarrow f\left(\frac{t}{n}\right) \geq f(0) ; \text{car } f \text{ est } \nearrow$
 $\Rightarrow f\left(\frac{t}{n}\right) \geq e$
 $\Rightarrow \int_0^1 f\left(\frac{t}{n}\right) dt \geq \int_0^1 e dt$
car ces fonctions sont continues et $0 < 1$
 $\Rightarrow u_n \geq e [t]_0^1 ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$
 $\Rightarrow u_n \geq e ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$
 و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \geq e$

التمرين الرابع

III 2 أ

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم . و سوف نستعمل تقنية المكاملة بتغيير المتغير .

$$u_n = \int_0^1 f\left(\frac{y}{n}\right) dy ; \left(\begin{array}{l} y \text{ est une} \\ \text{variable} \\ \text{muette} \end{array} \right)$$

نضع : $\frac{y}{n} = t$. إذن : $dy = n dt$.
 إذا كان $y = 0$ فإن $t = 0$.
 إذا كان $y = 1$ فإن $t = \frac{1}{n}$.

$$u_n = \int_0^1 f\left(\frac{y}{n}\right) dy = \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) \cdot n \cdot dt = n \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt$$

التمرين الرابع

II 2 ب

تذكير : إذا كانت g دالة متصلة على مجال I و $a \in I$ فإن الدالة :

$$G : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \int_a^x g(t) dt$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة g على المجال I .
 رأينا حسب ما سبق أن الدالة f متصلة على $[0, +\infty[$ و $0 \in [0, +\infty[$

$$G : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \int_a^x g(t) dt$$

إذن الدالة :

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال $[0; +\infty[$.
 و هذا يعني أن الدالة G قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$.
 و لدينا : $G'(x) = f(x) ; (\forall x \geq 0)$.

$$(\forall x > 0) ; F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

$$(\forall x > 0) ; F(x) = \frac{1}{x} \cdot G(x)$$

إذن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} (\forall x > 0) ; F'(x) &= \left(\frac{1}{x} \cdot G(x) \right)' \\ &= \left(\frac{1}{x} \right)' G(x) + \frac{1}{x} G'(x) \\ &= \left(\frac{-1}{x^2} \right) G(x) + \left(\frac{1}{x} \right) f(x) \\ &= \frac{1}{x} \left(f(x) - \frac{1}{x} G(x) \right) \\ &= \frac{1}{x} (f(x) - F(x)) \end{aligned}$$

و لدينا :

التمرين الرابع

II 2 ج

ليكن t عددا حقيقيا من المجال $[0; 1]$ و x عدد حقيقي موجب .

$$\begin{aligned} t \in [0, 1] &\Rightarrow 0 \leq t \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq xt \leq x ; \text{car } x \geq 0 \\ &\Rightarrow f(0) \leq f(xt) \leq f(x) ; \text{car } f \text{ est } \nearrow \\ &\Rightarrow e \leq f(xt) \leq f(x) \\ &\Rightarrow \int_0^1 e dt \leq \int_0^1 f(xt) dt \leq \int_0^1 f(x) dt \\ &\quad \text{car ces fonctions sont continues et } 0 < 1 \\ &\Rightarrow e [t]_0^1 \leq F(x) \leq f(x) [t]_0^1 \\ &\Rightarrow e \leq F(x) \leq f(x) \end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall x \geq 0) ; e \leq F(x) \leq f(x)$

التمرين الرابع

II 2 د

لدينا : $(\forall x > 0) ; F'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - F(x))$
 و نعلم أن : $(\forall x \geq 0) ; F(x) \leq f(x)$
 إذن : $(\forall x \geq 0) ; f(x) - F(x) \geq 0$
 يعني : $(\forall x > 0) ; \frac{1}{x} (f(x) - F(x)) \geq 0$
 يعني : $(\forall x > 0) ; F'(x) \geq 0$
 يعني أن الدالة F تزايدية على المجال $]0; +\infty[$.

نعلم أن : $(\forall x \geq 0) ; e \leq F(x) \leq f(x)$

و نعلم أن : $(\forall x > 0) ; F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$

لدينا $n \geq 1 > 0$ إذن $\frac{1}{n} \geq 0$. نستطيع إذن تعويض x بـ $\frac{1}{n}$ نجد :

$$(\forall n \geq 1) ; \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$$

يعني : $(\forall n \geq 1) ; n \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$

و منه حسب نتيجة السؤال (2) أ) نستنتج أن :

$$(\forall n \geq 1) ; u_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$$

لدينا حسب السؤال (1) ب) : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \geq e$

و لدينا حسب السؤال (2) ب) : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \geq f\left(\frac{1}{n}\right)$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; e \leq u_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$

On fait tendre n vers l'infini on obtient

$$e \leq u_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$
 $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى العدد الجميل e .

أجوبة امتحان مدينة بني ملال 2008

التمرين الأول

1

ليكن t عددا حقيقيا مخالفا للعدد -1 . أقترح طريقتين في الجواب.
الطريقة الأولى: استعمال القسمة الإقليدية.

$$\begin{array}{r} t^3 + t \\ t^3 + t^2 \\ \hline t - t^2 \\ -t^2 - t \\ \hline 2t \\ 2t + 2 \\ \hline -2 \end{array} \quad \begin{array}{r} t + 1 \\ t^2 - t + 2 \end{array}$$

$$\frac{t^3 + t}{t + 1} = (t^2 - t + 2) - \frac{2}{t + 1} \quad \text{إذن :}$$

الطريقة الثانية: ننطلق من الطرف الأيمن ونحاول الوصول إلى الطرف الأيسر.

$$\text{لدينا :} \quad (t^2 - t + 2) - \frac{2}{t + 1} = \frac{(t + 1)(t^2 - t + 2) - 2}{(t + 1)} = \frac{t^3 + t}{t + 1}$$

التمرين الأول

1

$$I = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} \right) dx \quad \text{لنحسب التكامل التالي :}$$

نستعين بتقنية تغيير المتغير ونضع : $t = \sqrt{x-1}$.

$$\text{إذن :} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \quad \text{ومنه :} \quad dx = 2t dt$$

إذا كان : $x = 1$. فإن : $t = \sqrt{x-1}$.

إذا كان : $x = 2$. فإن : $t = 0$.

إذا كان : $x = 2$. فإن : $t = 1$.

إذن التكامل يصبح :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{t^2 + 1}{1 + t} \right) (2t dt) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{t^3 + t}{1 + t} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left((t^2 - t + 2) - \frac{2}{t + 1} \right) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 - \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 + 2[t]_0^1 - 2[\ln|1 + t|]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - 2 \ln 2 \\ &= \frac{11}{6} - \ln 4 \approx 0,45 \end{aligned}$$

التمرين الأول

2

الخاصية التي سوف نستعملها هي التالية :

لتكن f دالة متصلة على المجال $[a, b]$ و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.
المتتالية $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة وتقبل التكامل $\int_a^b f(x) dx$ كنهاية عندما

$$\text{يؤول } n \text{ إلى } +\infty . \quad S_n = \left(\frac{b-a}{n} \right) \sum_{k=1}^n f \left(a + k \left(\frac{b-a}{n} \right) \right) ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \right) \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+k}{\sqrt{n} + \sqrt{k}} \right) \quad \text{لدينا}$$

سوف نحاول إذن إعادة هيكلة هذه المتتالية و إظهار الدالة $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}$

لأنها واردة في السؤال السابق.

$$u_n = \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \right) \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+k}{\sqrt{n} + \sqrt{k}} \right) ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n(1 + \frac{k}{n})}{n + \sqrt{n}\sqrt{k}} \right) ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$= \left(\frac{2-1}{n} \right) \sum_{k=1}^n \left(\frac{n(1 + \frac{k}{n})}{n(1 + \sqrt{\frac{k}{n}})} \right) ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$= \left(\frac{2-1}{n} \right) \sum_{k=1}^n \left(\frac{1 + \frac{k}{n}}{1 + \sqrt{\frac{k}{n}}} \right) ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$= \left(\frac{2-1}{n} \right) \sum_{k=1}^n \left(\frac{1 + \frac{k}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{k}{n} - 1}} \right) ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$= \left(\frac{2-1}{n} \right) \sum_{k=1}^n f \left(1 + \frac{k}{n} \right) ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$= \left(\frac{2-1}{n} \right) \sum_{k=1}^n f \left(1 + k \left(\frac{2-1}{n} \right) \right) ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

الدالة f متصلة على المجال $[1; 2]$ لأنها عبارة عن خارج دالتين

متصلتين على المجال $[1; 2]$.

إذن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة ونهايتها هي التكامل $\int_1^2 f(x) dx$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2-1}{n} \right) \sum_{k=1}^n f \left(1 + k \left(\frac{2-1}{n} \right) \right)$$

$$= \int_1^2 f(x) dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} \right) dx$$

$$= 2I = 2 \left(\frac{11}{6} - \ln 4 \right) \approx 0,9$$

التمرين الثاني

1

لنحل المعادلة التفاضلية (F) التالية : $y'' + 2y' + 2y = 0$

و من أجل ذلك نحل معادلتها المميزة $r^2 + 2r + 2 = 0$.

لدينا $\Delta = (2i)^2$ إذن لهذه المعادلة حلين عقديين مترافقين $r_1 = -1 - i$

و $r_2 = -1 + i$.

و بالتالي المعادلة (F) تقبل حلا و هو جميع الدوال المكتوبة على شكل :

$$y_F(x) = e^{-x} (A \cos x + B \sin x)$$

حيث A و B ثابتين حقيقيين يتم تحديد قيمتهما العدديتين بالاستعانة

بالشروط البدئية إن وجدت .

نسنعين بتقنية المكاملة بالأجزاء لإيجاد التعبير الصريح للدالة f .

$$\begin{aligned} (\forall x > 0) ; f(x) &= \int_1^x \underbrace{t}_{u'} \cdot \underbrace{\ln t}_{v} dt \\ &= [uv] - \int_1^x uv' \\ &= \left[\frac{t^2 \ln t}{2} \right]_1^x - \int_1^x \left(\frac{t^2}{2} \right) \left(\frac{1}{t} \right) dt \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int_1^x t dt \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^x \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

لنحدد الآن صيغتي $f'(x)$ و $f''(x)$.

لدينا : $(\forall x > 0) ; f(x) = \int_1^x (t \ln t) dt$

نلاحظ أن الدالة $\varphi : t \rightarrow t \ln t$ متصلة على \mathbb{R}_+^* .

إذن f عبارة عن دالة أصلية للدالة φ على المجال $]0, +\infty[$.

أو بتعبير آخر : $(\forall x > 0) ; f'(x) = x \ln x$.

ونلاحظ كذلك أن الدالة φ قابلة للاشتقاق بدورها على المجال $]0, +\infty[$ لأنها عبارة عن جداء دالتين اعتياديتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.

ومنه : $(\forall x > 0) ; f''(x) = (x \ln x)' = 1 + \ln x$.

وبذلك نحصل على التعابير التالية : $f(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} f'(x) = x \ln x \\ f''(x) = 1 + \ln x \end{cases}$$

نعوض إذن هذه التعابير في أمكنة y' و y'' في المعادلة (E) نحصل

على : $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x)$

$$\begin{aligned} &= (1 + \ln x) + 2x \ln x + x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \\ &= (1 + 2x + x^2) \ln x - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \\ &= (x + 1)^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

إذن الدالة f حل خاص للمعادلة التفاضلية (E).

لنبين صحة التكافؤ التالي :

$$(y - f) \text{ est solution de } (F) \Leftrightarrow y \text{ est solution de } (E)$$

نطلق إذن من إحدى العبارتين ونحاول الوصول إلى العبارة الثانية.

نفترض أن y حل للمعادلة F .

$$\Leftrightarrow (\forall x > 0) ; (y - f)''(x) + 2(y - f)'(x) + 2(y - f)(x) = y''(x) - f''(x) + 2y'(x) - 2f'(x) + 2y(x) - 2f(x)$$

$$= \left(\begin{array}{l} y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) \\ = 0 ; \text{ car } y \text{ est solu de } (E) \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) \\ = 0 \text{ car } ; f \text{ est solu particuliere} \\ \text{de l'equation } (E) \end{array} \right)$$

$$= 0 - 0 = 0$$

إذن الدالة $(y - f)$ حل للمعادلة (F) .
و بالتالي نحصل على التكافؤ التالي :

$$(y - f) \text{ est solution de } (F) \Leftrightarrow y \text{ est solution de } (E)$$

الحل العام للمعادلة (E) يُكتب على شكل $(y_H + y_p)$ حيث y_H هو حل المعادلة (F) و y_p هو حل خاص للمعادلة (E).

من خلال الأسئلة السابقة نأخذ :

$$y_H = e^{-x}(A \cos x + B \sin x) ; (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

لدينا $y_H = e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$ حل للمعادلة (F).

إذن حسب تكافؤ السؤال ب) نستنتج أن الدالة $(y_H + f)$ حل خاص

للمعادلة (E). نأخذ إذن : $y_H(x) = y_H(x) + f(x)$
 $= e^{-x}(a \cos x + B \sin x) + f(x)$

و بالتالي الحل العام للمعادلة (E) هو جميع الدوال y التي تُكتب على شكل :

$$\begin{aligned} y(x) &= y_p(x) + y_H(x) \\ &= e^{-x}(A \cos x + B \sin x) + f(x) + e^{-x}(A \cos x + B \sin x) \\ &= e^{-x}(A \cos x + B \sin x) + f(x) ; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

ليكن x عنصرا من المجال $[1, 2]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{x+2})' \left(\frac{1}{1 + (\sqrt{x+2})^2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}} \right) \left(\frac{1}{1 + (\sqrt{x+2})^2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}} \right) \left(\frac{1}{x+3} \right) \end{aligned}$$

نلاحظ أن الكمية $\sqrt{x+2}$ موجبة على المجال $[1, 2]$.

إذن : $\forall x \in [1, 2] ; f'(x) > 0$.

يعني أن الدالة f تزايدية قطعاً على المجال $[1, 2]$.

$$x \in [1, 2] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x+2 \leq 4 \\ 4 \leq x+3 \leq 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3} \leq 2\sqrt{x+2} \leq 4 \\ \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x+3} \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x+3} \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{20} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}} \right) \left(\frac{1}{x+3} \right) \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{6\sqrt{3}} < \frac{1}{20} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}} \right) \left(\frac{1}{x+3} \right) \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{6\sqrt{3}} < f'(x) \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

$$(\forall x \in [0, 2]) ; |f'(x)| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}} : \text{ إذن}$$

$$\begin{aligned}
(P_n) \text{ est vraie} &\Rightarrow u_n \in [\alpha; 2] \\
&\Rightarrow \alpha \leq u_n \leq 2 \\
\Rightarrow f(\alpha) \leq f(u_n) \leq f(2) &; \text{ car } f \text{ est } \nearrow \text{ sur } [1,2] \\
\Rightarrow \alpha \leq u_{n+1} \leq \text{Arctan}(2) \\
\Rightarrow \alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{\text{Arctan}(2) \leq 2}{\text{selon } (\text{ع}1)} \\
\Rightarrow \alpha \leq u_{n+1} \leq 2 \\
\Rightarrow u_{n+1} \in [\alpha, 2] \subset [\alpha, 2] \\
\Rightarrow u_{n+1} \in [\alpha, 2] \\
\Rightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie}
\end{aligned}$$

لقد حصلنا على الوضعية الترجيعية التالية: $(P_0) \text{ est vraie}$
 $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N}$

إذن حسب مبدأ التراجع: $(P_n) \text{ est toujours vraie}$
يعني: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in [\alpha, 2]$

التمرين الثالث

ب 2

لدينا الدالة $h(x) = f(x) - x$ دالة تناقصية قطعاً على المجال $[1,2]$
إذن h تناقصية قطعاً على المجال $[\alpha, 2]$ لأن $[\alpha, 2] \subset [1,2]$
ليكن x عنصراً من $[\alpha, 2]$
 $x \in [\alpha, 2] \Rightarrow x \geq \alpha$
 $\Rightarrow h(x) \leq h(\alpha)$; car $h \searrow$ sur $[\alpha, 2]$
 $\Rightarrow f(x) - x \leq 0$; car $f(\alpha) = \alpha$
 $\Rightarrow f(x) \leq x$; $\forall x \in [\alpha, 2]$
 $\Rightarrow f(u_n) \leq u_n$; car $u_n \in [\alpha, 2]$; $\forall n \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante

التمرين الثالث

ج 2

لدينا: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in [\alpha, 2]$
يعني: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq \alpha$

نعتبر إذن المجال $[\alpha, u_n]$ المتواجد ضمن $[1,2]$
لدينا f متصلة وقابلة للاشتقاق على المجال $[1,2]$

إذن f متصلة على المجال $[\alpha, u_n]$ وقابلة للاشتقاق على $[\alpha, u_n]$
نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايد المتناهية على الدالة f في المجال $[\alpha, u_n]$ نستنتج أن $\frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} = f'(c)$

$$\begin{aligned}
\exists c \in]\alpha, u_n[; \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} &= f'(c) \\
\Rightarrow \exists c \in]\alpha, u_n[; \left| \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} \right| &= |f'(c)| \\
\Rightarrow \begin{cases} |f(u_n) - f(\alpha)| = |f'(c)| \times |u_n - \alpha| \\ \alpha < c < u_n \end{cases} \\
\Rightarrow \begin{cases} |u_{n+1} - \alpha| = |f'(c)| \times |u_n - \alpha| \\ \alpha < c < u_n \end{cases} \quad (1)
\end{aligned}$$

لدينا حسب السؤال (1) ب: $\forall x \in [1,2] ; |f'(x)| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$

إذن: $\forall x \in]\alpha, u_n[; |f'(x)| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$

وذلك لأن: $]\alpha, u_n[\subset [1,2]$

لدينا $c \in]\alpha, u_n[$ إذن $|f'(c)| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $|u_n - \alpha|$ نجد:

$$(2) \quad |f'(c)| \times |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}} |u_n - \alpha|$$

من (1) و (2) نستنتج أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}} |u_n - \alpha|$$

التمرين الثالث

ج 1

الخاصية التي سوف نستعملها هي التالية:

- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على المجال $[a, b]$
- و f و g قابلتين للاشتقاق على المجال $]a, b[$
- و $f(a) = g(a)$
- و $\forall x \in]a, b[; f'(x) \leq g'(x)$
- فإن: $\forall x \in [a, b] ; f(x) \leq g(x)$
- نعتبر الدالتين $\varphi(x) = x$ و $\psi(x) = \text{Arctan}(x)$
- لدينا φ و ψ متصلتين على المجال $[0,2]$ (ليس المجال $[1,2]$)
- و φ و ψ قابلتين للاشتقاق على المجال $]0,2[$
- و $\varphi(0) = \psi(0) = 0$

$$\text{و } \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2} \leq 0 \text{ لأن } (\forall x \in I) ; \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

إذن: $(\forall x \in]0,2[) ; \psi'(x) \leq \varphi'(x)$

من النتائج الأربعة نستنتج حسب الخاصية المذكورة

أن: $(\forall x \in]0,2[) ; \psi(x) \leq \varphi(x)$

يعني: $(\forall x \in]0,2[) ; \text{Arctan}(x) \leq x$

و بالتالي: $\text{Arctan}(x) \leq x$ لأن $(\forall x \in [1,2]) ; \text{Arctan}(x) \leq x$

التمرين الثالث

د 1

نعتبر الدالة h على المجال $[1,2]$ بما يلي: $h(x) = f(x) - x$
 h دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[1,2]$ باعتبارها فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $[1,2]$

و لدينا: $\forall x \in [1,2] ; h'(x) = f'(x) - 1$

$$= \frac{1 - 2(x+3)\sqrt{x+2}}{2(x+3)\sqrt{x+2}}$$

لدينا $1 \leq x \leq 2$ إذن: $4 \leq (x+3) \leq 5$

لدينا $1 \leq x \leq 2$ إذن: $\sqrt{3} \leq \sqrt{x+2} \leq 2$

إذن: $-\frac{19}{\text{عد}} \leq 1 - 2(x+3)\sqrt{x+2} \leq \frac{1 - 8\sqrt{3}}{\text{عدسالب}} < 0$

عد
سالب

و بالتالي: $\forall x \in [1,2] ; h'(x) < 0$

يعني أن الدالة h تناقصية قطعاً على المجال $[1,2]$

و بما أنها متصلة على $[1,2]$ فهي تقابل من $[1,2]$ نحو $h([1,2])$

و لدينا:

$$h([1,2]) = [h(2); h(1)] = [\text{Arctan}(2) - 2; \text{Arctan}(\sqrt{3}) - 1]$$

إذن h تقابل من $[1,2]$ نحو $[\text{Arctan}(2) - 2; \text{Arctan}(\sqrt{3}) - 1]$

نعلم أن: $(\forall x \in [1,2]) ; \text{Arctan}(x) \leq x$

إذن: $\text{Arctan}(2) - 2 \leq 0$

و لدينا: $\text{Arctan}(\sqrt{3}) - 1 > 0$ (حسب الآلة الحاسبة)

إذن: $\text{Arctan}(2) - 2 \leq 0 < \text{Arctan}(\sqrt{3}) - 1$

يعني أن: $0 \in [\text{Arctan}(2) - 2; \text{Arctan}(\sqrt{3}) - 1]$

إذن الصفر يمتلك سابقاً واحداً α في المجال $[1,2]$ بالتقابل h .

و ذلك لأن h تقابل من $[1,2]$ نحو $[\text{Arctan}(2) - 2; \text{Arctan}(\sqrt{3}) - 1]$

أو بتعبير آخر: $\exists! \alpha \in [1; 2] ; h(\alpha) = 0$

أي: $\exists! \alpha \in [1; 2] ; f(\alpha) - \alpha = 0$

أي: $\exists! \alpha \in [1; 2] ; f(\alpha) = \alpha$

يعني أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[1,2]$

التمرين الثالث

أ 2

سوف نستعمل البرهان بالتراجع. و من أجل ذلك نعتبر العبارة المنطقية

(P_n) المعرفة بما يلي: $u_n \in [\alpha, 2]$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 2 \in [\alpha, 2]$

إذن العبارة (P_0) صحيحة.

ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً و نفترض أن العبارة (P_n) صحيحة.

من نتيجة السؤال ج نستنتج أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}} |u_{n-1} - \alpha|$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right) \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right) |u_{n-2} - \alpha| \\ &\leq \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right) \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right) \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right) |u_{n-3} - \alpha| \\ &\quad \vdots \\ &\leq \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n |u_{n-n} - \alpha| \end{aligned}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n |2 - \alpha|$$

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6\sqrt{3}}$ و هو عدد موجب

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n = 0 \text{ : إذن من 1 وأصغر}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n |2 - \alpha| = 0 \text{ : ومنه}$$

وبذلك نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n |2 - \alpha|$$

0

أو بتعبير آخر نحصل على الوضعية التالية :

$$-\left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n |2 - \alpha| \leq (u_n - \alpha) \leq \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n |2 - \alpha|$$

0

0

وبالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$$

و هذا يعني أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و تؤول إلى العدد α .

إضافة : لتحديد قيمة عددية للعدد α باستعمال الآلة الحاسبة نتبع المراحل التالية :

- اظبط الآلة على الراديان rad .
- اضغط على [2] ثم [=] (لأن $u_0 = 2$)
- اكتب على الآلة التعبير التالي : $\tan^{-1}(\sqrt{(Ans + 2)})$.
- بعد ذلك اضغط على الزر [=] مرات عديدة و متوالية حتى يستقر العدد الظاهر على الشاشة . و سوف تحصل على ما يلي :

المرة الأولى : 1,107148718

المرة الثانية : 1,054761932

المرة الثالثة : 1,051105133

المرة الرابعة : 1,050846941

المرة الخامسة : 1,050828696

المرة السادسة : 1,050827407

المرة السابعة : 1,050827316

المرة الثامنة : 1,050827310

المرة التاسعة : 1,050827309

المرة العاشرة : 1,050827309

المرة الحادية ع : 1,050827309

و نلاحظ أن هذا العدد قد استقر.

إذن : $\alpha \approx 1,0508827309$.

التمرين الرابع

الطريقة الأولى : نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) = e^x - x - 1$$

لدينا φ دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} بأكمله باعتبارها مجموع دوال قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

ليكن x عنصرا من \mathbb{R} . لدينا : $\varphi'(x) = e^x - 1$.

إذا كان : $x = 0$ فإن : $\varphi'(x) = 0$.

إذا كان : $x > 0$ فإن : $\varphi'(x) > 0$.

إذا كان : $x < 0$ فإن : $\varphi'(x) < 0$.

ولدينا كذلك : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x - 1)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

ولدينا كذلك : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x - 1)$

$$= 0 + \infty - 1 = +\infty$$

ولدينا كذلك : $\varphi(0) = 0$

نلخص إذن دراسة الدالة φ في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+
φ	$+\infty$	0	$+\infty$

من خلال هذا الجدول نلاحظ أن 0 قيمة دنوية للدالة φ على \mathbb{R} بأكمله .

يعني : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) \geq 0$.

يعني : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x - x - 1 \geq 0$.

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq x + 1$.

الطريقة الثانية : نعتبر الدالتين u و v المعرفتين على \mathbb{R} بما يلي

$$u(x) = e^x \text{ و } v(x) = x + 1$$

لدينا u و v دالتين متصلتين و قابلتين للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ لأنهما دالتين اعتياديتين.

ولدينا : $u(0) = v(0) = 1$

$$x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq e^0$$

$$\Rightarrow e^x \geq 1$$

$$\Rightarrow u'(x) \geq v'(x)$$

نستنتج إذن من هذه الأشياء و باستعمال إحدى خاصيات مبرهنة التزايد

المنتهية التي تم التذكير بها في التمرين 3) نستنتج أن :

$$\forall x \in [0; +\infty[; u(x) \geq v(x)$$

لدراسة اشتقاق الدالة f على يمين الصفر 0 نحسب النهاية التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right)$$

ليكن x و t عددا حقيقيين موجبا قطعاً .

$$x > 0 \Rightarrow \ln 2 - \frac{3x^2}{2} \leq f(x) \leq \ln 2$$

$$\Rightarrow \frac{-3x^2}{2} \leq f(x) - \ln 2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-3x}{2} \leq \frac{f(x) - \ln 2}{x} \leq 0 ; x > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-3x}{2} \right) \leq \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) \leq 0 \quad x \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 0 = f'_d(0)$$

$\Rightarrow f$ est dérivable à droite en 0

التمرين الرابع

1 2

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I وكان a عنصرا من المجال I . فإن f تقبل عدة دوال أصلية على المجال I . وبالخصوص f تقبل دالة أصلية F التي تنعدم في a و تحقق ما يلي :

$$\begin{cases} F(a) = 0 \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$F : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

في هذا التمرين، ليكن a عنصرا من المجال $]0, +\infty[$.

نعتبر الدالة العددية u المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$u(t) = \frac{e^{-t^2}}{t} ; \forall t > 0$$

نلاحظ أن الدالة u معرفة و متصلة على المجال $]0, +\infty[$ لأنها خارج دالتين متصلتين على المجال $]0, +\infty[$ و $t \neq 0$.

إذن حسب التذكير : u تقبل عدة دوال أصلية على المجال $]0, +\infty[$. وبالخصوص u تقبل دالة أصلية v على المجال $]0, +\infty[$ والتي تنعدم في a و تحقق ما يلي :

$$\begin{cases} v(a) = 0 \\ v'(x) = u(x) \end{cases}$$

$$v :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \rightarrow \int_a^x u(t) dt$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعريف الدالة f نكتب :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{2x} \left(\frac{e^{-t^2}}{t} \right) dt \\ &= \int_x^a \left(\frac{e^{-t^2}}{t} \right) dt + \int_a^{2x} \left(\frac{e^{-t^2}}{t} \right) dt \\ &= - \int_a^x \left(\frac{e^{-t^2}}{t} \right) dt + \int_a^{2x} \left(\frac{e^{-t^2}}{t} \right) dt \\ &= -v(x) + v(2x) \end{aligned}$$

نحصل إذن على العلاقة التالية : $f(x) = v(2x) - v(x)$; $(\forall x > 0)$. نلاحظ أن الدوال $x \rightarrow x$ و $x \rightarrow 2x$ و v دوال معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$.

إذن الدالة $x \rightarrow v(2x)$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.

و منه f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ باعتبارها فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0, +\infty[$.

يعني : $(1) \forall x \in]0, +\infty[; e^x \geq x + 1$.

و بنفس الطريقة نبين أن : $\forall t \in]0, +\infty[; e^{-t} \geq -t + 1$.

و ذلك بوضع $u(t) = e^{-t}$ و $v(t) = -t + 1$.

نضع $t = -x$ فنحصل على النتيجة التالية .

$$(2) \forall x \in]-\infty, 0] ; e^x \geq x + 1$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq x + 1$

التمرين الرابع

1

ليكن t عددا حقيقيا موجبا قطعاً .

لدينا : $t > 0 \Rightarrow -t^2 < 0$

$$\Rightarrow e^{-t^2} < 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{e^{-t^2}}{t} < \frac{1}{t} \right) (3) ; \text{ avec } t > 0$$

من جهة أخرى لدينا : $t > 0 \Rightarrow t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow -t^2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -t^2 + 1 \leq e^{-t^2} ; d'après (1)$$

$$\Rightarrow \frac{-t^2 + 1}{t} \leq \frac{e^{-t^2}}{t} ; \text{ avec } t > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{t} - t \leq \frac{e^{-t^2}}{t} \right) (4)$$

من (3) و (4) نستنتج أن :

$$(\forall t > 0) ; \left(\frac{1}{t} - t \right) \leq \frac{e^{-t^2}}{t} \leq \left(\frac{1}{t} \right) (\blacksquare)$$

التمرين الرابع

1

ليكن x و t عددا حقيقيين موجبا قطعاً .

$$t > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{t} - t \right) \leq \frac{1}{t} e^{-t^2} \leq \frac{1}{t} ; d'après (\blacksquare)$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - t \right) dt \leq \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} e^{-t^2} \right) dt \leq \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} \right) dt$$

car ces fonctions sont toutes continues et $x < 2x$

$$\Rightarrow \left[\ln|t| - \frac{t^2}{2} \right]_x^{2x} \leq f(x) \leq [\ln|t|]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow \left[\ln(t) - \frac{t^2}{2} \right]_x^{2x} \leq f(x) \leq [\ln(t)]_x^{2x} ; \text{ car } t > 0$$

$$\Rightarrow \left(\ln(2x) - \frac{4x^2}{2} \right) - \left(\ln(x) - \frac{x^2}{2} \right) \leq f(x) \leq \ln(2x) - \ln x$$

$$\Rightarrow \left(\ln\left(\frac{2x}{x}\right) - \frac{3x^2}{2} \right) \leq f(x) \leq \ln\left(\frac{2x}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\ln 2 - \frac{3x^2}{2} \right) \leq f(x) \leq \ln 2$$

التمرين الرابع

1

لدراسة اتصال الدالة f على يمين الصفر 0 نحسب النهاية التالية :

$$x > 0 \Rightarrow \ln 2 - \frac{3}{2}x^2 \leq f(x) \leq \ln 2$$

$$\Rightarrow \left(\ln 2 - \frac{3}{2}x^2 \right) \leq f(x) \leq \frac{(\ln 2)}{x \rightarrow 0^+}$$

$\ln 2$

$\ln 2$

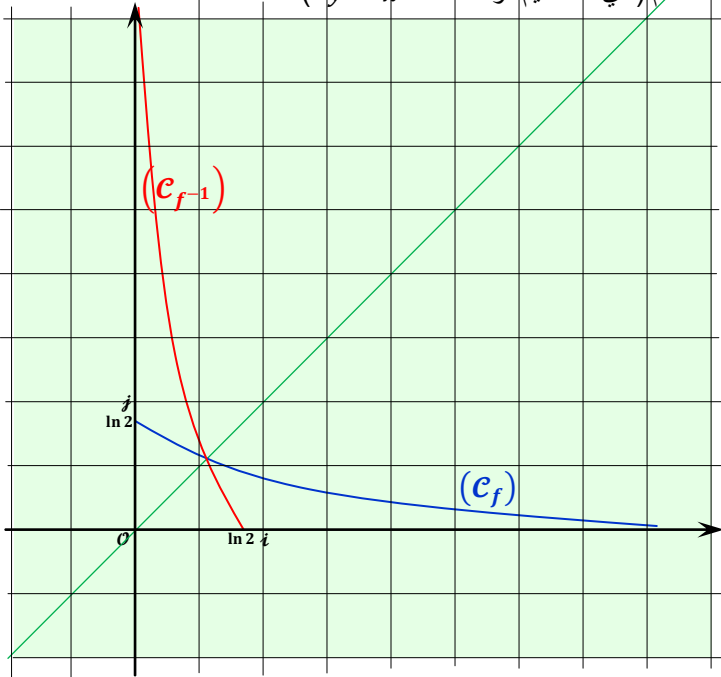
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln 2 = f(0)$$

$\Rightarrow f$ est continue à droite en 0

التمرين الرابع

3

لرسم (C_{f-1}) نرسم أولا (C_f) ثم نرسم مماثله بالنسبة للمُنصَّف الأول للمعلم (أي المستقيم ذو المعادلة $y = x$)



التمرين الخامس

1

ليكن ai عددا تخيليا صرفا حيث $a \in \mathbb{R}^*$.
 ai est solution de (E)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (ai)^3 - (4+i)(ai)^2 + (13+4i)(ai) - 13i &= 0 \\ \Leftrightarrow -a^3i + a^2(4+i) + 13ai - 4a - 13i &= 0 \\ \Leftrightarrow (4a^2 - 4a) + (a^2 - a^3 + 13a - 13)i &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 4a = 0 \\ a^2 - a^3 + 13a - 13 = 0 \end{cases} & \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4a(a-1) = 0 \\ a^2 - a^3 + 13a - 13 = 0 \end{cases} & \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 ; \text{ car } a \neq 0 \\ a^2 - a^3 + 13a - 13 = 0 \end{cases} & \\ \Leftrightarrow a = 1 & \end{aligned}$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا و هو العدد i .

التمرين الخامس

1

في البداية ننجز القسمة الأقليدية للحدودية $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i$ على الحدودية $(z-i)$ كما يلي:

$$\begin{array}{r|l} z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i & z-i \\ \underline{z^3 - iz^2} & z^2 - 4z + 13 \\ -4z^2 + (13+4i)z - 13i & \\ \underline{-4z^2 + 4iz} & \\ 13z - 13i & \\ \underline{13z - 13i} & \\ 0 & \end{array}$$

إذن من هذه القسمة الأقليدية نستنتج أن:

$$\begin{aligned} z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i &= (z-i)(z^2 - 4z + 13) \\ \text{وبذلك المعادلة (E) تُصبح: } (z-i)(z^2 - 4z + 13) &= 0 \\ \Leftrightarrow (z-i) = 0 \text{ أو } (z^2 - 4z + 13) = 0 & \\ \text{لنحل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة } z^2 - 4z + 13 = 0 & \\ \text{لدينا } \Delta = (6i)^2 \text{ إذن المعادلة } z^2 - 4z + 13 = 0 & \text{ تقبل حلين } z_1 \\ \begin{cases} z_1 = 2 + 3i \\ z_2 = 2 - 3i \end{cases} & \text{ و } z_2 \text{ المعرفين بما يلي} \end{aligned}$$

و لدينا: $(\forall x > 0) ; f(x) = (v(2x) - v(x))'$

$$\begin{aligned} &= 2v'(2x) - v'(x) \\ &= 2u(2x) - u(x) \\ &= 2\left(\frac{e^{-(2x)^2}}{2x}\right) - \frac{e^{-x^2}}{x} \\ &= \frac{e^{-4x^2}}{x} - \frac{e^{-x^2}}{x} \\ &= \frac{e^{-4x^2}}{x}(1 - e^{3x^2}) \end{aligned}$$

و بالتالي: $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{e^{-4x^2}}{x}(1 - e^{3x^2})$

التمرين الرابع

2

لدينا: $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{e^{-4x^2}}{x}(1 - e^{3x^2})$

نلاحظ أن: $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{e^{-4x^2}}{x} > 0$

إذ إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة الكمية $(1 - e^{3x^2})$.

و لدينا كذلك: $x > 0 \Rightarrow 3x^2 > 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{3x^2} &> 1 \\ \Rightarrow 1 - e^{3x^2} &< 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-4x^2}}{x}(1 - e^{3x^2}) < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 ; x > 0$$

$$\Rightarrow f \text{ est } \searrow \text{ sur }]0, +\infty[$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
f	$\ln 2$	0

التمرين الرابع

3

من خلال جدول تغيرات الدالة f .

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]0, +\infty[$.

إذن f تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو المجال $f(]0, +\infty[)$.

و لدينا: $f(]0, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; f(0)[=]0 ; \ln 2[$

إذن f تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو المجال $]0, \ln 2[$.

ليكن h التحاكي الذي مركزه B و يُحوّل C إلى A' .

و ليكن t نسبة هذا التحاكي $h(C) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{BA'} = t \overrightarrow{BC}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (z_{A'} - z_B) &= t(z_C - z_B) \\ \Leftrightarrow (2 + 3i - 2\sqrt{2}i - 2 - 3i) &= t(2 - 3i - 2 - 3i) \\ \Leftrightarrow -2\sqrt{2}i &= -6ti \\ \Leftrightarrow t &= \frac{-2\sqrt{2}i}{-6i} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

بعد إيجادنا لنسبة هذا التحاكي نبحث إذن عن صيغته العقديّة كما يلي :

$$\begin{aligned} h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{BM'} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \overrightarrow{BM} \\ \Leftrightarrow z_{M'} - 2 - 3i &= \frac{\sqrt{2}}{3}(z_M - 2 - 3i) \\ \Leftrightarrow z' - 2 - 3i &= \frac{\sqrt{2}}{3}(z - 2 - 3i) \\ \Leftrightarrow z' &= \frac{\sqrt{2}}{3}z - \frac{2\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2}i + 2 + 3i \\ \Leftrightarrow z' &= \frac{\sqrt{2}}{3}z + (3 - \sqrt{2})i + 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

و بالتالي h تحاكي مُعرف بما يلي :

$$h_B\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) : (\mathcal{P}) \rightarrow (\mathcal{P})$$

$$M(z) \rightarrow M'\left(\frac{\sqrt{2}}{3}z + (3 - \sqrt{2})i + 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

لدينا $r(A) = h(C)$: إذن $h(C) = A'$ و $r(A) = A'$

نُدخل التطبيق h^{-1} نجد : $h^{-1}(r(A)) = h^{-1}(h(C))$

يعني : $(h^{-1} \circ r)(A) = C$

إذن $h^{-1} \circ r$ تطبيق في المستوى العقدي. و يُحوّل النقطة A إلى النقطة C .

و لدينا : $z_A = i$ و $z_C = 2 - 3i$

يعني أن : $z_C = 2 - 3z_A$

و بالتالي التطبيق $h^{-1} \circ r$ معرف بما يلي :

$$h^{-1} \circ r : (\mathcal{P}) \rightarrow (\mathcal{P})$$

$$M(z) \rightarrow M'(2 - 3z)$$

لنكن F مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي من أجلها يكون العدد $(z_1 - z_0)^n$ عددا حقيقيا سالبا .

يعني : $F = \{n \in \mathbb{N} ; (z_1 - z_0)^n \in \mathbb{R}^-\}$

$$= \{n \in \mathbb{N} ; (2 + 3i - i)^n \in \mathbb{R}^-\}$$

$$= \{n \in \mathbb{N} ; (2 + 2i)^n \in \mathbb{R}^-\}$$

$$= \{n \in \mathbb{N} ; 2^n(1 + i)^n \in \mathbb{R}^-\}$$

$$= \{n \in \mathbb{N} ; (1 + i)^n \in \mathbb{R}^-\}$$

$$= \left\{ n \in \mathbb{N} ; (\sqrt{2})^n \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \in \mathbb{R}^- \right\}$$

$$= \left\{ n \in \mathbb{N} ; (\sqrt{2})^n \left(e^{i\pi/4} \right)^n \in \mathbb{R}^- \right\}$$

$$= \left\{ n \in \mathbb{N} ; e^{in\pi/4} \in \mathbb{R}^- \right\}$$

$$= \left\{ n \in \mathbb{N} ; \frac{n\pi}{4} \equiv \pi [2\pi] \right\}$$

$$= \left\{ n \in \mathbb{N} ; \frac{n\pi}{4} = \pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= \{n \in \mathbb{N} ; n = (4 + 8k) ; k \in \mathbb{N}\}$$

$$= \{4 + 8k ; k \in \mathbb{N}\}$$

إذن : $F = \{4 + 8k ; k \in \mathbb{N}\}$

أو بتعبير آخر : $(\forall k \in \mathbb{N}) ; (z_1 - z_0)^{4+8k} \in \mathbb{R}^-$

لدينا r هو الدوران المعرف بما يلي :

$$r_B\left(\frac{\pi}{4}\right) : (\mathcal{P}) \rightarrow (\mathcal{P})$$

$$M(z) \rightarrow M'(z')$$

$$r(A) = A' \Leftrightarrow (z_{A'} - z_B) = e^{i\pi/2}(z_A - z_B)$$

$$\Leftrightarrow z_{A'} - (2 + 3i) = e^{i\pi/2}(i - 2 - 3i)$$

$$\Leftrightarrow z_{A'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (-2 - 2i) + (2 + 3i)$$

$$\Leftrightarrow z_{A'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (-2)(1 + i)^2 + 2 + 3i$$

$$\Leftrightarrow z_{A'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (-2)(2i) + 2 + 3i$$

$$\Leftrightarrow z_{A'} = -2\sqrt{2}i + 2 + 3i$$

$$\Leftrightarrow z_{A'} = 2 + (3 - 2\sqrt{2})i$$

$$\frac{z_{A'} - z_B}{z_{A'} - z_C} = \frac{2 + 3i - 2\sqrt{2}i - 2 - 3i}{2 + 3i - 2\sqrt{2}i - 2 - 3i}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2}i}{6i - 2\sqrt{2}i} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 6} = k \in \mathbb{R}$$

$$\frac{z_{A'} - z_B}{z_{A'} - z_C} = k : \text{ إذن}$$

يعني : $(z_{A'} - z_B) = k(z_{A'} - z_C)$

أي باستعمال الترجمة المتجهية نكتب : $\overrightarrow{BA'} = k \overrightarrow{CA'}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

و هذا يعني أن النقط B و A' و C نقط مستقيمة.

التمرين الأول

5

ليكن m و n عدنان صحيحان طبيعيين.
سوف نستعمل في هذا السؤال تجميعية القانون \times في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
و بالأخص تجميعية القانون \times في M لأن $M \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
و سوف نستعمل كذلك النتيجة التالية: $A_m \times A_n = A_{m+n+1}$

$$\begin{aligned} (A_m)^n &= \overbrace{(A_m \times A_m) \times A_m \times \dots \times A_m}^{n \text{ fois}} \text{ لدينا:} \\ &= A_{2m+1} \times \overbrace{A_m \times \dots \times A_m}^{(n-2) \text{ fois}} \\ &= A_{3m+2} \times \overbrace{A_m \times \dots \times A_m}^{(n-3) \text{ fois}} \\ &= A_{4m+3} \times \overbrace{A_m \times \dots \times A_m}^{(n-4) \text{ fois}} \\ &= A_{(n-1)m+(n-2)} \times A_m \\ &= A_{(n-1)m+(n-2)+m+1} \\ &= A_{mn+n-1} \end{aligned}$$

و بالتالي: $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2; (A_m)^n = A_{mn+n-1}$
و نستنتج من ذلك أن: $(A_2)^3 = A_{2 \times 3 + 3 - 1} = A_8$

التمرين الثاني

1

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي (P) .

$$\begin{aligned} M \text{ صامدة بالدالة } f &\Leftrightarrow f(M) = M \\ &\Leftrightarrow z = \frac{z-a}{z-1} \\ &\Leftrightarrow z(z-1) = z-a \\ &\Leftrightarrow z^2 - 2z + a = 0 \end{aligned}$$

التمرين الثاني

2

لنحل في \mathbb{C} المعادلة: $(G): z^2 - 2z + (1 + e^{i\theta})$

بحيث: $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \Delta &= (-2)^2 - 4(1 + e^{i\theta}) = 4(1 - (1 + e^{i\theta})) \\ &= -4e^{i\theta} = \left(2ie^{\frac{i\theta}{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

إذن G تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين بما يلي:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2 - 2ie^{\frac{i\theta}{2}}}{2} = 1 - ie^{\frac{i\theta}{2}} \\ z_2 &= \frac{2 + 2ie^{\frac{i\theta}{2}}}{2} = 1 + ie^{\frac{i\theta}{2}} \end{aligned}$$

و لكي نكتب z_1 و z_2 على شكلهما المثلثي نستعين بالقاعدة التالية:

$$e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

التي يجب التذكير بها أولاً ثم تطبيقها.

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 - ie^{\frac{i\theta}{2}} = e^{i0} + e^{\frac{-i\pi}{2}} e^{\frac{i\theta}{2}} = e^{i0} + e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= 2 \cos\left(\frac{0 - \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right) e^{i\left(\frac{0 + \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)} \\ &= 2 \cos\left(\frac{\pi - \theta}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{4} - \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \left[2 \cos\left(\frac{\pi - \theta}{4}\right), \left(\frac{\theta}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \end{aligned}$$

أجوبة امتحان مدينة كلميم 2010

التمرين الأول

1

تكون المجموعة M غير فارغة إذا تمكنا من رصد عنصر واحد على الأقل في المجموعة M ، و في حالتنا هذه الأمر سهل جدا لأن كل قيمة لـ n تعطينا مصفوفة A_n من الرتبة 3.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و بذلك إذا كان } n = 0 \text{ نحصل على}$$

في بعض الأحيان و في بعض المجموعات نجد عادة صعوبة في تحديد عنصر واحد على الأقل ينتمي إلى المجموعة المدروسة.

التمرين الأول

2

تكون المجموعة M جزءا مستقرا في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}); \times)$ إذا كانت M مجموعة غير فارغة و تُحقق ما يلي:

$$\forall (A_n, A_m) \in M^2; A_n \times A_m \in M$$

لتكن A_m و A_n مصفوفتين من M حيث m و n عدنان نسبيا.

$$\begin{aligned} A_m \times A_n &= \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 2^m \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^m & 0 & 2^m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} \text{ لدينا:} \\ &= \begin{pmatrix} 2^m \times 2^n + 2^m \times 2^n & 0 & 2^m \times 2^n + 2^m \times 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^m \times 2^n + 2^m \times 2^n & 0 & 2^m \times 2^n + 2^m \times 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2^{m+n} & 0 & 2 \times 2^{m+n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 \times 2^{m+n} & 0 & 2 \times 2^{m+n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{m+n+1} & 0 & 2^{m+n+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{m+n+1} & 0 & 2^{m+n+1} \end{pmatrix} = A_{m+n+1} \in M \end{aligned}$$

لأن: $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \Rightarrow (m+n+1) \in \mathbb{Z}$

إذن: $\forall (A_m, A_n) \in M^2; A_m \times A_n \in M$

و بالتالي M جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

التمرين الأول

3

نعلم أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة تبادلية و احادية

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ و صفرها } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ وحدتها}$$

إذن \times تبادلي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

و لدينا M جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

إذن \times قانون تركيب داخلي في M .

و منه \times تبادلي كذلك في M . لأن $M \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

التمرين الأول

5

سوف نستعمل تجميعية القانون \times في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

أو بالأخص تجميعية القانون \times في M لأن $M \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

و سوف نستعمل كذلك النتيجة: $A_m \times A_n = A_{m+n+1}$

$$\begin{aligned} (A_2)^3 &= A_2 \times A_2 \times A_2 = (A_2 \times A_2) \times A_2 \\ &= A_{2+2+1} \times A_2 = A_5 \times A_2 \\ &= A_{5+2+1} = A_8 \end{aligned}$$

و بالتالي: $(A_2)^3 = A_8$

لم تتمكن من إتمام هذا البرهان بالتكافؤات ولقد حصلنا فقط على الإستلزام

$$z \in i\mathbb{R} \Rightarrow |z| = 1$$

عكسيا: لنبين الاستلزام: $|z| = 1 \Rightarrow z' \in i\mathbb{R}$

نفترض أن $|z| = 1$ وسوف نستعمل أثناء الحساب الأشياء التالية:

$$\begin{cases} e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \\ 1 = e^{i0} = e^{2i\pi} \\ -1 = e^{-i\pi} = e^{i\pi} \end{cases}$$

$$|z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta} ; \theta \neq 0$$

$$\Rightarrow z' = \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} ; \theta \neq 0$$

$$= \frac{e^{i\theta} + e^{i0}}{e^{i\theta} + e^{-i\pi}} ; \theta \neq 0$$

$$= \frac{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}}{2 \cos\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}} ; \theta \neq 0$$

$$= \left(\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)} \right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} ; \theta \neq 0$$

$$= \left(\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)} \right) e^{i\frac{\pi}{2}} ; \theta \neq 0$$

$$= \left(\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)} \right) i ; \text{avec } \left(\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow z' \in i\mathbb{R}$$

$$z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$$

التمرين الثاني

3

طريقة إنشاء M' صورة نقطة M من الدائرة المثلثية حيث $M \neq B$.

(1) نطلق من النقطة M كمعطي بدني حيث M تنتمي إلى الدائرة

المثلثية و $M \neq B$

(2) B نقطة من المحور الحقيقي معلومة ولحقها هو $z_B = 1$.

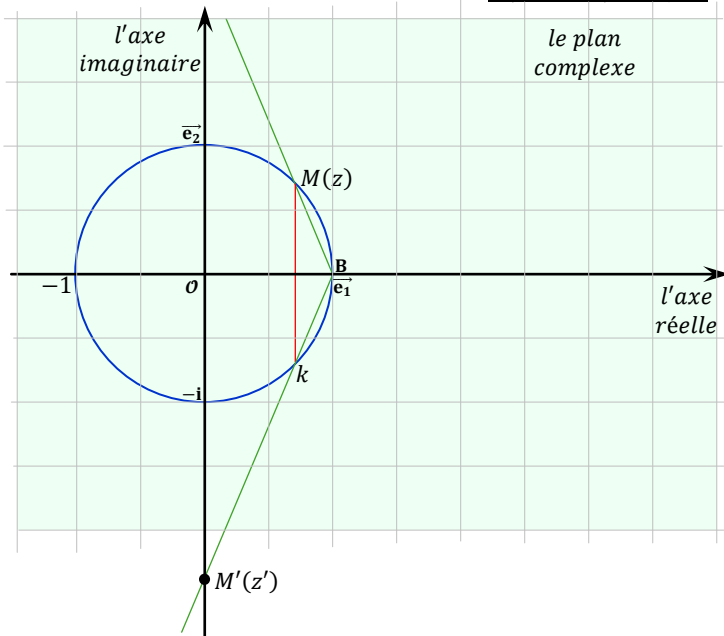
(3) نرسم المستقيم (Δ) المار من M والعمودي على المحور الحقيقي

(4) (Δ) يقطع الدائرة المثلثية في نقطة نسميها K .

(5) المستقيم (BK) يقطع المحور التخيلي في نقطة M' وهي صورة

النقطة M بالتحويل f .

رسم مبياني توضيحي:



$$\text{و كذلك: } z_2 = 1 + i e^{\frac{i\theta}{2}} = e^{i0} + e^{\frac{i\pi}{2}} e^{\frac{i\theta}{2}} = e^{i0} + e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= 2 \cos\left(0 - \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right) e^{i\left(\frac{0 + \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)}$$

$$= 2 \cos\left(-\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{4}\right)\right) e^{i\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \left[2 \cos\left(\frac{\pi + \theta}{4}\right), \left(\frac{\theta + \pi}{4}\right)\right]$$

التمرين الثاني

3

$$\text{لدينا: } M' = f(M) \Leftrightarrow z' = \frac{z+1}{z-1}$$

$$\Leftrightarrow z' - 1 = \frac{z+1}{z-1} - 1$$

$$\Leftrightarrow z' - 1 = \frac{z+1 - (z-1)}{z-1}$$

$$\Leftrightarrow z' - 1 = \frac{2}{z-1}$$

$$\Rightarrow \arg(z' - 1) \equiv \arg\left(\frac{2}{z-1}\right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z' - 1) \equiv \arg(2) - \arg(z-1) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z' - 1) \equiv 0 - \arg(z-1) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z' - 1) \equiv -\arg(z-1) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z' - 1) + \arg(z-1) \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z'-1}{1-0}\right) + \arg\left(\frac{z-1}{1-0}\right) \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_{M'} - z_B}{z_{e_1} - z_0}\right) + \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_{e_1} - z_0}\right) \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Rightarrow \overline{(\vec{e}_1, BM')} + (\vec{e}_1, BM) \equiv 0 [2\pi]$$

التمرين الثاني

3

لنبين التكافؤ التالي: $|z| = 1 \Leftrightarrow (z' \in i\mathbb{R})$

ننطلق من الطرف الأيسر ونحاول إيجاد الطرف الأيمن.

$$z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z' = iy ; y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = iy$$

$$\Leftrightarrow iy(z-1) = z+1$$

$$\Leftrightarrow iyz - iy = z+1$$

$$\Leftrightarrow z(iy-1) = 1+iy$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{iy+1}{iy-1} ; y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{iy+1}{iy-1} \times \frac{iy+1}{iy+1}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(iy+1)^2}{-y^2-1} = \left(\frac{y^2-1}{y^2+1}\right) - i\left(\frac{2y}{y^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{y^2-1}{y^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2y}{y^2+1}\right)^2}$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{y^4 - 2y^2 + 1 + 4y^2}{(y^2+1)^2}}$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{(y^2+1)^2}{(y^2+1)^2}} = 1$$

تعليق الطريقة :

أولا هذه الطريقة تصلح فقط لرسم صور نقطة الدائرة المثلثية المحرومة من النقطة B . لأن : $\{M(z) \in (\mathcal{P}) ; |z| = 1\}$ (le cercle unité) وكذلك لأنه حسب تكافؤ السؤال (3) ب) لدينا : $z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$ ومن هذا التكافؤ نستنتج أنه إذا كانت M نقطة من الدائرة المثلثية المحرومة من B فإن صورتها M' تنتمي إلى المحور التخيلي لأن $z' \in i\mathbb{R}$ يكفي الآن تحديد موقع النقطة M' على المحور التخيلي وسوف نستعمل من أجل ذلك النتيجة التالية : $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BM'}) \equiv 0 [2\pi]$ يعني : $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BM}) \equiv -(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BM'}) [2\pi]$ يعني في الشكل لدينا : $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BM'})$ وتتحقق هذه النتيجة إذا كانت صورة الزاوية $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BK})$ بالتماثل المحوري (ذو المحور الحقيقي) هي الزاوية $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BK})$ النقطة M' تحقق إذن الشرطين التاليين : $\left. \begin{array}{l} M' \text{ تنتمي إلى المحور التخيلي} \\ M' \text{ تنتمي إلى المستقيم } (BK) \end{array} \right\}$ إذن M' هي نقطة تقاطع المستقيم (BK) والمحور التخيلي.

التمرين الثالث 1

ليكن a عددا صحيحا نسبيا . و نفضلُ بين حالتين :
الحالة الأولى : إذا كان $a \equiv 0 [3]$.
 فإن : $a^2 \equiv 0 [3]$ (triviale) .
الحالة الثانية : إذا كان $a \not\equiv 0 [3]$.
 إذن : $(\exists r \in \mathbb{Z}^*, (|r| < 3) ; a \equiv r [3])$.
 يعني : $\exists r \in \{-2; -1; 1; 2\} ; a \equiv r [3]$.
 إذا كان $a \equiv \pm 2 [3]$ فإن $a^2 \equiv 4 [3]$.
 ولدينا : $4 \equiv 1 [3]$ إذن $a^2 \equiv 1 [3]$.
 إذا كان : $a \equiv \pm 1 [3]$ فإن $a^2 \equiv 1 [3]$.

نستنتج إذن ما يلي : $(\forall a \in \mathbb{Z}) ; \begin{cases} a^2 \equiv 0 [3] \\ \text{ou bien} \\ a^2 \equiv 1 [3] \end{cases}$

التمرين الثالث 1 ب

ليكن a و b عددين نسبين . و نفضلُ بين أربع حالات و ذلك انطلاقا من نتيجة السؤال (4) :

الحالة الأولى : إذا كان $a^2 \equiv 0 [3]$ و $b^2 \equiv 0 [3]$.
 إذن : $(a^2 + b^2) \equiv 0 [3]$.

الحالة الثانية : إذا كان $a^2 \equiv 0 [3]$ و $b^2 \equiv 1 [3]$.
 إذن : $(a^2 + b^2) \equiv 1 [3]$.

الحالة الثالثة : إذا كان $a^2 \equiv 1 [3]$ و $b^2 \equiv 1 [3]$.
 إذن : $a^2 + b^2 \equiv 2 [3]$.

الحالة الرابعة : إذا كان $a^2 \equiv 1 [3]$ و $b^2 \equiv 0 [3]$.
 فإن : $(a^2 + b^2) \equiv 1 [3]$.

من خلال هذه الحالات الأربع نلاحظ أنه للحصول على النتيجة $(a^2 + b^2) \equiv 0 [3]$ توجد حالة واحدة يتحقق فيها مرادنا و هي الحالة التي يكون فيها $a^2 \equiv 0 [3]$ و $b^2 \equiv 0 [3]$.
 و في هذه الحالة نجد أن a و b مضاعفان للعدد 3 .
 يعني : $a \equiv 0 [3]$ و $b \equiv 0 [3]$. و منه : $a \equiv b \equiv 0 [3]$.
 وبالتالي نحصل على الاستلزام التالي :

$$(a^2 + b^2) \equiv 0 [3] \Rightarrow a \equiv b \equiv 0 [3]$$

التمرين الثالث 2 أ

لتكن x و y و z ثلاثة أعداد صحيحة نسبية حيث $x^2 + y^2 = 3z^2$.
 نلاحظ في البداية أن : $3 \equiv 0 [3]$.
 إذن : $(\forall z \in \mathbb{Z}) ; 3z^2 \equiv 0 [3]$.
 و منه : $(x^2 + y^2) \equiv 0 [3]$.
 و منه حسب نتيجة السؤال (1) ب) نستنتج أن : $x \equiv y \equiv 0 [3]$.
 يعني : $x \equiv 0 [3]$ و $y \equiv 0 [3]$.
 أي : $x = 3k$ و $y = 3k'$ و $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$.
 يعني : $(x^2 + y^2) = 9(k^2 + k'^2)$.
 يعني أن 9 قاسم للعدد $(x^2 + y^2)$.
 و منه : $x^2 + y^2 \equiv 0 [9]$.
 يعني : $3z^2 \equiv 0 [9]$.

التمرين الثالث 2 ب

لدينا : $3z^2 \equiv 0 [9]$. إذن يوجد k من \mathbb{Z} حيث $3z^2 = 9k$.
 و منه : $z^2 = 3k$. أي 3 قاسم للعدد z^2 . أي : $z^2 \equiv 0 [3]$.
 و منه حسب ما سبق : $z \equiv 0 [3]$.
 لقد حصلنا لحد الآن على ما يلي : $x \equiv y \equiv 0 [3]$ و $z \equiv 0 [3]$.
 إذن : $x \equiv y \equiv z \equiv 0 [3]$.

التمرين الثالث 3 أ

ليكن m عددا صحيحا طبعيا غير منعدم . و نفضلُ بين 3 حالات :

الحالة الأولى : إذا كان $m \equiv 0 [3]$.
 فإن : $m^2 \equiv 0 [3]$. و منه : $(m^2 - 1) \equiv -1 [3]$.
 إذن عند المرور إلى الجداء نحصل على : $m^2(m^2 - 1) \equiv 0 [3]$.

الحالة الثانية : إذا كان $m \equiv 1 [3]$.
 فإن : $m^2 \equiv 1 [3]$. و منه : $(m^2 - 1) \equiv 0 [3]$.
 إذن عند المرور إلى الجداء نحصل على : $m^2(m^2 - 1) \equiv 0 [3]$.

الحالة الثالثة : إذا كان $m \equiv 2 [3]$.
 فإن : $m^2 \equiv 4 [3]$. و منه : $(m^2 - 1) \equiv 3 [3]$.
 إذن عند المرور إلى الجداء نحصل على : $m^2(m^2 - 1) \equiv 12 [3]$.
 و نعلم أن : $12 \equiv 0 [3]$.
 إذن : $m^2(m^2 - 1) \equiv 0 [3]$.

خلاصة : $(\forall m \in \mathbb{N}^*) ; a_m \equiv 0 [3]$.

التمرين الثالث 3 ب

نعلم أن كل عددين صحيحين نسبين متتابعين يكون جداؤهما زوجيا دائما لأن أحدهما فردي و الآخر زوجي .
 لدينا $(m-1)$ و m عدنان متتابعان .
 إذن $m(m-1)$ عدد زوجي .
 يعني : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; m(m-1) = 2k$.
 و لدينا كذلك m و $(m+1)$ عدنان متتابعان .
 إذن $m(m+1)$ عدد زوجي .
 يعني : $(\exists k' \in \mathbb{Z}) ; m(m+1) = 2k'$.
 و بالتالي : $m(m-1)m(m+1) = 4kk'$.
 يعني : $m^2(m^2 - 1) = 4kk'$.
 و منه 4 قاسم للعدد $m^2(m^2 - 1)$.
 و بالتالي : $m^2(m^2 - 1) \equiv 0 [4]$.
 أي : $a_m \equiv 0 [4]$.

التمرين الثالث 3 ج

تذكير بخاصية مهمة في الحسابيات

$$\begin{cases} a/m \\ b/m \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow (ab)/m$$

$$\begin{cases} 3/a_m \\ 4/a_m \\ 3 \wedge 4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_m \equiv 0 [3] \\ a_m \equiv 0 [4] \\ 3 \wedge 4 = 1 \end{cases}$$

لدينا حسب ما سبق : $a_m \equiv 0 [3]$ و $a_m \equiv 0 [4]$.
 إذن : $3/a_m$ و $4/a_m$.
 إذن حسب الخاصية المذكورة نستنتج أن : $(3 \times 4)/a_m$.
 يعني أن 12 يقسم a_m و بالتالي : $(\forall m \in \mathbb{N}^*) ; a_m \equiv 0 [12]$.

التمرين الرابع

4 I

ليكن m عددا حقيقيا سالبا . و ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث $x \leq y$

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} e^x \leq e^y \\ e^{2x} \leq e^{2y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m e^x \geq 2m e^y ; \text{ car } m \leq 0 \\ -e^{2x} \geq -e^{2y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m e^x - 2m \geq 2m e^y - 2m \\ -e^{2x} \geq -e^{2y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2m e^x - e^{2x} - 2m \geq 2m e^y - e^{2y} - 2m$$

$$\Rightarrow f_m(x) \geq f_m(y)$$

حصلنا إذن على الاستلزام التالي : $x \leq y \Rightarrow f_m(x) \geq f_m(y)$

و هذا يعني أن الدالة f_m تناقصية في حالة $m \leq 0$.

التمرين الرابع

5 I

نفترض فيما يلي أن : $m > 0$.

لدينا : $f_m(x) = 2m e^x - e^{2x} - 2m$.

نلاحظ أن f_m قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} بأكملها ، لأنها عبارة عن مجموع دوال اعتيادية قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} . ولدينا :

$$f'_m(x) = 2m e^x - 2e^{2x} = 2e^x(m - e^x)$$

- إذا كان : $x = \ln m$. فإن : $f'_m(x) = 0$
- إذا كان : $x > \ln m$. فإن : $f'_m(x) < 0$
- إذا كان : $x < \ln m$. فإن : $f'_m(x) > 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f_m كما يلي :

x	$-\infty$	$\ln m$	$+\infty$
$f'_m(x)$		+	-
f_m		β_m	$-\infty$
	$-2m$		

نلاحظ أن $f'_m(x)$ تتعدم في $\ln m$ و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطة .

إذن f_m تقبل مطرافا β_m عند النقطة $\alpha_m = \ln m$.

حيث $\beta_m = f_m(\alpha_m) = m^2 - 2m$.

التمرين الرابع

5 I

نضع : $(\Gamma) = \{I_m(\alpha_m, \beta_m) ; m > 0\}$

$$= \{(\ln m ; m^2 - 2m) ; m > 0\}$$

$$= \{(\ln m ; e^{2 \ln m} - 2e^{\ln m}) ; m > 0\}$$

$$= \{(x, y) ; y = e^{2x} - 2e^x, x \in \mathbb{R}\}$$

أو بتعبير آخر ، لكي تكون (Γ) هي المنحنى الممثل للدالة g

حيث $g(x) = e^x - 2e^{2x}$ ، يكفي أن نتحقق من أن :

$$\rightarrow (\forall m > 0) ; g(\ln m) = e^{2 \ln m} - 2e^{\ln m}$$

و بالفعل لدينا : $g(\ln m) = e^{2 \ln m} - 2e^{\ln m} = m^2 - 2m$.

التمرين الرابع

5 I

$$\text{ليكن } x \text{ عددا حقيقيا } \begin{cases} -2 - f_1(x) = -2 - (2e^x - e^{2x} - 2) \\ = -2 - 2e^x + e^{2x} + 2 \\ = e^{2x} - 2e^x = g(x) \end{cases}$$

لدينا : $g(x) = -2 - f_1(x)$

إذن : $g(x) - (-1) = -1 - f_1(x)$

أي : $(g(x) + 1) = -(f_1(x) + 1)$

و هذا يعني أن (Γ) و (C_1) متماثلان بالنسبة للمستقيم $(D) : y = -1$

التمرين الرابع

1 I

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2m e^x - e^{2x} - 2m)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(\frac{2m}{e^x} - 1 - \frac{2m}{e^{2x}} \right)$$

$$= (+\infty)(0 - 1 - 0) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2m e^x - e^{2x} - 2m}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{2m}{x} - \frac{e^x}{x} - \frac{2m}{e^x} \right)$$

$$= (+\infty)(0 - (+\infty) - 0)$$

$$= (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2m e^x - e^{2x} - 2m)$$

$$= 2m(0) - 0 - 2m = -2m$$

التمرين الرابع

2 I

ليكن m و m' عددان حقيقيان بحيث $m < m'$.

لدينا : $f_m(x) - f_{m'}(x)$

$$= (2m e^x - e^{2x} - 2m) - (2m' e^x - e^{2x} - 2m')$$

$$= 2e^x(m - m') - 2(m - m')$$

$$= (2e^x - 2)(m - m')$$

لدينا $m < m'$ إذن $(m - m')$ كمية سالبة قطعاً .

إذن إشارة $f_m(x) - f_{m'}(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $(2e^x - 2)$.

ليكن x عنصرا من \mathbb{R} . و نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان $x \geq 0$:

$$x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1$$

$$\Rightarrow 2e^x \geq 2$$

$$\Rightarrow 2e^x - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (m - m')(2e^x - 2) \leq 0$$

$$\Rightarrow f_m(x) - f_{m'}(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow f_m(x) \leq f_{m'}(x)$$

$$\Rightarrow (C_m) \text{ se situe au dessous de } (C_{m'})$$

الحالة الثانية : إذا كان $x \leq 0$:

$$x \leq 0 \Rightarrow e^x \leq 1$$

$$\Rightarrow 2e^x \leq 2$$

$$\Rightarrow 2e^x - 2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (m - m')(2e^x - 2) \geq 0$$

$$\Rightarrow f_m(x) - f_{m'}(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow f_m(x) \geq f_{m'}(x)$$

$$\Rightarrow (C_m) \text{ se situe au dessus de } (C_{m'})$$

التمرين الرابع

3 I

لكي نبين أن جميع المنحنيات $(C_m)_{m \in \mathbb{R}}$ تمر كلها من نقطة ثابتة ،

نطلق من منحنيين (C_m) و $(C_{m'})$ من هذه المجموعة .

و لتكن $A(x_0, y_0)$ نقطة مشتركة بينهما .

إذن : $f_m(x_0) = y_0$ و $f_{m'}(x_0) = y_0$.

يعني أن : $f_m(x_0) = f_{m'}(x_0)$.

يعني : $2m e^{x_0} - e^{2x_0} - 2m = 2m' e^{x_0} - e^{2x_0} - 2m'$.

يعني : $2m e^{x_0} - 2m = 2m' e^{x_0} - 2m'$.

يعني : $(2m - 2m')e^{x_0} = (2m - 2m')$.

يعني : $e^{x_0} = \frac{2m - 2m'}{2m - 2m'} = 1$.

يعني : $x_0 = 0$. يعني : $\ln(e^{x_0}) = \ln 1 = 0$.

يعني : $f_m(0) = f_{m'}(0) = 2m e^0 - e^0 - 2m = 2m - 1 - 2m = -1$.

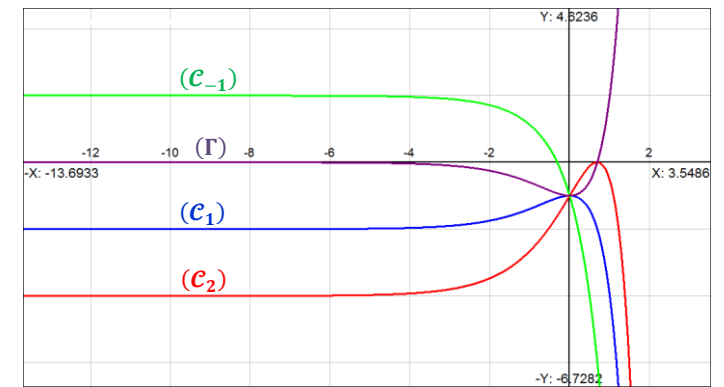
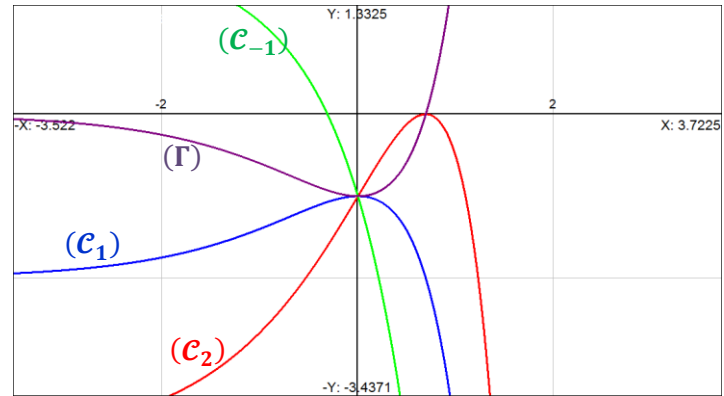
إذن المنحنيين (C_m) و $(C_{m'})$ يمران معا من النقطة $A(0, -1)$.

و بالتالي : $(C_m) \cap (C_{m'}) = A(0, -1)$; $\forall m \neq m'$.

يعني أن جميع المنحنيات $(C_m)_{m \in \mathbb{R}}$ تتلاقى في نقطة واحدة : A .

تحديد نقط تقاطع (C_2) و (D) ، نحل المعادلة $f_2(x) = -1$
 $\Leftrightarrow 4e^x - e^{2x} - 4 = -1$
 $\Leftrightarrow 4e^x - e^{2x} - 3 = 0$
 $\Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 ; y = e^x$
 $\Leftrightarrow y_1 = 1 \text{ et } y_2 = 3 \text{ avec } \Delta = 4$
 $\Leftrightarrow y_1 = e^{x_1} = 1 \text{ et } y_2 = e^{x_2} = 3$
 $\Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ et } x_2 = \ln 3$

ولدينا $f_2(\ln 3) = -1$ و $f_2(0) = -1$
 إذن (D) و (C_2) يتقاطعان في: $(0, -1)$ و $(-1, \ln 3)$.



لتكن \mathcal{A} مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C_2) و (D) والمستقيمين $x = \ln 3$ و $x = 0$.

$$\mathcal{A} = \int_0^{\ln 3} |f_2(x) + 1| dx \quad (\text{unité})^2$$

لدينا: $f_2(x) + 1 = 4e^x - e^{2x} - 3$
 $= -(e^{2x} - 4e^x + 3)$
 $= -(e^x - 1)(e^x - 3)$

$0 \leq x \leq \ln 3 \Rightarrow x \geq 0 \text{ et } x \leq \ln 3$
 $\Rightarrow e^x \geq 1 \text{ et } e^x \leq 3$
 $\Rightarrow (e^x - 1) \geq 0 \text{ et } (e^x - 3) \leq 0$
 $\Rightarrow -(e^x - 3)(e^x - 1) \geq 0$
 $\Rightarrow f_2(x) + 1 \geq 0$
 $\Rightarrow |f_2(x) + 1| = f_2(x) + 1$

إذن بالرجوع إلى المساحة \mathcal{A} نُكتبُ على شكل:

$$\mathcal{A} = \int_0^{\ln 3} |f_2(x) + 1| dx \quad (\text{unité})^2$$

$$= \int_0^{\ln 3} (4e^x - e^{2x} - 3) dx \quad (\text{unité})^2$$

$$= 4 [e^x]_0^{\ln 3} - \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^{\ln 3} - 3 [x]_0^{\ln 3}$$

$$= 4(3 - 1) - \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) - 3(\ln 3 - 0)$$

$$= (8 - 4 - 3 \ln 3) \text{ unité}^2$$

$$= (4 - 3 \ln 3) (2 \text{ cm})^2$$

$$= (4 - 3 \ln 3) (4 \text{ cm}^2)$$

$$= (16 - 12 \ln 3) \text{ cm}^2$$

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعاً. في البداية نلاحظ أن:

$$g(x) + 1 = e^{2x} - 2e^x + 1$$

$$= (e^x - 1)^2 \geq 0$$

إذن: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) + 1 \geq 0$.

ومنه: $(1) \quad (\forall x > 0) ; \frac{g(x) + 1}{x} > 0$

من جهة ثانية، لدينا g دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} بأكملها لأنها عبارة عن فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} . نستطيع إذن تطبيق ميرهنه التزايدات المنتهية على الدالة g في أي مجال على شكل $[0, x]$ حيث $x > 0$.

$$g \text{ متصلة على } [0, x] \Rightarrow \exists c \in]0, x[; \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(c)$$

ومنه: $\begin{cases} \frac{g(x) - (-1)}{x} = g'(c) \\ 0 < c < x \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} \frac{g(x) + 1}{x} = 2(e^{2c} - e^c) = 2e^c(e^c - 1) \\ 0 < c < x \end{cases}$

$0 < c < x \Rightarrow \begin{cases} 2e^c < 2e^x \\ (e^c - 1) < (e^x - 1) \end{cases}$
 $\Rightarrow 2e^c(e^c - 1) < 2e^x(e^x - 1)$
 $\Rightarrow g'(c) < g'(x)$

وبالتالي: $\frac{g(x) + 1}{x} = g'(c) < g'(x)$

يعني: $(2) \quad \frac{g(x) + 1}{x} < g'(x)$

من (1) و (2) نستنتج أن:

$$(\forall x > 0) ; 0 < \frac{g(x) + 1}{x} < g'(x)$$

نستنتج بكل بساطة من نتيجة السؤال (2) ما يلي: $\frac{g(x) + 1}{x} < g'(x)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب قطعاً x نحصل على:

$$g(x) + 1 < x g'(x)$$

إذن: $(\forall x > 0) ; x g'(x) - g(x) > 1$

التمرين الرابع

3 II

في البداية نلاحظ أن الدالة $x \rightarrow \frac{g(x)}{x}$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* ، لأنها عبارة عن خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* . ولدينا .

$$\left(\frac{g(x)}{x}\right)' = \frac{x g'(x) - g(x)}{x^2} > 0$$

وذلك لأن : $x^2 > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$.
وكذلك لأن : $x g'(x) - g(x) > 1$; $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$.
وبالتالي : $x \rightarrow \frac{g(x)}{x}$ تزايدية قطعاً على \mathbb{R}_+^* .

التمرين الرابع

4 II

سوف نستعمل في هذا السؤال (1) من الجزء الثاني :

$$\begin{aligned} t \geq 0 &\Rightarrow 0 < \frac{g(t)}{t} + \frac{1}{t} < g'(t) \\ &\Rightarrow \int_x^{2x} 0 dt < \int_x^{2x} \left(\frac{g(t)}{t} + \frac{1}{t}\right) dt < \int_x^{2x} g'(t) dt \\ &\text{car ces fonctions sont continues et } x < 2x \\ &\Rightarrow 0 < G(x) + [\ln|t|]_x^{2x} < [g(t)]_x^{2x} \\ &\Rightarrow 0 < G(x) + \ln\left(\frac{2x}{x}\right) < g(2x) - g(x) \\ &\Rightarrow 0 < G(x) + \ln 2 < g(2x) - g(x) \end{aligned}$$

التمرين الرابع

4 II

نحن الآن أمام الوضعية التالية :

$$0 < G(x) + \ln 2 < \frac{g(2x) - g(x)}{x}$$

$\begin{matrix} \text{tend vers } 0 \\ \text{lorsque } x \\ \text{tend vers } 0 \\ \text{à droite} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{tend vers } 0 \\ \text{lorsque } x \\ \text{tend vers } 0 \\ \text{à droite} \end{matrix}$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (G(x) + \ln 2) = 0$

يعني : $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = -\ln 2 = G(0)$

إذن G متصلة على اليمين في الصفر .

بنفس الطريقة لدينا : $0 < G(x) + \ln 2 < g(2x) - g(x)$

إذن بعد ضرب جميع الأطراف في العدد الموجب $\frac{1}{x}$ نجد :

$$0 < \frac{G(x) + \ln 2}{x} < \frac{g(2x) - g(x)}{x}$$

يعني : $0 < \left(\frac{G(x) - G(0)}{x - 0}\right) < \left(\frac{e^{4x} - 3e^{2x} + 2e^x}{x}\right)$

لنحسب النهاية : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{4x} - 3e^{2x} + 2e^x}{x}\right)$

و من أجل ذلك نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على φ بما يلي :

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) = e^{4x} - 3e^{2x} + 2e^x$
دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} بأكمله لأنها عبارة عن مجموع دوال اعتيادية كلها قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

نستغل إذن قابلية اشتقاق الدالة φ على اليمين الصفر نجد :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{4x} - 3e^{2x} + 2e^x}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}\right) ; \text{car } \varphi(0) = 0 \\ &= \varphi'(x)_{/x=0} = (e^{4x} - 3e^{2x} + 2e^x)'_{/x=0} \\ &= (4e^{4x} - 6e^{2x} + 2e^x)_{/x=0} \\ &= 4e^0 - 6e^0 + 2e^0 = 0 = \varphi'(0) \end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$0 < \left(\frac{G(x) - G(0)}{x - 0}\right) < \left(\frac{e^{4x} - 3e^{2x} + 2e^x}{x}\right)$$

نستنتج إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{G(x) - G(0)}{x - 0}\right) = 0$$

و هذا يعني أن G قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و العدد المشتق هو 0 .

التمرين الرابع

5 II

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعاً و t عدد حقيقي من المجال $[x, 2x]$.
(t sera la variable muette pour l'intégration)

$$t \geq x \Rightarrow \frac{g(t)}{t} \geq \frac{g(x)}{x} ; \text{car } \frac{g(t)}{t} \text{ est } \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow \frac{g(t)}{t} \geq \frac{g(x)}{x} \geq \frac{g(x)}{t} ; \text{car } \left(\frac{1}{x} \geq \frac{1}{t}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{g(t)}{t} \geq \frac{g(x)}{t}$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} \left(\frac{g(t)}{t}\right) dt \geq \int_x^{2x} \left(\frac{g(x)}{t}\right) dt$$

car ces fonctions sont continues et $x < 2x$

$$\Rightarrow G(x) \geq g(x) \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t}\right) dt$$

$$\Rightarrow G(x) \geq g(x) [\ln|t|]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow G(x) \geq g(x) \cdot (\ln 2x - \ln x)$$

$$\Rightarrow G(x) \geq g(x) \cdot \ln 2$$

$$\Rightarrow G(x) \geq (e^{2x} - 2e^x) \ln 2$$

$$\Rightarrow G(x) \geq \underbrace{e^x (e^{2x} - 2)}_{x \rightarrow +\infty} \ln 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$$

و بنفس الطريقة لدينا : $G(x) \geq e^x (e^{2x} - 2) \ln 2$

$$\Rightarrow \frac{G(x)}{x} \geq \left(\frac{e^x}{x}\right) (e^{2x} - 2) \ln 2 ; x > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x} = +\infty$$

التمرين الرابع

6 II

ليكن $a > 0$ و لتكن ψ الدالة العددية المعرفة على $[a, +\infty[$ بما يلي :

$$\psi(x) = \frac{g(x)}{x}$$

نلاحظ أن ψ متصلة على المجال $[a, +\infty[$ لأنها عبارة عن خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $[a, +\infty[$.

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصراً من I .

فإن الدالة :

$$F : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال I . و التي تحقق :

$$\begin{cases} F(a) = 0 \\ F'(x) = f(x) ; (\forall x \in I) \end{cases}$$

لدينا ψ دالة متصلة على المجال $[a, +\infty[$. و لدينا كذلك $a \in [a, +\infty[$

$$J : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \int_a^x \psi(t) dt$$

إذن الدالة:

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة ψ على المجال $[a, +\infty[$.
ومنه : $J'(x) = \psi(x)$; $(\forall x \geq a)$ و $J(a) = 0$.

$$G(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{g(t)}{t} \right) dt = \int_x^{2x} \psi(t) dt$$

$$= \int_x^a \psi(t) dt + \int_a^{2x} \psi(t) dt$$

$$= \int_a^{2x} \psi(t) dt - \int_a^x \psi(t) dt$$

$$= J(2x) - J(x)$$

بما أن الدالتين J و $x \rightarrow 2x$ قابلتين للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.
فإن الدالة $J(2x) - J(x)$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ و ذلك حسب خاصية اشتقاق مُركب دالتين و مجموع دالتين .

$$\text{إذن : } G'(x) = (J(2x) - J(x))'$$

$$= (J(2x))' - J'(x)$$

$$= 2J'(2x) - J'(x)$$

$$= 2\psi(2x) - \psi(x)$$

$$= \frac{2g(2x)}{2x} - \frac{g(x)}{x} = \frac{g(2x) - g(x)}{x}$$

و بالتالي : $(\forall x > 0) ; G'(x) = \frac{g(2x) - g(x)}{x}$

التمرين الرابع

$$(\forall x > 0) ; G'(x) = \frac{g(2x) - g(x)}{x}$$

$$= \frac{(e^{4x} - 2e^{2x}) - (e^{2x} - 2e^x)}{x}$$

$$= \frac{e^{4x} - 3e^{2x} + 2e^x}{x}$$

$$= \frac{e^x((e^x)^3 - 3(e^x)^2 + 2(e^x))}{x}$$

$$= \frac{e^x(e^x - 1)(e^{2x} - 2)}{x}$$

إذن إشارة $G'(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $(e^{2x} - 2)$

و ذلك لأن : $(\forall x > 0) ; \frac{e^x(e^x - 1)}{x} > 0$

إذا كان : $x = \frac{\ln 2}{2}$. فإن : $G'(x) = 0$

إذا كان : $x > \frac{\ln 2}{2}$. فإن : $G'(x) > 0$

إذا كان : $x < \frac{\ln 2}{2}$. فإن : $G'(x) < 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة G كما يلي .

x	0	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$G'(x)$		-	+
G	$-\ln 2$	$G\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$	$+\infty$

لدينا f تشاكل من (U, \times) نحو (E, \times) .
 إذن صورة الزمرة التبادلية (U, \times) بالتشاكل f هي الزمرة التبادلية $(f(U), \times)$
 و بما أن f تقابلي فإن $f(U) = E$.
 إذن (E, \times) زمرة تبادلية.
 نستنتج إذن مميزات الزمرة (E, \times) انطلاقا من مميزات الزمرة (U, \times)
 وذلك عبر التطبيق f .
 لدينا 1 هو العنصر المحايد لـ \times في U .
 إذن $f(1)$ هو العنصر المحايد لـ \times في E . ($I = M(1,0) = f(1)$).
 ولدينا $x - iy$ هو مماثل كل عدد $x + iy$ بالنسبة لـ \times في U .
 إذن $M(x, -y)$ هي مماثلة $M(x, y)$ بالنسبة لـ \times في E .

التمرين الأول

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = M\left(\frac{-1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in E$$

نلاحظ في البداية أن : $\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$ لأن :

$$-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

سوف نستعمل هاتين الملاحظتين أثناء الحساب ، إضافة إلى التشاكل التقابلي f .
 ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

$$A^n = A \times A \times \dots \times A ; n \text{ fois}$$

$$= M\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times M\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \dots \times M\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) ; n \text{ fois}$$

$$= f\left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \dots \times f\left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) ; n \text{ fois}$$

$$= f\left(\left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right) ; n \text{ fois}$$

$$= f\left(e^{\frac{2i\pi}{3} \times n}\right) ; n \text{ fois}$$

$$= f\left(\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^n\right) ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$= f\left(e^{\frac{2ni\pi}{3}}\right) ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$= f\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right) ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$= M\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right); \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right) ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \\ -\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \end{pmatrix} ; n \in \mathbb{N}^*$$

وبالتالي : $A^n = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \\ -\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \end{pmatrix} ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

أو بتعبير أوضح نكتب :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \\ -\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

أجوبة امتحان مدينة أكادير 2009

لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصفوفتين من E . لدينا :

$$M(a, b) \times M(c, d) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(bc + ad) & ac - bd \end{pmatrix}$$

$$= M(ac - bd ; ad + bc)$$

التمرين الأول

في البداية نلاحظ أن E جزء من $M_2(\mathbb{R})$.
 لأنه يضم مصفوفات $M(a, b)$ من الرتبة 2.
 لكي يكون E مستقرا من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ يكفي أن نبين أن :
 $\forall M(a, b), M(c, d) \in E ; M(a, b) \times M(c, d) \in E$
 من أجل ذلك ، لدينا حسب السؤال أ) :

$$M(a, b) \times M(c, d) = M(ac - bd ; ad + bc)$$

ولدينا $a^2 + b^2 = 1$ و $c^2 + d^2 = 1$ لأن $(a, b) \in E$ و $(c, d) \in E$.
 إذن : $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$
 $= (ac)^2 + (bd)^2 - 2(ac)(bd) + (ad)^2 + (bc)^2 + 2(ad)(bc)$
 $= c^2(a^2 + b^2) + d^2(a^2 + b^2) + 0$
 $= c^2 \times 1 + d^2 \times 1$
 $= c^2 + d^2 = 1$

إذن المصفوفة $M(ac - bd ; ad + bc)$ تنتمي إلى المجموعة E .
 وبالتالي : $\forall M(a, b), M(c, d) \in E ; M(a, b) \times M(c, d) \in E$
 وهذا يعني أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.

التمرين الأول

لنبين الآن أن f تشاكل .
 ليكن $(a + ib)$ و $(c + id)$ عددين عقديين معيارهما 1 .
 لدينا : $f((a + ib) \times (c + id)) = f((ac - bd) + i(ad + bc))$
 $= M(ac - bd ; bc + ad)$
 $= M(a, b) \times M(c, d)$
 $= f(a + ib) \times f(c + id)$
 إذن f تشاكل من (U, \times) نحو (E, \times) .
 لنبين الآن أن f تقابل .

لتكن $M(a, b)$ مصفوفة من E (يعني $a^2 + b^2 = 1$)
 ولنحل في U المعادلة $(x + iy) = M(a, b)$ ذات المجهول $x + iy$.
 $f(x + iy) = M(a, b) \Leftrightarrow M(x, y) = M(a, b)$
 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

إذن المعادلة تقبل حلا وحيدا في U وهو العدد العقدي $(a + ib)$.
 وهو ينتمي إلى U لأن $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1} = 1$.
 أو بتعبير آخر :
 $(\forall M(a, b) \in E), (\exists! (x + iy) \in U) : f(x + iy) = M(a, b)$
 إذن f تقابل من U نحو E .
 وبالتالي نستنتج أن f تشاكل تقابلي من (U, \times) نحو (E, \times) .

$$\begin{aligned}
&= (1+a) \left(\frac{(1+i)^2}{2} \right) \\
&= (1+a) \left(\frac{2i}{2} \right) = i(1+a) \\
v &= \frac{(i-1)(1+ia) - (i-1)(i+a)}{2i} \\
&= \frac{(i-1)((1-i) - a(1-i))}{2i} \\
&= \frac{(i-1)(1-i)(1-a)}{-(i-1)^2} \\
&= \frac{-(i-1)^2(1-a)}{-(i-1)^2} = (1-a)
\end{aligned}$$

التمرين الثاني

1 2

لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(a)$ بحيث تكون O و B و C نقط مستقيمة .
 $(\Gamma) = \{ M(a) ; O, B \text{ et } C \text{ sont colinéaires} \}$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ M(a) ; \left(\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} \right) \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ M(a) ; \left(\frac{u}{v} \right) \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ M(a) ; \left(\frac{\bar{u}}{v} \right) = \frac{u}{v} \right\} \\
&= \left\{ M(a) ; \left(\frac{i(1+a)}{(1-a)} \right) = \frac{i(1+a)}{(1-a)} \right\} \\
&= \left\{ M(a) ; \frac{-i(1+\bar{a})}{1-\bar{a}} = \frac{i(1+a)}{(1-a)} \right\} \\
&= \left\{ M(a) ; \frac{1+\bar{a}}{\bar{a}-1} = \frac{1+a}{1-a} \right\} \\
&= \{ M(a) ; (1+\bar{a})(1-a) = (1+a)(\bar{a}-1) \} \\
&= \{ M(a) ; 2 - 2a\bar{a} = 0 \} \\
&= \{ M(a) ; a\bar{a} = 1 \} \\
&= \{ M(a) ; \sqrt{a\bar{a}} = 1 \} \\
&= \{ M(a) ; |a| = 1 \} \\
&= \text{le Cercle unité}
\end{aligned}$$

و بالتالي مجموعة النقط $M(a)$ التي من أجلها تكون النقط O و B و C مستقيمة هي الدائرة التي مركزها O و شعاعها 1 .

التمرين الثاني

1 2

ليكن R الدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يُحقق $R(A) = C$

$$\begin{aligned}
R(A) = C &\Leftrightarrow (z_C - \omega) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - \omega) \\
&\Leftrightarrow (v - \omega) = i(ia - \omega) \\
&\Leftrightarrow i\omega - \omega = i(ia) - v \\
&\Leftrightarrow \omega(i-1) = -a - 1 + a \\
&\Leftrightarrow \omega(i-1) = -1 \\
&\Leftrightarrow \omega(i-1)(i+1) = -(i+1) \\
&\Leftrightarrow \omega(-2) = -(i+1) \\
&\Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(i+1)
\end{aligned}$$

التمرين الأول

4

نحل في E المعادلة $X^4 = A$ و من أجل ذلك نضع : $X = M(a, b)$ و $a + ib = e^{i\theta}$.

$$\begin{aligned}
X^4 = A &\Leftrightarrow (M(a, b))^4 = A \\
&\Leftrightarrow M(a, b) \times M(a, b) \times M(a, b) \times M(a, b) = A \\
&\Leftrightarrow \underbrace{f(a+ib) \times \dots \times f(a+ib)}_{4 \text{ fois}} = M\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow f\left(\underbrace{(a+ib) \times \dots \times (a+ib)}_{4 \text{ fois}}\right) = f\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow f((a+ib)^4) = f\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow f((e^{i\theta})^4) = f\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \\
&\Leftrightarrow f(e^{4i\theta}) = f\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \\
&\Leftrightarrow f^{-1}(f(e^{4i\theta})) = f^{-1}\left(f\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\right) \\
&\Leftrightarrow e^{4i\theta} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \\
&\Leftrightarrow 4\theta \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \theta = \left(\frac{2\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4}\right) ; k \in \{0,1,2,3\} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \theta_0 = \frac{\pi}{6} \\ \theta_1 = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \\ \theta_2 = \frac{7\pi}{6} \\ \theta_3 = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow S = \left\{ \begin{array}{l} M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) ; M\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ M\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) ; M\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

التمرين الثاني

1

$$\begin{aligned}
\Delta &= (1-i)^2(1+ia)^2 - 4i(a^2 - 1) \\
&= -2i(1+2ai-a^2) - 4i(a^2 - 1) \\
&= -2i(1-a^2) - 2i(2ai) + 4i(1-a^2) \\
&= 2i(1-a^2) - 2i(2ai) \\
&= (-2i)(a^2 + 2ai + i^2) \\
&= (-2i)(a+i)^2
\end{aligned}$$

التمرين الثاني

1

لاحظ في البداية أن : $-2i = (1-i)^2$.

$$\Delta = (-2i)(a+i)^2 = ((1-i)(a+i))^2$$

إذن المعادلة تقبل حلين u و v معرفين كما يلي :

$$\begin{aligned}
u &= \frac{(i-1)(1+ia) + (i-1)(i+a)}{2i} \\
&= \frac{(i-1)(1+ia+i+a)}{2i} \\
&= \frac{(i-1)(1+a)(1+i)}{-(i-1)^2} \\
&= (1+a) \left(\frac{1+i}{1-i} \right) \\
&= (1+a) \left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \right)
\end{aligned}$$

لدينا : $|a| = 1$. إذن يمكن وضع $a = e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$.
و سوف نستعمل أثناء الحساب القاعدة التالية :

$$e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$\left(\frac{z_E - z_D}{z_E - z_A}\right) \times \left(\frac{z_O - z_D}{z_O - z_A}\right) = i \times \left(\frac{u^2}{ia}\right) = \frac{u^2}{a}$$

$$= \frac{(i(1+a))^2}{a} = \frac{-(1+a)^2}{a} = \frac{-(1+e^{i\theta})^2}{e^{i\theta}}$$

$$= \frac{-(e^{i\theta} + e^{i\theta})^2}{e^{i\theta}} = \frac{-(2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}})^2}{e^{i\theta}}$$

$$= \frac{-4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = -4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \in \mathbb{R}^-$$

$$\left(\frac{z_E - z_D}{z_E - z_A}\right) \times \left(\frac{z_O - z_D}{z_O - z_A}\right) \in \mathbb{R}^- \quad \text{إذن :}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\left(\frac{z_E - z_D}{z_E - z_A}\right) \times \left(\frac{z_O - z_D}{z_O - z_A}\right)\right) \equiv \pi [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_E - z_D}{z_E - z_A}\right) + \arg\left(\frac{z_O - z_D}{z_O - z_A}\right) \equiv \pi [2\pi]$$

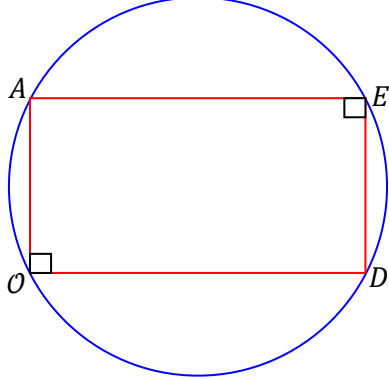
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_E}{z_A - z_E}\right) - \arg\left(\frac{z_A - z_O}{z_D - z_O}\right) \equiv \pi [2\pi]$$

$$\Rightarrow \overline{(\vec{EA}, \vec{ED})} - \overline{(\vec{OD}, \vec{OA})} = \pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \overline{(\vec{EA}, \vec{ED})} - \overline{(\vec{OD}, \vec{OA})} = (1 + 2k)\pi ; (1 + 2k) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \overline{(\vec{EA}, \vec{ED})} \equiv \overline{(\vec{OD}, \vec{OA})} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

و هذا يعني أن النقط A و O و D و E متداورة .



التمرين الثالث

سوف نستعمل البرهان بالترجع . و من أجل ذلك نعتبر العبارة (P_n) المعرفة بما يلي : $a_n \in \mathbb{N}^*$: (P_n) .
من أجل $n = 0$ لدينا $a_0 = 17 \in \mathbb{N}^*$.
إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و نفترض أن (P_n) صحيحة .

$$(P_n) \text{ est vraie} \Rightarrow a_n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow a_n \geq 1$$

$$\Rightarrow (a_n - 1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 + (a_n - 1)^2 \geq 1$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \geq 1$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie}$$

لنبين أن : $A \neq D$.

لدينا : $aff(D) - aff(A) = u^2 - ia$

$$= (i(1+a))^2 - ia$$

$$= -(1+a^2+2a) - ia$$

$$= -(a^2+2a+ia+1)$$

$$= -(a^2+(2+i)a+1) \neq 0 ; \text{(حسب المعطيات)}$$

إذن : $aff(D) - aff(A) \neq 0$.

يعني : $aff(D) \neq aff(A)$. **ومنه : $D \neq A$** .

لنبين أن $A \neq E$.

بالخلف، نفترض أن : $A = E$.

إذن : $aff(A) = aff(E)$. يعني : $ia = \frac{-(1+a)^2+a}{1-i}$.

يعني : $ia + a = -(1+a)^2 + a$.

يعني : $a^2 + 2a + ia + 1 = 0$.

أي : $a^2 + (2+i)a + 1 = 0$.

و هذا يتناقض مع المعطيات الصريحة للتمرين .

إذن : $A \neq E$.

لنبين الآن أن : $D \neq E$.

بالخلف، نفترض أن $D = E$.

إذن : $aff(E) = aff(D)$. يعني : $\frac{u^2+a}{1-i} = u^2$.

يعني : $u^2 + a = u^2 - i u^2$.

أي : $ai = u^2$. ومنه : $a = -i u^2$.

أي : $ai = (i(1+a))^2$. أي : $ai = -a^2 - 1 - 2a$.

أي : $a^2 + (2+i)a + 1 = 0$.

و هذا يتناقض مع المعطيات الصريحة للتمرين .

إذن ما افترضناه كان خاطئا .

إذن : $D \neq E$.

التمرين الثاني

لدينا : $\frac{z_E - z_D}{z_E - z_A} = \frac{u^2 + a}{1-i} - u^2$

$$= \frac{u^2 + a}{1-i} - ai$$

$$= \frac{u^2 + a - u^2 + i u^2}{1-i} \times \frac{1-i}{u^2 + a - ai - a}$$

$$= \frac{i u^2 + a}{u^2 - ai} = \frac{i(u^2 - ai)}{(u^2 - ai)} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_E - z_D}{z_E - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_E - z_D}{z_E - z_A} \right| = \left| e^{i\frac{\pi}{2}} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_E - z_D}{z_E - z_A}\right) \equiv \arg\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right) [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_E - z_D| = |z_E - z_A| \\ \overline{(\vec{AE}, \vec{DE})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ED = EA \\ \overline{(\vec{EA}, \vec{ED})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

و هذا يعني أن المثلث ADE مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في E .

التمرين الثالث

4

لقد حاولت أن أبين لكم أن $36^{16} \equiv 36 [100]$ و ذلك باستعمال النتائج السابقة فلم أفلح في ذلك، و ما توصلت إليه هو فقط أن $36^{16} \equiv 36 [10]$ و لقد حصلت عليها من خلال النتائج السابقة كما يلي :

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n \equiv 7 [10]$.

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (a_n - 1) \equiv 6 [10]$.

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (a_n - 1)^{16} \equiv 6^{16} [10]$ (1) .

من جهة أخرى لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n \equiv 7 [10]$.

إذن : $a_{n+4} \equiv 7 [10]$ لأن $(n+4) \in \mathbb{N}$.

و منه : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (a_{n+4} - 1) \equiv 6 [10]$.

و منه حسب (3) نستنتج أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; (a_{n+4} - 1) = (a_n - 1)^{16} \equiv 6 [10]$$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (a_n - 1)^{16} \equiv 6 [10]$ (2) .

من (1) و (2) نستنتج أن : $6^{16} \equiv 6 [10]$.

التي تُصبح : $(6^{16})^2 \equiv 6^2 [10]$.

يعني : $6^{2 \cdot 16} \equiv 36 [10]$.

يعني : $(6^2)^{16} \equiv 36 [10]$.

يعني : $36^{16} \equiv 36 [10]$ (3) .

و المشكل الكبير هو أنني لم أتمكن من المرور من (3) إلى $36^{16} \equiv 36 [100]$

و هذا لا يعني أنه لا توجد طريقة للمرور . فكروا في ذلك و أرسلوا الجواب

في حالة ما وجدتموه في رسالة قصيرة إلى الرقم +21260344136

و اربحوا سيارة فاخرة ها ها ها ها ها .

فيما يلي أقترح طريقة أخرى نبين من خلالها على أن $36^{16} \equiv 36 [100]$

دون استعمال نتائج الأسئلة السابقة .

لدينا : $36^{16} - 36 = 36(36^{15} - 1)$

$$= 36(36 - 1)(1 + 36 + 36^2 + \dots + 36^{14})$$

$$= 36 \times 35 \times (1 + 36 + 36^2 + \dots + 36^{14})$$

$$= 9 \times 4 \times 5 \times 7 \times (1 + 36 + 36^2 + \dots + 36^{14})$$

$$\begin{cases} 1 \equiv 1 [5] \\ 36 \equiv 1 [5] \\ 36^2 \equiv 1^2 [5] \\ \vdots \\ 36^{14} \equiv 1^{14} [5] \end{cases} \quad \text{و نلاحظ أن :}$$

نجمع هذه المتوافقات طرفا بطرف فنحصل على :

$$(1 + 36 + 36^2 + \dots + 36^{14}) \equiv 15 [5]$$

و بما أن : $15 \equiv 0 [5]$.

فإن : $(1 + 36 + 36^2 + \dots + 36^{14}) \equiv 0 [5]$.

و يوجد بذلك عنصر k من \mathbb{N} حيث $(1 + 36 + \dots + 36^{14}) = 5k$.

و بالتالي نكتب :

$$36^{16} - 36 = 9 \times 4 \times 5 \times 7 \times (1 + 36 + 36^2 + \dots + 36^{14})$$

$$= 9 \times 4 \times 5 \times 7 \times 5 \times k$$

$$= (4 \times 5 \times 5) \times (7 \times 9 \times k)$$

$$= 100 \times (63k)$$

$$= 100k' ; k' = 63k \in \mathbb{N}$$

إذن العدد 100 يقسم الفرق $36^{16} - 36$.

يعني : $36^{16} - 36 \equiv 0 [100]$.

و بالتالي : $36^{16} \equiv 36 [100]$ (*) .

التمرين الثالث

4

سوف نستعمل البرهان بالترجع و سوف نستعين بالنتيجة (*) .

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : a_{4n+2} \equiv 37 [100]$

من أجل $n = 0$ لدينا : $a_2 = 2^{2^4} + 1 = 65537 \equiv 37 [100]$

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

لقد حصلنا إذن على الوضعية الترجعية التالية :

$$\begin{cases} (P_0) \text{ est vraie} \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

إذن حسب مبدأ التراجع : (P_n) est toujours vraie .

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n \in \mathbb{N}^*$.

التمرين الثالث

2

سوف نُجيب باستعمال البرهان بالترجع (again)

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : a_n \equiv 7 [10]$

من أجل $n = 0$ لدينا : $a_0 = 17 \equiv 7 [10]$.

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عنصرا من \mathbb{N} و نفترض أن (P_0) عبارة صحيحة .

$$(P_n) \text{ est vraie} \Rightarrow a_n \equiv 7 [10]$$

$$\Rightarrow a_n - 1 \equiv 6 [10]$$

$$\Rightarrow (a_n - 1)^2 \equiv 36 [10]$$

$$\Rightarrow 1 + (a_n - 1)^2 \equiv 37 [10]$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \equiv 37 \equiv 7 [10]$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \equiv 7 [10]$$

$$\Rightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie}$$

و نحصل بذلك على الوضعية الترجعية التالية :

$$\begin{cases} (P_0) \text{ est vraie} \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

إذن حسب مبدأ التراجع : (P_n) est toujours vraie .

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n \equiv 7 [10]$.

التمرين الثالث

3

سوف نستعمل من جديد البرهان بالترجع (it's a shame)

نعتبر العبارة (Q_n) التالية : $(Q_n) : a_n = 2^{2^{n+2}} + 1$

من أجل $n = 0$ ، لدينا $a_0 = 2^{2^2} + 1 = 17$.

إذن العبارة (Q_0) صحيحة .

ليكن n عنصرا من \mathbb{N} و نفترض أن (Q_n) عبارة صحيحة .

$$(Q_n) \text{ est vraie} \Rightarrow a_n = 2^{2^{n+2}} + 1$$

$$\Rightarrow a_n - 1 = 2^{2^{n+2}}$$

$$\Rightarrow (a_n - 1)^2 = 2^{2^{n+3}}$$

$$\Rightarrow 1 + (a_n - 1)^2 = 2^{2^{n+3}} + 1$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 2^{(n+1)+2} + 1$$

$$\Rightarrow (Q_{n+1}) \text{ est vraie}$$

و بذلك نحصل على الوضعية الترجعية التالية :

$$\begin{cases} (Q_0) \text{ est vraie} \\ (Q_n) \Rightarrow (Q_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

إذن حسب مبدأ التراجع : (Q_n) est toujours vraie .

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n = 2^{2^{n+2}} + 1$.

التمرين الثالث

3

بإمكانك استعمال البرهان بالترجع مرة أخرى دون أن تخجل من ذلك .

أما أنا فلا (that's enough, it's too bad)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

$$\text{لدينا : } (a_n - 1)^{16} + 1 = (2^{2^{n+2}} + 1 - 1)^{16} + 1$$

$$= (2^{2^{n+2}})^{16} + 1 = 2^{16 \cdot 2^{n+2}} + 1$$

$$= 2^{(4 \cdot 2^{n+2})} + 1 = 2^{2^{(n+4)+2}} + 1 = a_{n+4}$$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_{n+4} = (a_n - 1)^{16} + 1$

التمرين الرابع

3 I

لدينا : $f'(x) = -\ln x$; $(\forall x > 0)$
 إذا كان $x = 1$ فإن $f'(x) = 0$
 إذا كان $x > 1$ فإن $f'(x) < 0$
 إذا كان $x < 1$ فإن $f'(x) > 0$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x)$
 $= (+\infty)(1 - (+\infty)) = (+\infty)(-\infty) = (-\infty)$

إذن نرسم جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
f	0	↗	1	↘

التمرين الرابع

4 I

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{e^{(n-1)}}{n^n}$
 $= n^{-n} \times e^{(n-1)}$
 $= e^{-n \ln n} \times e^{(n-1)} = e^{-n \ln n + n - 1}$
 $= e^{(n-1) - n \ln n} = e^{f(n)-1}$

التمرين الرابع

4 I

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $[1, +\infty[$
 يعني : $(\forall x, y \in [1, +\infty[) ; x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$
 ليكن n عنصراً من \mathbb{N}^*

إذن n و $(n+1)$ عنصرين من المجال $[1, +\infty[$
 ومنه : $(n+1) > n \Leftrightarrow f(n+1) < f(n)$
 $\Leftrightarrow f(n+1) - 1 < f(n) - 1$
 $\Leftrightarrow e^{f(n+1)-1} < e^{f(n)-1}$
 $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n ; \forall n \in \mathbb{N}^*$
 $\Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite \searrow

و بالتالي $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تناقصية قطعاً .

ولدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{f(n)-1} = \lim_{\substack{n \rightarrow -\infty \\ m=f(n)-1 \\ f(n) \rightarrow -\infty}} e^m = 0$

التمرين الرابع

5 I

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $[1, +\infty[$
 إذن f دالة متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $[1, e]$
 وذلك لأن : $[1, e] \subset [1, +\infty[$

و منه f تقابل من $[1, e]$ نحو صورته $f([1, e])$
 ولدينا : $f([1, e]) = [f(e); f(1)] = [0; 1]$

إذن f تقابل من المجال $[1, e]$ نحو المجال $[0, 1]$
 أو بتعبير أوضح : $(\forall y \in [0, 1]) ; (\exists ! x \in [1, e]) ; f(x) = y$
 أو بتعبير أجمل نقول : كل عنصر y من مجموعة الوصول $[0, 1]$ يقبل سابقاً وحيداً x من مجموعة الانطلاق $[1, e]$

لنبين الآن أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \in [0, 1]$

نلاحظ من خلال جدول تغيرات f أنها دالة تقبل مطرافاً عند النقطة 1
 وهذا المطراف هو قيمة قصوى 1 . لأن $f'(x)$ تنعدم في 1 و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطة .

إذن : $(\forall x \geq 0) ; f(x) \leq 1$
 يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(n) \leq 1$
 أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(n) - 1 \leq 0$
 يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; e^{f(n)-1} \leq 1$
 أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \leq 1$ (2)

ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً و نفترض أن (P_n) عبارة صحيحة .

(P_n) est vraie $\Rightarrow a_{4n+2} \equiv 37 [100]$

$\Rightarrow 2^{2^{4n+2}} + 1 \equiv 37 [100]$

$\Rightarrow 2^{2^{4n+4}} \equiv 36 [100]$

$\Rightarrow (2^{2^{4n+4}})^{16} \equiv 36^{16} [100]$

$\Rightarrow (2^{2^{4n+4}})^{16} \equiv 36 [100] ; d'après (*)$

$\Rightarrow 2^{(16 \cdot 2^{4n+4})} \equiv 36 [100]$

$\Rightarrow 2^{(2^4 \cdot 2^{4n+4})} \equiv 36 [100]$

$\Rightarrow 2^{2^{4n+8}} \equiv 36 [100]$

$\Rightarrow 2^{2^{(4(n+1)+2)}} + 1 \equiv 37 [100]$

$\Rightarrow a_{4(n+1)+2} \equiv 37 [100]$

$\Rightarrow (P_{n+1})$ est vraie

و نحصل بذلك على الوضعية الترجيعية التالية :

$\begin{cases} (P_0) \text{ est vraie} \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

إذن حسب مبدأ التراجع نستنتج أن : (P_n) est toujours vraie
 يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_{4n+2} \equiv 37 [100]$

التمرين الرابع

1 I

على المجال $]0, +\infty[$ لدينا f عبارة عن فرق دالتين متصلتين على $]0, +\infty[$
 إذن f دالة متصلة على المجال $]0, +\infty[$
 لندرس الآن اتصال الدالة f في الصفر على اليمين .

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \ln x) = 0 - 0 = 0 = f(0)$
 إذن f دالة متصلة على يمين 0 .

و بذلك تكون الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ قابلة للتعميد بالاتصال في الصفر و $f(0) = 0$

التمرين الرابع

1 I

لدينا : $(\forall x \geq 0) ; f(x) = x - x \ln x = x(1 - \ln x)$
 إذن تنعدم الدالة f في نقطتين 0 و 1 .

x	0	e	$+\infty$
x	0	+	+
$1 - \ln x$		+	0
$f(x)$	0	+	0

التمرين الرابع

2 I

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 - \ln x)}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x) = 1 - (-\infty) = +\infty \notin \mathbb{R}$
 إذن f غير قابلة للاشتقاق على يمين الصفر .

التمرين الرابع

2 I

لدينا $x \rightarrow \ln x$ و $x \rightarrow x$ دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0, +\infty[$
 إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ لأنها عبارة عن فرق دالة و جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$
 ولدينا : $(\forall x > 0) ; f'(x) = (x - x \ln x)'$
 $= 1 - (x \ln x)' = 1 - (\ln x + 1)$
 $= -\ln x$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\left[\frac{t^2 \ln t}{2} \right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{2t} dt \right) \\
&= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int_1^x t dt \right) \\
&= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^x \right) \\
&= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{x^2 \ln x}{2} \right) \\
&= \frac{3}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{x^2 \ln x}{2} \right) \\
&= \frac{3}{4} (x^2 - 1) - \frac{1}{2} (x^2 \ln x)
\end{aligned}$$

التمرين الرابع

II 2 ب

لدينا F دالة متصلة في الصفر على اليمين .

$$\begin{aligned}
F(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{4} (x^2 - 1) - \frac{1}{2} (x^2 \ln x) \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{4} (x^2 - 1) \right) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{2} \right) \cdot (x \ln x) \\
&= \frac{3}{4} (0^2 - 1) - 0 \times 0 = \frac{-3}{4}
\end{aligned}$$

التمرين الرابع

II 3 أ

المعلومة التي سوف نحتاجها هي نهاية الدالة F عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4x^2} - \frac{\ln x}{2} \right) = -\infty$$

x	0	1	e	$+\infty$
$F'(x)$	0	+	+	0
F	$-\frac{3}{4}$	0	$F(e)$	$-\infty$

التمرين الرابع

II 3 ب

لدينا حسب ما سبق : F دالة متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $]e, +\infty[$.
 إذن F تقابل من المجال $]e, +\infty[$ نحو المجال $]e, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
F(]e, +\infty[) &=] \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x), F(e) [\text{ ولدينا :} \\
&=] -\infty ; \frac{e^2 - 3}{4} [\\
&\approx] -\infty ; 1,1[
\end{aligned}$$

إذن F تقابل من $]e, +\infty[$ نحو $] -\infty ; 1,1[$.

يعني : $(\forall y \in] -\infty ; 1,1[) (\exists ! x \in]e, +\infty[) ; f(x) = y$
 يعني أن كل عنصر y من $] -\infty ; 1,1[$ يقبل سابقاً واحداً x من المجال $]e, +\infty[$ بالتقابل F .

بما أن 0 عنصر من المجال $] -\infty ; 1,1[$ فإنه يمتلك سابقاً واحداً α من المجال $]e, +\infty[$ بالتقابل F .

يعني : $0 \in] -\infty ; 1,1[\Rightarrow \exists ! \alpha > e ; F(\alpha) = 0$

يعني أن المعادلة $F(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]e, +\infty[$.

من جهة أخرى لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x > 0$ لكن عندما يؤول x إلى $-\infty$ تؤول الكمية e^x إلى 0 .

نستطيع إذن أن نكتب : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq 0$

إذن : $(2) (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; e^{(f(n)-1)} \geq 0$

لأن الكمية $(f(n) - 1)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول n إلى $+\infty$.

من (1) و (2) نستنتج أن : $0 \leq e^{(f(n)-1)} \leq 1$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; أي :

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq u_n \leq 1$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \in [0,1]$

رأينا أن f تقابل من المجال $[1, e]$ نحو المجال $[0,1]$.

بما أن u_n عنصر من المجال $[0,1]$ فإنه يمتلك سابقاً وحيداً v_n من المجال $[1, e]$ بالدالة f .

أو بتعبير آخر : $\exists ! v_n \in [1, e] ; f(v_n) = u_n$.

أو بتعبير آخر نقول أن المعادلة $f(x) = u_n$ ، حيث $n \in \mathbb{N}^*$ ،

تقبل حلاً وحيداً في المجال $[1, e]$.

التمرين الرابع

I 6

$n \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} < u_n ; \text{car } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est } \searrow$

$\Rightarrow f^{-1}(u_{n+1}) < f^{-1}(u_n)$

$\text{car } f \text{ et } f^{-1} \text{ sont } \nearrow \text{ sur } [0,1]$

$\text{et } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \in [0,1]$

$\Rightarrow f^{-1}(f(v_{n+1})) < f^{-1}(f(v_n))$

$\text{car } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(v_n) = u_n$

$\Rightarrow v_{n+1} < v_n ; n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite décroissante}$

$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite convergente}$

$\text{car elle est minorée par } 1 \text{ d'après } 1 \leq v_n \leq e$

$u_n = f(v_n) \Rightarrow v_n = f^{-1}(u_n) \text{ avec } f^{-1} : [0,1] \rightarrow [1, e]$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(u_n)$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = f^{-1}(0) \text{ car } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = 1 \text{ car } f^{-1}(0) = 1$

التمرين الرابع

II 1

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و a عنصر من I فإن الدالة :

$$\begin{aligned}
F : I &\rightarrow \mathbb{R} \\
x &\rightarrow \int_a^x f(t) dt
\end{aligned}$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال I و التي تتعدم في a .

لدينا f متصلة على المجال $]0; +\infty[$ ولدينا $1 \in]0; +\infty[$.

إذن الدالة :

$$\begin{aligned}
F :]0; +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\
x &\rightarrow \int_1^x f(t) dt
\end{aligned}$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ و التي تُحقق

$(\forall x \geq 0) ; F'(x) = f(x) \text{ و } F(1) = 0$.

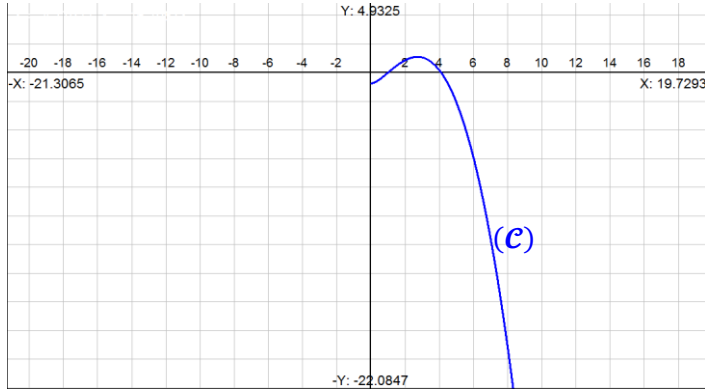
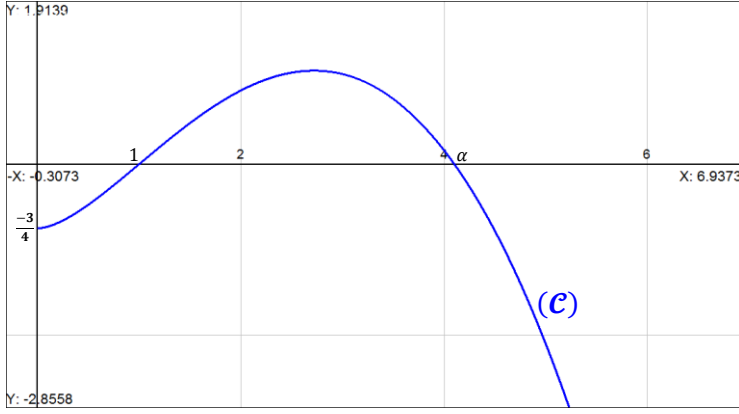
إذن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$.

و كذلك : $(\forall x \in]0; +\infty[; F'(x) = f(x)$

التمرين الرابع

II 2 أ

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_1^x (t - t \ln t) dt \quad \text{ليكن } x \text{ عنصراً من المجال }]0; +\infty[\\
&= \int_1^x t dt - \int_1^x (t \ln t) dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{u(t)} \cdot \ln t dt
\end{aligned}$$



لنبين الآن أن $4 < \alpha < 5$.

$$F(4) = \frac{3}{4}(4^2 - 1) - \frac{4^2}{2} \ln 4 \approx 0,16$$

في البداية لدينا :

$$F(5) = \frac{3}{4}(5^2 - 1) - \frac{5^2}{2} \ln 5 \approx -2,11$$

و نعلم أن F و F^{-1} دالتين تناقصيتين معاً حيث :

$$F :]e, +\infty[\rightarrow]-\infty ; 1,1[$$

$$F^{-1} :]-\infty ; 1,1[\rightarrow]e, +\infty[$$

ننطلق إذن من الملاحظة التالية : $-2,11 < 0 < 0,16$.

يعني : $F(5) < F(\alpha) < F(4)$

ندخل الدالة التناقصية F^{-1} على هذه الأعداد المنتمية إلى $]-\infty ; 1,1[$

نحصل على : $F^{-1}(F(5)) < F^{-1}(F(\alpha)) < F^{-1}(F(4))$

و بما أن : $F^{-1} \circ F \equiv Id_{]e, +\infty[}$

إذن نستنتج أن : $5 > \alpha > 4$.

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}(x^2 - 1) - \frac{x^2 \ln x}{2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4x^2} - \frac{\ln x}{2} \right)$$

$$= (+\infty)^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}(0) - \frac{1}{2}(+\infty) \right)$$

$$= (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

و لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \left(x - \frac{1}{x} \right) - \frac{x \ln x}{2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4x^2} - \frac{\ln x}{2} \right) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = -\infty \end{cases}$$

نحن أمام الوضعية التالية :

و نقول أن (C) يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور الأرتيب موجه نحو الأسفل بجوار $+\infty$.

لدراسة تقعر المنحني (C) و نقط الانعطاف ندرس إشارة المشتقة الثانية $F''(x)$

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$. لدينا : $F'(x) = f(x)$.

و رأينا أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.

إذن : $F''(x) = f'(x) = -\ln x$; $(\forall x > 0)$

إذا كان : $x = 1$. فإن : $F''(x) = 0$.

إذا كان : $x > 1$. فإن : $F''(x) < 0$.

إذا كان : $x < 1$. فإن : $F''(x) > 0$.

و لدينا : $F(1) = 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات التقعر كما يلي :

x	0	1	$+\infty$
$F''(x)$	+	0	-
F		(1,0) نقطة انعطاف	(C) مقعر
		(C) محذب	(C) لـ

لدينا (1,0) نقطة انعطاف للمنحني (C) لأن F'' تتعدم في 1 و تتغير

إشارتها بجوار هذه النقطة التي أفصولها 1.

أجوبة امتحان مدينة فاس 2010

التمرين الأول

1

لكي يكون G جزءا مستقرا من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ يكفي أن يضم مصفوفات من الرتبة 3 و $M_\theta \times M_{\theta'} \in G$; $\forall (M_\theta, M_{\theta'}) \in G^2$.
لتكن M_θ و $M_{\theta'}$ مصفوفتين من G .

$$M_\theta \times M_{\theta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta' & -\sin \theta' \\ 0 & \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' & -(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta') \\ 0 & \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta' & \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ 0 & \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} \\ = M_{\theta + \theta'} \in G ; \text{car } (\theta + \theta') \in \mathbb{R}$$

لقد حصلنا على ما يلي :

$$\forall (M_\theta, M_{\theta'}) \in G^2 ; M_\theta \times M_{\theta'} = M_{\theta + \theta'} \in G$$

إذن G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

التمرين الأول

2

نعتبر المجموعة : $U = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$

U هي مجموعة الأعداد العقدية التي معيارها يساوي 1 .

إذن U جزء غير فارغ من المجموعة \mathbb{C}^* .

ليكن z و z' عنصرين من U و لنبين أن $\frac{z}{z'}$ عنصر من U .

$$\text{لدينا : } \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{لدينا : } \forall (z, z') \in U^2 ; \left(\frac{z}{z'} \right) \in U$$

نستنتج إذن حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية أن (U, \times) زمرة جزئية من الزمرة التبادلية (\mathbb{C}^*, \times) .

التمرين الأول

أ

3

ليكن $e^{i\theta}$ و $e^{i\theta'}$ عنصرين من U .

$$\text{لدينا : } \varphi(e^{i\theta} \times e^{i\theta'}) = \varphi(e^{i(\theta + \theta')}) = M_{\theta + \theta'} \\ = M_\theta \times M_{\theta'} ; \text{ d'après (1)} \\ = \varphi(e^{i\theta}) \times \varphi(e^{i\theta'})$$

$$\forall (e^{i\theta}, e^{i\theta'}) \in U^2 ; \varphi(e^{i\theta} \times e^{i\theta'}) = \varphi(e^{i\theta}) \times \varphi(e^{i\theta'})$$

يعني أن φ تشاكل من (U, \times) نحو (G, \times) .

لنبين الآن أن φ تقابل .

لتكن M_θ مصفوفة من G . المعادلة ذات المجهول e^{ix} التالية $M_\theta = \varphi(e^{ix})$ تقبل حلا وحيدا في U و هو العدد العقدي $e^{i\theta}$.

$$\text{لأن } \varphi(e^{ix}) = M_\theta \Leftrightarrow M_x = M_\theta$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos \theta \\ \sin x = \sin \theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \equiv \theta [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow e^{ix} = e^{i\theta}$$

إذن نستنتج أن :

$$(\forall M_\theta \in G), (\exists! e^{ix} = e^{i\theta} \in U) : \varphi(e^{ix}) = M_\theta$$

و هذا يعني أن التطبيق φ تقابل من (U, \times) نحو (G, \times) .

و بالتالي φ تشاكل تقابلي من (U, \times) نحو (G, \times) .

التمرين الأول

ب

3

لدينا φ تشاكل من (U, \times) نحو (G, \times) .

إذن صورة الزمرة التبادلية (U, \times) هي الزمرة التبادلية $(\varphi(U), \times)$.

و بما أن φ تقابل فإن $\varphi(U) = G$.

إذن (G, \times) زمرة تبادلية و نستنتج مميزات من خلال مميزات المجموعة

(U, \times) عن طريق التشاكل التقابلي φ .

لدينا $e^{i0} = 1$ هو العنصر المحايد للضرب في U .

إذن $\varphi(e^{i0}) = M_0$ هو العنصر المحايد للضرب في G .

و لدينا كل عدد $e^{i\theta}$ من U يقبل ماثلا في U و هو العدد العقدي $e^{-i\theta}$

إذن كل مصفوفة $M_\theta = \varphi(e^{i\theta})$ من G تقبل ماثلة في G

و هي المصفوفة $M_{-\theta} = \varphi(e^{-i\theta})$.

$$\text{و لدينا : } \varphi(e^{i0}) = M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

و كذلك : $M_\theta \times M_{-\theta} = M_{\theta - \theta} = M_0 = I$

التمرين الأول

ب

4

رأينا أن (G, \times) زمرة تبادلية . و ذلك حسب نتيجة السؤال (3 ب) .

و كل مصفوفة M_θ تقبل ماثلة $M_{-\theta}$. أي : $M_\theta \times M_{-\theta} = I$

يعني : $(M_\theta)^{-1} = M_{-\theta}$

أو بتعبير آخر نكتب : $(M_\theta)^{-1} = \text{Sym}(M_\theta) = \text{Sym}(\varphi(e^{i\theta}))$

$$= \varphi(\text{Sym}(e^{i\theta})) = \varphi(e^{-i\theta}) = M_{-\theta}$$

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

$$(M_\theta)^n = M_\theta \times \dots \times M_\theta ; n \text{ fois}$$

$$= \varphi(e^{i\theta}) \times \dots \times \varphi(e^{i\theta}) ; n \text{ fois}$$

$$= \varphi\left(\underbrace{e^{i\theta} \times \dots \times e^{i\theta}}_{n \text{ fois}}\right) ; (f \text{ تشاكل})$$

$$= \varphi((e^{i\theta})^n)$$

$$= \varphi(e^{in\theta}) ; n\theta \in \mathbb{R}$$

$$= M_{n\theta}$$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; (M_\theta)^n = M_{n\theta}$

التمرين الثاني

أ

1

أ

ليكن z عددا عقديا مخالفا للعدد i .

$$|\varphi(z)| = \left| i \left(\frac{z - 2i}{z - i} \right) \right| = |i| \cdot \left| \frac{z - 2i}{z - i} \right| = \frac{|z_M - z_A|}{|z_M - z_B|} \\ = \frac{|z_M - z_A|}{|z_M - z_B|} = \frac{AM}{BM}$$

التمرين الثاني

ب

1

أ

$$\arg(\varphi(z)) \equiv \arg\left(i \left(\frac{z - 2i}{z - i} \right)\right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(\varphi(z)) \equiv \arg(i) + \arg\left(\frac{z - 2i}{z - i}\right) [2\pi]$$

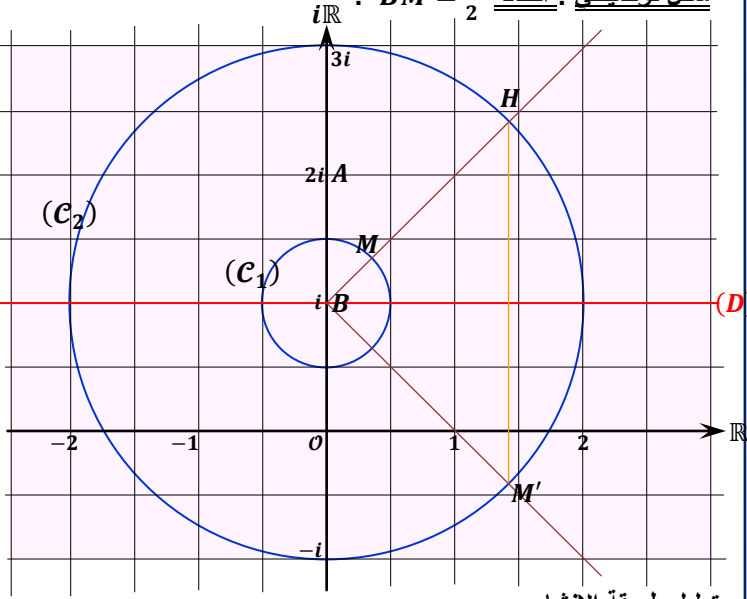
$$\Rightarrow \arg(\varphi(z)) \equiv \frac{\pi}{2} + \arg\left(\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(\varphi(z)) \equiv \frac{\pi}{2} + \overline{(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})} [2\pi]$$

طريقة إنشاء النقطة M انطلاقا من النقطة M' .

- نطلق من معلم ونُمثل عليه النقطتين $A(2i)$ و $B(i)$.
- نمثل بعد ذلك النقطة M المعرفة بلحقتها z المخالف لـ i و $2i$.
- نرسم المستقيم (D) المار من B و الموازي للمحور الحقيقي.
- نرسم الدائرة (C_1) التي مركزها B و تمر من M .
- نرسم الدائرة (C_2) التي مركزها B و شعاعها $\frac{1}{MB}$.
- نصف المستقيم $[BM]$ يقطع الدائرة (C_2) في نقطة H .
- المستقيم المار من H و العمودي على (D) يقطع الدائرة (C_2) في نقطة هي M' .

شكل توضيحي: الحالة $BM = \frac{1}{2}$



تعليل طريقة الإنشاء.

في البداية نلاحظ أن النقطتين A و B لا تصلح لهما هذه الطريقة.

لأن: $\varphi(2i) = \frac{i(2i-2i)}{2i-i} = 0$ و $\varphi(i)$ n' existe pas

إذن صورة A بهذا التحويل هي أصل المعلم.

و النقطة B لا صورة لها بهذا التحويل.

بعد ذلك، رأينا أنه إذا كانت $M(z)$ تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها B و شعاعها $\frac{1}{2}$ فإن النقطة $M'(\varphi(z))$ تنتمي إلى الدائرة (C') التي مركزها B و شعاعها 2 .

و يُمكن تعميم هذه النتيجة و نقول أنه إذا كانت $M(z)$ تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها B و شعاعها BM فإن النقطة $M'(\varphi(z))$ تنتمي إلى

الدائرة (C') التي مركزها B و شعاعها $\frac{1}{BM}$.

يكفي الآن تحديد الموقع الهندسي للنقطة M' على الدائرة (C_2) .

و من أجل ذلك نستعين بالعلاقة التالية:

$$\arg(\varphi(z) - i) \equiv -\arg(z - i) [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(z_{M'} - z_B) + \arg(z_M - z_B) \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{M'} - z_B}{1 - 0}\right) + \arg\left(\frac{z_M - z_B}{1 - 0}\right) \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\vec{e}_1, \overrightarrow{BM'}) + (\vec{e}_1, \overrightarrow{BM}) \equiv 0 [2\pi]$$

و هذا يعني أن الزاويتين $(\vec{e}_1, \overrightarrow{BM'})$ و $(\vec{e}_1, \overrightarrow{BM})$ لهما قياسين

متعاكسين جبريا. و لتحقيق ذلك نرسم مماتلة الزاوية $(\vec{e}_1, \overrightarrow{BM})$ بالنسبة للمحور (D) فنحصل على النقطة M' .

$$E = \{ M(z) ; |\varphi(z)| = 1 \}$$

$$= \left\{ M(z) ; \frac{AM}{BM} = 1 \right\}$$

$$= \{ M(z) ; AM = BM \}$$

= la médiatrice du segment $[AB]$

= واسط القطعة $[AB]$

$$F = \{ M(z) ; |\varphi(z)| \in \mathbb{R} \}$$

$$= \left\{ M(z) ; \arg(\varphi(z)) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \right\}$$

$$= \left\{ M(z) ; \frac{\pi}{2} + (\overline{BM}, \overline{AM}) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + k'\pi \right\}$$

$$= \left\{ M(z) ; (\overline{BM}, \overline{AM}) = 0 + (k' - 2k)\pi ; \begin{cases} k, k' \in \mathbb{Z} \\ (k' - 2k) \in \mathbb{Z} \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ M(z) ; (\overline{BM}, \overline{AM}) \equiv 0 [\pi] \right\}$$

$$= \left\{ M(z) ; M \in (AB) ; \begin{cases} M \neq A \\ M \neq B \end{cases} \right\}$$

= la droite (AB) privée des points A et B

= المستقيم (AB) المحروم من A و B

ليكن z عددا عقديا مخالفا للعدد العقدي i .

$$(\varphi(z) - i) = i \left(\frac{z - 2i}{z - i} \right) - i = \frac{i(z - 2i - z + i)}{(z - i)}$$

$$= \frac{i(-i)}{(z - i)} = \frac{1}{z - i}$$

$$\varphi(z) - i = \frac{1}{z - i} \quad \text{إذن:}$$

$$\Rightarrow \arg(\varphi(z) - i) \equiv \arg\left(\frac{1}{z - i}\right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(\varphi(z) - i) \equiv \arg(1) - \arg(z - i) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(\varphi(z) - i) \equiv 0 - \arg(z - i) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(\varphi(z) - i) \equiv -\arg(z - i) [2\pi]$$

$$\varphi(z) - i = \frac{1}{z - i} \quad \text{ولدينا كذلك:}$$

$$\Rightarrow |\varphi(z) - i| \equiv \left| \frac{1}{z - i} \right| = \frac{|1|}{|z - i|} = \frac{1}{|z - i|}$$

$$M(z) \in (C) \Leftrightarrow BM = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_B| = \frac{1}{2}$$

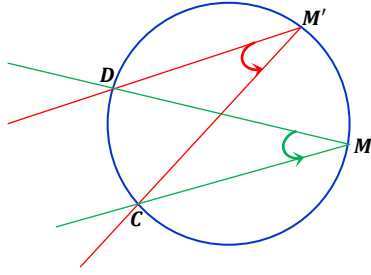
$$\Leftrightarrow \frac{1}{|z - i|} = 2$$

$$\Leftrightarrow |\varphi(z) - i| = \frac{1}{|z - i|} = 2$$

$$\Leftrightarrow |z_{M'} - z_B| = 2$$

$$\Leftrightarrow BM' = 2$$

$$\Leftrightarrow M' \in C'(B, 2)$$



التمرين الثاني

3 III

سوف نستعمل في هذا السؤال القاعدة المهمة التالية:

$$e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$\varphi(z) = \frac{i(z-2i)}{z-i} = \frac{i(i+e^{i\theta}-2i)}{i+e^{i\theta}-i} \quad \text{لدينا:}$$

$$= \frac{i(e^{i\theta}-i)}{e^{i\theta}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}(e^{i\theta}+e^{-\frac{i\pi}{2}})}{e^{i\theta}}$$

$$= \frac{e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} + e^{i0}}{e^{i\theta}}$$

$$= \frac{2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}}{e^{i\theta}}$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} - \theta\right)}$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow |\varphi(z)| = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\arg(\varphi(z)) \equiv \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) [2\pi]$$

التمرين الثالث

1

لنحل في \mathbb{Z}^2 المعادلة التالية: $3x - 5y = 13$ (E) في البداية نلاحظ أن المعادلة (E) قابلة للحل في \mathbb{Z}^2 .

وذلك لأن القاسم المشترك الأكبر لـ 3 و 5 (أي العدد 1) يقسم العدد 13 لنحدد أولاً حلاً خاصاً للمعادلة (E) باستعمال خوارزمية أقليدس.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{array} \Rightarrow 2 = 5 - 3 \times 1 \quad (1)$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 1 = 3 - 1 \times 2 \quad (2)$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \Rightarrow \text{just stop right here}$$

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 3 و 5 هو آخر باقي غير منعدم في القسومات المتتالية. يعني $5 \wedge 3 = 1$.

في الحقيقة، نحن لا نحتاج لاستدعاء خوارزمية أقليدس بضخامتها لتحديد القاسم المشترك الأكبر للعددين 3 و 5. يكفي أن نلاحظ أن 3 و 5 عدنان أوليان موجبان إذن فهما أوليان فيما بينهما ($5 \wedge 3 = 1$).

لقد تم استدعاء أقليدس و خوارزميته لتحديد الحل الخاص للمعادلة (E) وهذا ما سوف أعرضه الآن:

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 1 \times 2 \quad ; \quad d' \text{ après } (2) \\ &= 3 - 1 \times (5 - 3 \times 1) \quad ; \quad d \text{ après } (1) \\ &= 3 - 5 \times 1 + 3 \times 1 \\ &= 2 \times 3 - 5 \times 1 \end{aligned}$$

التمرين الثاني

1 III

$$\varphi(z) = z \Leftrightarrow i \left(\frac{z-2i}{z-i} \right) = z$$

$$\Leftrightarrow z(z-i) = i(z-2i)$$

$$\Leftrightarrow z^2 - iz = iz + 2$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2iz - 2 = 0 \quad ; \quad (\Delta = 4)$$

$$\Leftrightarrow u = i + 1 \quad \text{et} \quad v = i - 1$$

التمرين الثاني

2 III

$$\frac{\varphi(z) - u}{\varphi(z) - v} = \frac{i(z-2i)}{(z-i)} - (i+1)$$

$$= \frac{i(z-2i) - (z-i)(i+1)}{(z-i) - (i-1)}$$

$$= \frac{i(z-2i) - (z-i)(i+1)}{i(z-2i) - (z-i)(i-1)}$$

$$= \frac{1+i-z}{1-i+z} = - \left(\frac{z-(1+i)}{z-(i-1)} \right) = - \left(\frac{z-u}{z-v} \right)$$

التمرين الثاني

2 III

$$\frac{\varphi(z) - u}{\varphi(z) - v} = - \left(\frac{z-u}{z-v} \right) \Leftrightarrow \frac{u - \varphi(z)}{v - \varphi(z)} = - \left(\frac{u-z}{v-z} \right)$$

$$\Rightarrow \arg \left(\frac{u - \varphi(z)}{v - \varphi(z)} \right) \equiv \arg \left(- \left(\frac{u-z}{v-z} \right) \right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg \left(\frac{u - \varphi(z)}{v - \varphi(z)} \right) \equiv \arg(-1) + \arg \left(\frac{u-z}{v-z} \right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg \left(\frac{z_c - z_{M'}}{z_D - z_{M'}} \right) \equiv \pi + \arg \left(\frac{z_c - z_M}{z_D - z_M} \right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \overline{(M'D, M'C)} \equiv \pi + \overline{(MD, MC)} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \overline{(M'D, M'C)} \equiv \pi + 0 + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \overline{(M'D, M'C)} \equiv (1+2k)\pi \quad ; \quad (1+2k) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \overline{(M'D, M'C)} \equiv 0[\pi] \quad (*)$$

التمرين الثاني

2 III

إذا كانت M و C و D نقط مستقيمة. فإن: $\overline{(MD, MC)} \equiv 0[\pi]$

ومنه حسب (*) نستنتج أن: $\overline{(M'D, M'C)} \equiv 0[\pi]$ يعني أن M' و D و C نقط مستقيمة.

وبذلك نحصل على النظمة التالية: $\left. \begin{array}{l} M \text{ و } C \text{ و } D \text{ مستقيمة} \\ M' \text{ و } C \text{ و } D \text{ مستقيمة} \end{array} \right\}$

يعني: $M \in (DC)$ و $M' \in (DC)$

إذن M و M' و C و D نقط مستقيمة.

إذا كانت M و C و D غير مستقيمة.

$$\frac{\varphi(z) - u}{\varphi(z) - v} = - \left(\frac{z-u}{z-v} \right) \Leftrightarrow \frac{u - \varphi(z)}{v - \varphi(z)} = - \left(\frac{u-z}{v-z} \right)$$

$$\Rightarrow \arg \left(\frac{z_c - z_{M'}}{z_D - z_{M'}} \right) \equiv \pi + \arg \left(\frac{z_c - z_M}{z_D - z_M} \right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \overline{(M'D, M'C)} \equiv \pi + \overline{(MD, MC)} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \overline{(M'D, M'C)} \equiv \overline{(MD, MC)} + (1+2k)\pi$$

$$\Rightarrow \overline{(M'D, M'C)} \equiv \overline{(MD, MC)} [\pi]$$

$$\Rightarrow M \text{ و } M' \text{ و } C \text{ و } D \text{ نقط متداورة}$$

$$\text{إذن : } 3(2) - 5(1) = 1$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد 13 نحصل على :

$$3 \times 26 - 5 \times 13 = 13$$

إذن الزوج (13, 26) حل خاص للمعادلة (E).

ليكن (x, y) الحل العام للمعادلة (E). ونطلق من النمطة التالية :

$$\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ 3 \times 26 - 5 \times 13 = 13 \end{cases}$$

ننجز عملية الطرح بين هاتين المعادلتين فنحصل على :

$$3(x - 26) + 5(13 - y) = 0$$

$$\text{يعني : } (*) \quad 3(x - 26) = 5(y - 13)$$

إذن 3 يقسم الجداء $5(y - 13)$.

وبما أن $5 \wedge 3 = 1$ و 5 أوليان فيما بينهما).

فإنه حسب Gauss نستنتج أن 3 يقسم العدد $(y - 13)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\exists k' \in \mathbb{Z}) ; y - 13 = 3k' \\ \Rightarrow (\exists k' \in \mathbb{Z}) ; y = 3k' + 13 \end{aligned}$$

نُعوّض y بـ $(3k' + 13)$ في الكتابة (*) فنحصل على :

$$3(x - 26) = 5(3k')$$

$$\text{أي : } x = 5k' + 26$$

إذن كل حل من حلول المعادلة (E) يُكتب على شكل

$$(5k' + 26 ; 3k' + 13) \text{ حيث } k' \in \mathbb{Z}$$

عكسيا : نلاحظ أن جميع الأزواج $(5k' + 26 ; 3k' + 13)$ من \mathbb{Z}^2 هي حلول للمعادلة (E).

$$\text{لأن : } \forall k' \in \mathbb{Z} \quad 3(5k' + 26) - 5(3k' + 13) = 13$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S = \{ (5k' + 26 ; 3k' + 13) ; k' \in \mathbb{Z} \}$$

$$\text{ملاحظة : عندما نضع } k' = k - 5 \text{ نجد أن : } \begin{cases} x = 5k + 1 \\ y = 3k - 2 \end{cases}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) تأخذ شكلا آخر وهو الآتي :

$$S = \{ (5k + 1 ; 3k - 2) ; k \in \mathbb{Z} \}$$

التمرين الثالث

2

نفترض أن $\frac{x}{y}$ عدد نسبي. إذن يوجد m من \mathbb{Z} حيث $x = ym$

نُعوّض x بـ my في المعادلة (E) نجد : $3my - 5y = 13$

$$\text{يعني : } y(3m - 5) = 13$$

ومنهُ نستنتج أن y يقسم العدد 13.

ونعلم أن 13 عدد أولي.

إذن قواسمه هي الأعداد النسبية : $\{-13, -1, 1, 13\}$.

$$\text{إذن : } y \in \{-13, -1, 1, 13\}$$

$$\text{يعني أن : } y = 3k - 2 \in \{-13, -1, 1, 13\}$$

$$(3k - 2) = -13 \Rightarrow k = \frac{-11}{3} \notin \mathbb{Z}$$

$$(3k - 2) = -1 \Rightarrow k = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$$

$$(3k - 2) = 1 \Rightarrow k = 1 \in \mathbb{Z}$$

$$(3k - 2) = 13 \Rightarrow k = 5 \in \mathbb{Z}$$

ولدينا :

$$k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ولدينا :}$$

$$k = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 26 \\ y = 13 \end{cases} \text{ ولدينا :}$$

$$\text{إذن : } k \in \{1; 5\}$$

إذن حلول المعادلة (E) التي من أجلها يكون $\frac{x}{y}$ عددا صحيحا نسبيا هي :

$$\{(6; 1) \text{ et } (26; 13)\}$$

التمرين الثالث

3

للإجابة على هذا السؤال نستعمل مبدأ خوارزمية أقليدس التالي :

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline c & d \end{array} \Rightarrow a \wedge b = b \wedge c$$

ننجز القسمة الأقليدية للعدد $(5k + 1)$ على العدد $(3k - 2)$

$$\begin{array}{l|l} 5k + 1 & 3k - 2 \\ \hline 2k + 3 & 1 \end{array} \text{ : نحصل على :}$$

إذن حسب مبدأ خوارزمية أقليدس نستنتج أن :

$$(1) \quad (5k + 1) \wedge (3k - 2) = (3k - 2) \wedge (2k + 3)$$

$$\begin{array}{l|l} 3k - 2 & 2k + 3 \\ \hline k - 5 & 1 \end{array} \text{ : ولدينا :}$$

إذن حسب مبدأ خوارزمية أقليدس نستنتج أن :

$$(2) \quad (3k - 2) \wedge (2k + 3) = (2k + 3) \wedge (k - 5)$$

$$\begin{array}{l|l} 3k + 3 & k - 5 \\ \hline 13 & 2 \end{array} \text{ : ولدينا :}$$

إذن حسب مبدأ خوارزمية أقليدس نستنتج أن :

$$(3) \quad (2k + 3) \wedge (k - 5) = (k - 5) \wedge 13$$

من النتائج (1) و (2) و (3) نستنتج أن :

$$(5k + 1) \wedge (3k - 2) = (k - 5) \wedge 13$$

التمرين الثالث

4

نحل في \mathbb{Z}^2 النمطة التالية :

$$\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ x \wedge y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5k + 1 \\ y = 3k - 2 ; k \in \mathbb{Z} \\ (5k + 1) \wedge (3k - 2) = 13 \end{cases}$$

إذن حسب نتيجة السؤال (3) نستنتج أن :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5k + 1 \\ y = 3k - 2 ; k \in \mathbb{Z} \\ (k - 5) \wedge 13 = 13 \end{cases}$$

من الكتابة $(k - 5) \wedge 13 = 13$ نستنتج أن 13 يقسم العدد 13.

إذن يوجد n من \mathbb{Z} بحيث $(k - 5) = 13n$. يعني : $k = 13n + 5$

نُعوّض إذن k بـ $(13n + 5)$ في تعبير x و y فنحصل على :

$$\begin{cases} x = 5(13n + 5) + 1 = 65n + 26 \\ y = 3(13n + 5) - 2 = 39n + 13 \end{cases}$$

إذن حلول المعادلة (E) التي من أجلها $x \wedge y = 13$ هي الأعداد

الصحيحة النسبية التي نكتب بصفة عامة على الشكل التالي :

$$S = \{ (65n + 26 ; 39n + 13) ; n \in \mathbb{N} \}$$

التمرين الرابع

1

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{x} e^{-x}}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) (e^{-x}) = (+\infty)(1)$$

$$= +\infty \notin \mathbb{R}$$

إذن الدالة φ غير قابلة للاشتقاق على يمين الصفر.

$$\text{و نفسر هندسيا هذه النهاية : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \right) = +\infty$$

بقولنا : منحني الدالة φ يقبل نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة

$(0,0)$ موجه نحو الأعلى.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x} \right)}$$

$$= 0 \times 0 = 0$$

لندرس الآن تغيرات الدالة φ .
في البداية نلاحظ أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^+ لأنها عبارة عن جداء الدالتين اعتياديتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}^+ .

ولدينا من أجل كل عنصر x من \mathbb{R}_+^* .

$$\varphi'(x) = (\sqrt{x} e^{-x})' = (\sqrt{x})' e^{-x} + \sqrt{x} (e^{-x})'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} + \sqrt{x} (-e^{-x})$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 \right) e^{-x} = (1 - 2x) \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$$

نلاحظ أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} > 0$

إذن إشارة $\varphi'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1 - 2x)$.

- إذا كان : $x = \frac{1}{2}$ فإن : $\varphi'(x) = 0$
- إذا كان : $x > \frac{1}{2}$ فإن : $\varphi'(x) < 0$
- إذا كان : $x < \frac{1}{2}$ فإن : $\varphi'(x) > 0$

نتنتج إذن جدول تغيرات الدالة φ كما يلي :

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0
φ	0	$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$	0

لدينا : $\varphi(x) = x \iff \sqrt{x} \cdot e^{-x} = x ; x > 0$

$$\iff \ln(\sqrt{x} e^{-x}) = \ln x ; x > 0$$

$$\iff \ln(\sqrt{x}) + \ln(e^{-x}) = \ln x ; x > 0$$

$$\iff \frac{1}{2} \ln(x) - x = \ln x ; x > 0$$

$$\iff \ln(x) - 2x = 2 \ln x ; x > 0$$

$$\iff \ln(x) + 2x = 0 ; x > 0$$

$$\iff \psi(x) = 0 ; x > 0$$

لدينا ψ دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* لأنها مجموع دالتين اعتياديتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* . ولدينا من أجل كل x من \mathbb{R}_+^* :

$$\psi'(x) = \frac{1}{x} + 2 = \frac{1 + 2x}{x}$$

نلاحظ أن : $(\forall x > 0); \psi'(x) > 0$

إذن ψ دالة تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$.

إذن ψ تقابل من $]0, +\infty[$ نحو صورته $\psi(]0, +\infty[)$.

$$\psi(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} \psi(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) \right[$$

$$= \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x) + 2x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) + 2x) \right[$$

$$= \left] (-\infty) + 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} + 2 \right) \right[$$

$$= \left] -\infty ; (+\infty)(0 + 2) \right[= \mathbb{R}$$

إذن ψ تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو \mathbb{R} .

يعني أن : $\psi(x) = y ; (\exists! x \in]0, +\infty[); (\forall y \in \mathbb{R})$

يعني أن كل عنصر من \mathbb{R} يقبل سابقاً وحيداً بالتقابل ψ من $]0, +\infty[$.

بما أن $0 \in \mathbb{R}$ فإن 0 يمتلك سابقاً وحيداً α من المجال $]0, +\infty[$.

يعني : $\psi(\alpha) = 0 ; (\exists! \alpha > 0)$

يعني أن المعادلة $\psi(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في \mathbb{R}_+^* .

لنبين الآن أن : $\frac{2}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$.

لدينا : $\psi\left(\frac{2}{5}\right) = \psi(0,4) = \ln(0,4) + 2(0,4) \approx -0,11$

و لدينا كذلك : $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \psi(0,5) = \ln(0,5) + 2(0,5) \approx 0,30$

نلاحظ أن : $-0,11 < 0 < 0,30$.

يعني أن : $\psi\left(\frac{2}{5}\right) < \psi(\alpha) < \psi\left(\frac{1}{2}\right)$.

تدخل الدالة التزايدية قطعاً ψ^{-1} على هذه الأعداد المنتمية إلى \mathbb{R} نجد :

يعني بكل بساطة أن : $\psi^{-1}\left(\psi\left(\frac{2}{5}\right)\right) < \psi^{-1}(\psi(\alpha)) < \psi^{-1}\left(\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

و ذلك لأن التطبيق $\psi^{-1} \circ \psi = Id_{]0, +\infty[}$ معرف بما يلي :

$$\psi^{-1} \circ \psi :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$$

$$x \rightarrow x$$

خلاصة السؤال ب : المعادلة $\psi(x) = 0$ لها حل وحيد α محصور

قطعاً بين $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{5}$.

لدينا φ دالة متصلة وتزايدية قطعاً على $]0, \frac{1}{2}[$.

و لدينا : $I = \left] \frac{2}{5}; \frac{1}{2} \right[\subset]0; \frac{1}{2}[$

إذن صورة المجال $\left] \frac{2}{5}; \frac{1}{2} \right[$ بالدالة المتصلة φ هو المجال $\left] \varphi\left(\frac{2}{5}\right); \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \right[$.

إذن نكتب : $\varphi(I) = \varphi\left(\left] \frac{2}{5}; \frac{1}{2} \right[\right) = \left] \varphi\left(\frac{2}{5}\right); \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \right[$

$$= \left] \varphi(0,4); \varphi(0,5) \right[$$

$$\approx \left] 0,423 ; 0,428 \right[\subset]0,4 ; 0,5[$$

إذن : $\varphi(I) \subset I$

لنبين الآن أن : $(\forall x \in I); |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{8}$

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \varphi'(x) = \frac{(1-2x)e^{-x}}{2\sqrt{x}}$

في البداية نلاحظ أن : $x \in I \implies x < \frac{1}{2}$

$$\implies 2x < 1$$

$$\implies 1 - 2x > 0$$

$$\implies \frac{(1-2x)e^{-x}}{2\sqrt{x}} > 0 ; \text{car } \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} > 0$$

$$\implies \varphi'(x) > 0 \quad (1)$$

من جهة أخرى :

$$x > \frac{2}{5} \implies (1 - 2x) < \frac{1}{5} \quad \text{لدينا}$$

$$x > \frac{2}{5} \implies \frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{\frac{5}{4}} \quad \text{و لدينا}$$

$$x > \frac{2}{5} \implies e^{-x} < e^{-\frac{2}{5}} \quad \text{و لدينا}$$

الطريقة الأولى: سوف نستعمل البرهان بالترجع (إذا أمكن ذلك)
 نعتبر العبارة (Q_n) التالية: $|u_{n+1} - \alpha| < \left(\frac{1}{8}\right)^n |u_n - \alpha|$
 من أجل $n = 0$ نريد أن نبين أن $|u_1 - \alpha| < |u_0 - \alpha|$
 ومن أجل ذلك سوف نحتاج إلى الأشياء التالية:

$$\begin{cases} (\forall x \geq \alpha) ; \varphi(x) \leq x \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \end{cases}$$

هذه الطريقة سوف تؤدي بنا إلى متاهة كبيرة لذلك أقترح عليكم طريقة أخرى غير هذا التراجع.

الطريقة الثانية:

$$\text{لدينا: } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| < \frac{1}{8} |u_n - \alpha|$$

إذن نطبق هذه النتيجة من أجل $(n-1)$ نجد:

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| &< \frac{1}{8} |u_{n-1} - \alpha| \\ &< \left(\frac{1}{8}\right)^2 |u_{n-2} - \alpha| \\ &\vdots \\ &< \left(\frac{1}{8}\right)^n |u_{n-n} - \alpha| \end{aligned}$$

$$\text{إذن: } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| < \left(\frac{1}{8}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{8}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{8}$ وهو عدد موجب و أصغر من 1.

$$\text{إذن: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = 0 \text{ ومنه: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$$

و بذلك نحصل على الوضعية التالية:

$$0 < |u_n - \alpha| < \underbrace{\left(\frac{1}{8}\right)^n}_{\rightarrow 0} |u_0 - \alpha|$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$$

إضافة: لقد حددت القيمة العددية لـ α باستعمال الآلة الحاسبة فوجدت القيمة

$$\alpha = 0,4263027510068$$

و السؤال الذي يطرح نفسه هو: how did I do it.

الطريقة سهلة هي من ابتكاري أيام كنت تلميذا 2004.

لتحديد α الذي يحقق $\varphi(\alpha) = \alpha$ باستعمال الآلة الحاسبة.

ننطلق من قيمة بدئية مثلا نأخذ 0,45. لأنه يجب أن يكون $u_0 \in I$.

- نكتب في الآلة الحاسبة العدد 0,45 ثم نضغط على الزر \equiv .
- نسمح ما كتب على الشاشة باستعمال AC أو On .
- نكتب على الشاشة التعبير $(e^{(-Ans)}) \times (\sqrt{Ans})$.
- ثم نضغط تباعا على الزر \equiv مرات عديدة.
- وسوف نحصل على قيم متغيرة والتي تصبح ثابتة بعد 7 مرات.
- وتساوي $\alpha = 0,426302751$.

نضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف نجد:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{(1-2x)e^{-x}}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot e^{-\frac{2}{5}} \\ \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot e^{-\frac{2}{5}} &\approx 0,015 < \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \left(\forall x > \frac{2}{5}\right) ; \varphi'(x) < \frac{1}{8} \quad \text{إذن}$$

من (1) و (2) نستنتج أن: $0 < \varphi'(x) < \frac{1}{8} ; (\forall x \in I)$

و بالتالي: $(\forall x \in I) ; |\varphi'(x)| < \frac{1}{8}$

سوف نستعمل بإذن الله البرهان بالترجع.

نعتبر العبارة (P_n) التالية: $u_n \in I$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 \in I$

إذن العبارة (P_0) صحيحة.

ليكن n عنصرا من \mathbb{N} ونفترض أن (P_n) صحيحة.

$$\begin{aligned} (P_n) \text{ est vraie} &\Rightarrow u_n \in I \\ &\Rightarrow \varphi(u_n) \in \varphi(I) \subset I \\ &\Rightarrow \varphi(u_n) \in I \\ &\Rightarrow u_{n+1} \in I \\ &\Rightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie} \end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية الترجعية التالية:

$$\begin{cases} (P_0) \text{ est vraie} \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

إذن حسب مبدأ التراجع: $(P_n) \text{ est toujours vraie}$.

يعني: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in I$

لدينا φ دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال I .

إذن نستطيع تطبيق ميرهنه التزايدات المنتهية على أي مجال يوجد ضمن I

نختار المجال $[\alpha; u_n]$ أو $[u_n; \alpha]$ الذي يوجد ضمن I

لأن $\alpha \in I$ و $u_n \in I$.

لدينا φ متصلة على المجال $[\alpha; u_n]$.

و لدينا φ قابلة للاشتقاق على المجال $[\alpha; u_n]$.

إذن حسب ميرهنه التزايدات المنتهية نستنتج أن:

$$\exists c \in]\alpha; u_n[; \frac{\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)}{u_n - \alpha} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow \exists c \in]\alpha; u_n[; \left| \frac{\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)}{u_n - \alpha} \right| = |\varphi'(c)|$$

$$\text{نعلم أن: } (\forall x \in I) ; |\varphi'(x)| < \frac{1}{8}$$

$$\text{إذن: } |\varphi'(c)| < \frac{1}{8} \text{ لأن } c \in]\alpha; u_n[\subset I$$

نستنتج إذن أن:

$$\exists c \in]\alpha; u_n[; \left| \frac{\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)}{u_n - \alpha} \right| = |\varphi'(c)| < \frac{1}{8}$$

$$\text{إذن: } |\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)| < \frac{1}{8} |u_n - \alpha| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{يعني: } |u_{n+1} - \alpha| < \frac{1}{8} |u_n - \alpha| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

ولدينا : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\ln t - t + 1) = -\infty$

ولدينا : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln t - t + 1)$
 $= \lim_{t \rightarrow +\infty} t \left(\frac{\ln t}{t} - 1 + \frac{1}{t} \right)$
 $= (+\infty)(0 - 1 + 0)$
 $= -\infty$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة ψ كما يلي :

t	0	1	$+\infty$
$\psi'(t)$		0	-
ψ		0	$-\infty$

نلاحظ أن الدالة ψ تقبل مطرافا عند النقطة 1 .
 لأن $\psi'(x)$ تنعدم عند 1 وتتغير إشارتها بجوار 1 .
 وهذا المطراق عبارة عن قيمة قصوية للدالة ψ وهي 0 .
 إذن : $\forall t \in]0, +\infty[; \psi(t) \leq 0$
 يعني : $(\forall t > 0) ; \ln t - t + 1 \leq 0$
 أي : $(\forall t > 0) ; \ln t \leq (t - 1)$

التمرين الخامس

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x - \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}} \right)$
 $= \left(\frac{1}{1 - (-\infty)} \right) = 0 = f(0)$

إذن f دالة متصلة على يمين الصفر .

التمرين الخامس

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{x}{x - \ln x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}} \right) = \left(\frac{1}{0 - (-\infty)} \right)$
 $= 0 = f'_d(0)$

إذن f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر . و العدد المشتق هو $f'_d(0) = 0$
 ونفسر ذلك هندسيا بقولنا : منحني الدالة f يقبل نصف مماس أفقي في
 النقطة $(0,0)$ على اليمين .

التمرين الخامس

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x - \ln x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}} \right)$
 $= \left(\frac{1}{1 - 0^+} \right) = 1$

التمرين الخامس

من خلال تعبير الدالة f نلاحظ أنها دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^*
 لأنها عبارة عن خارج دالتين متصلتين وقابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* .
 ولدينا : $\forall x \in]0, +\infty[; (x - \ln x) \geq 1 > 0$

التمرين الرابع

ليكن n أصغر عدد صحيح طبيعي حيث $|u_n - \alpha| < 10^{-4}$
 لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| < \left(\frac{1}{8} \right)^n |u_0 - \alpha|$
 ونعلم أن $0,4 < \alpha < 0,5$ وأن $0,4 < u_0 < 0,5$
 إذن : $-0,1 < (u_0 - \alpha) < 0,1$
 يعني : $|u_0 - \alpha| < 10^{-1}$

ومنه : $\left(\frac{1}{8} \right)^n |u_0 - \alpha| < \left(\frac{1}{8} \right)^n \cdot 10^{-1}$
 إذن العدد n الذي نبحث عنه هو أكبر عدد صحيح طبيعي يُحقق :

$$|u_n - \alpha| < 10^{-4} < \left(\frac{1}{8} \right)^n \cdot 10^{-1}$$

و سوف نهتم فقط بالمتفاوتة $10^{-4} < \left(\frac{1}{8} \right)^n \cdot 10^{-1}$

التي تصبح : $10^{-3} < 8^{-n}$ يعني : $\ln(10^{-3}) < \ln(8^{-n})$
 أي : $-3 \ln 10 < -n \ln 8$

يعني : $n \ln 8 < 3 \ln 10$. أي : $n < \frac{3 \ln 10}{\ln 8} \approx 3,32$
 أي : $n < 3,32$

و أكبر عدد صحيح طبيعي يحقق هذه المتفاوتة هو $n = 3$
 وبالتالي 3 هو أصغر عدد صحيح طبيعي يُحقق : $|u_3 - \alpha| < 10^{-4}$

و بالفعل بالاستعانة بالآلة الحاسبة سوف نجد :

$$\begin{cases} |u_3 - \alpha| < 10^{-4} \\ |u_4 - \alpha| < 10^{-4} \\ |u_5 - \alpha| < 10^{-4} \\ \vdots \\ \vdots \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} |u_0 - \alpha| > 10^{-4} \\ |u_1 - \alpha| > 10^{-4} \\ |u_2 - \alpha| > 10^{-4} \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

للتعمق أضيف ما يلي :

نضع $u_0 = 0,45$ إذن باستعمال الآلة الحاسبة نحصل على :

$$\begin{cases} u_1 = 0,4277733967 \\ u_2 = 0,426407041 \\ u_3 = 0,42631043 \\ u_4 = 0,426303316 \\ u_5 = 0,426302792 \\ u_6 = 0,426302754 \\ u_7 = 0,426302751 \\ u_8 = 0,426302751 \\ u_9 = 0,426302751 \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

التمرين الخامس

لنبين أن : $(\forall t > 0) ; \ln t \leq t - 1$

و من أجل ذلك نعتبر الدالة العددية ψ المعرفة على \mathbb{R}_+^* بما يلي :

$$\psi(t) = \ln t - t + 1$$

من خلال تعبير الدالة العددية ψ نلاحظ أنها متصلة وقابلة للاشتقاق على

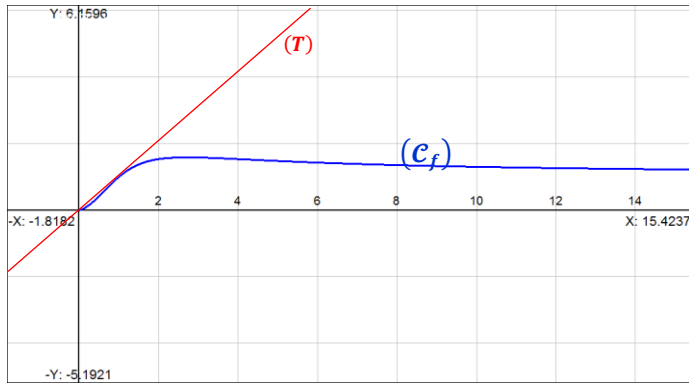
\mathbb{R}_+^* لأنها عبارة عن مجموع دالتين متصلتين وقابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}_+^*

ولدينا : $(\forall t > 0) ; \psi'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$

إذا كان $t = 1$ فإن $\psi'(t) = 0$

إذا كان $t > 1$ فإن $\psi'(t) < 0$

إذا كان $t < 1$ فإن $\psi'(t) > 0$



التمرين الخامس

5 I

في البداية لدينا حسب نتيجة السؤال (1) :

$$(\forall x > 0) ; \ln x \leq x - 1 < x$$

$$(\forall x \geq 1) ; 0 < \ln x < x$$

$$\text{يعني : } (\forall x \geq 1) ; 0 < \frac{\ln x}{x} < 1$$

من خلال تعبير المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ نلاحظ أنها عبارة عن مجموع حدود متتابعة من المتتالية الهندسية $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^n$.

$$v_n = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^0 + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^1 + \dots + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\ln x}{x}\right)}$$

من جهة أخرى نلاحظ أن $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}$ متتالية هندسية أساسها $\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ و هو عدد موجب وأصغر من 1 حسب (*).

$$(\forall x \geq 1) ; \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\ln x}{x}} \right) = \frac{1 - 0}{1 - \frac{\ln x}{x}} = \frac{x}{x - \ln x} = f(x)$$

$$(\forall x \geq 1) ; \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = f(x) \text{ وبالتالي}$$

$v_n(x)$ est une suite de fonctions qui converge simplement vers la fonction limite f

التمرين الخامس

1 II

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و a عنصر من I . فإن الدالة :

$$F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \int_1^x f(t) dt$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال $]0, +\infty[$ و التي تتعدم في 1

$$\begin{cases} F'(x) = f(x) ; \forall x > 0 \\ F(1) = 0 \end{cases}$$

يعني أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ و مشتقتها على هذا المجال هي الدالة f .

رأينا من خلال دراسة الدالة f أنها موجبة دائما على المجال $]0, +\infty[$. إذن دالة F تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$.

يعني أن المقام يُخالف دائما الصفر على المجال $]0, +\infty[$.

$$\text{ولدينا : } f'(x) = \frac{x}{(x - \ln x)^2}$$

$$= \frac{(x - \ln x) - x(x - \ln x)'}{(x - \ln x)^2}$$

$$= \frac{(x - \ln x) - x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2}$$

$$= \frac{x - \ln x - x + 1}{(x - \ln x)^2}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$$

إذا كان $x = e$ فإن $f'(x) = 0$.

إذا كان $x < e$ فإن $f'(x) > 0$.

إذا كان $x > e$ فإن $f'(x) < 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
f	0	$\frac{e}{e-1}$	1
$f(x)$		+	

التمرين الخامس

4 I

معادلة (T) المماس لـ (C_f) عند النقطة التي أفصولها 1 تُكتب على شكل :

$$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

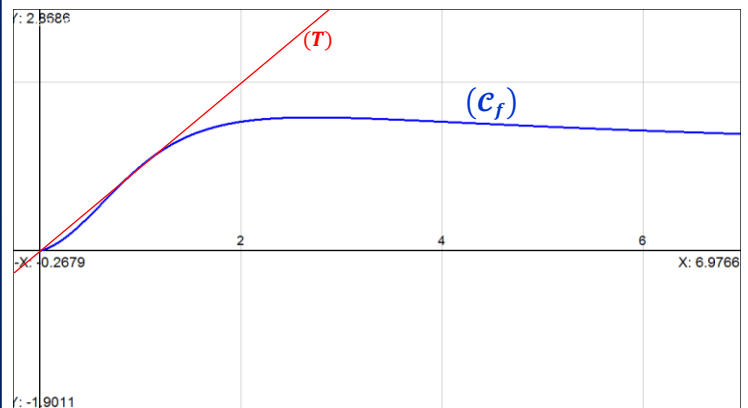
$$\text{ولدينا : } f(1) = \frac{1}{1 - \ln 1} = 1$$

$$\text{ولدينا : } f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{(1 - \ln 1)^2} = 1$$

$$\text{إذن : } (T) : y = 1(x - 1) + 1 \text{ . يعني : } (T) : y = x$$

التمرين الخامس

4 I



لدينا F تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$ و تتعدم في 1 . إذن :

$$x \geq 1 \Rightarrow F(x) \geq F(1) ; \text{car } F \text{ est } \nearrow$$

$$\Rightarrow F(x) \geq 0 ; \text{car } F(1) = 0$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow F(x) \leq F(1) ; \text{car } F \text{ est } \nearrow$$

$$\Rightarrow F(x) \leq 0 ; \text{car } F(1) = 0$$

إذن F دالة موجبة على المجال $]1, +\infty[$ و

F دالة سالبة على المجال $]0; 1]$.

لدينا حسب متفاوتة السؤال (1) من الجزء الأول :

$$(\forall x > 0) ; \ln x \leq x - 1$$

$$\forall x \in]0; 1] ; x - \ln x \geq 1$$

$$\text{يعني : } \forall x \in]0; 1] ; \frac{1}{x - \ln x} \leq 1$$

$$(1) \forall x \in]0; 1] ; \frac{x}{x - \ln x} \leq x$$

من جهة أخرى لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f : f دالة موجبة على

المجال $]0, +\infty[$. يعني : $(\forall x > 0) ; f(x) > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

فإنه نستطيع أن نكتب : $(\forall x > 0) ; f(x) \geq 0$.

ومنه : $\forall x \in]0; 1] ; f(x) \geq 0$.

$$(2) \forall x \in]0; 1] ; \frac{x}{x - \ln x} \geq 0$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\forall x \in]0; 1] ; 0 \leq \frac{x}{x - \ln x} \leq x$$

يعني : $(\forall t \in]0; 1]) ; 0 \leq f(t) \leq t$.

ليكن x و t عنصراً من المجال $]0; 1]$ و ننتقل من التأطير التالي :

$$t \in]0; 1] \Rightarrow 0 \leq f(t) \leq t$$

$$\Rightarrow \int_x^1 0 dt \leq \int_x^1 f(t) dt \leq \int_x^1 t dt$$

car ces fonctions sont continues et $x < 1$

$$\Rightarrow 0 \leq - \int_1^x f(t) dt \leq \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^1$$

$$\Rightarrow 0 \leq -F(x) \leq \frac{1 - x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 1}{2} \leq F(x) \leq 0$$

و من هذا التأطير ننتقل مباشرة إلى نهايات جميع الأطراف .

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 - 1}{2} \right) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \leq 0$$

لدينا من أجل $x \in [1; e]$ لدينا f دالة تزايدية على هذا المجال $[1; e]$.

إذن : $x \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(1) ; \text{car } f \text{ est } \nearrow$

$$\Rightarrow f(x) \geq 1 ; \text{car } f(1) = 1$$

و من أجل $x \in [e, +\infty[$ نلاحظ أن f تقابل من هذا المجال $[e, +\infty[$

نحو صورته $\left[1; \frac{e-1}{e}\right]$ لأنها متصلة و تناقصية قطعاً على $[e, +\infty[$.

و بالتالي : $\forall x \in [e, +\infty[; f(x) \in \left[1; \frac{e-1}{e}\right]$.

يعني : $(\forall x \geq e) ; f(x) \geq 1$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall x \geq 1) ; f(x) \geq 1$ (*)

الآن ليكن t عنصراً من المجال $[x, +\infty[$ و $x > 1$.

إذن حسب (*) نستنتج أن $f(t) \geq 1$.

$$\Rightarrow \int_1^x f(t) dt \geq \int_1^x 1 dt$$

$$\Rightarrow F(x) \geq [t]_1^x$$

$$\Rightarrow F(x) \geq x - 1$$

$$\Rightarrow F(x) \geq \frac{x-1}{x \rightarrow +\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

$$\int_1^x (1 + \ln t) dt = \int_1^x 1 dt + \int_1^x \frac{1}{u(t)} \cdot \frac{\ln t}{v(t)} dt$$

$$= [t]_1^x + [t \ln t]_1^x - \int_1^x \left(t \cdot \frac{1}{t} \right) dt$$

$$= [t]_1^x + [t \ln t]_1^x - [t]_1^x$$

$$= [t \ln t]_1^x$$

$$= x \ln x - 1 \ln 1$$

$$= x \ln x$$

$$\int_1^x \left(1 + \frac{\ln t}{t} \right) dt = \int_1^x 1 dt + \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt$$

$$= [t]_1^x + \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt$$

$$= x - 1 + \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt$$

$$\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt = \int_1^x \left(\frac{1}{u(t)} \right) \cdot \frac{\ln t}{v(t)} dt$$

$$= [(\ln t)^2]_1^x - \int_1^x (\ln t) \cdot \left(\frac{1}{t} \right) dt$$

$$= (\ln x)^2 - \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt$$

$$\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt = (\ln x)^2 - \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt$$

$$2 \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt = (\ln x)^2$$

$$\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t} \right) dt = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

و بالتالي : بالرجوع إلى التكامل الأول نكتب :

$$\int_1^x \left(1 + \frac{\ln t}{t} \right) dt = (x - 1) + \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$\int_1^e f(t) dt = \int_1^e \left(\frac{t}{t - \ln t} \right) dt : \text{التكامل}$$

يقيس مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفصائل و المستقيمين ذوا المعادلتين $x = e$ و $x = 1$. و يقيس هذه المساحة بالوحدة $\|i\| \times \|j\| \text{ cm}^2$.

إضافة: إذا رمزنا لهذه المساحة بـ \mathcal{A} . فإن:

$$\mathcal{A} = \int_1^e f(t) dt = F(e)$$

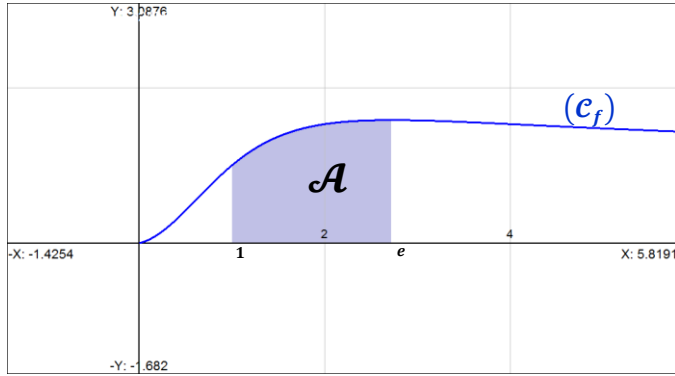
و يمكن إعطاء تأطير لهذه المساحة و ذلك باستعمال النتائج السابقة.

$$\text{لدينا : } (\forall x \geq 1) ; (x - 1) + \frac{(\ln x)^2}{2} \leq F(x) \leq x \ln x$$

$$\text{بما أن } e > 1 \text{ فإن : } (e - 1) + \frac{(\ln e)^2}{2} \leq F(e) \leq e \ln e$$

$$\text{يعني : } 2,22 \leq \mathcal{A} \leq 2,72 \text{ يعني } \left(e - \frac{1}{2} \right) \leq \mathcal{A} \leq e$$

و بالفعل عندما نحسب المساحة \mathcal{A} باستعمال الحاسوب نجد أن $\mathcal{A} = 2,46 \text{ cm}^2$ مع افتراض أن $\|i\| = \|j\| = 1 \text{ cm}$.



ليكن t عددا حقيقيا بحيث $t \geq 1$. من جهة أولى لدينا:

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{t - \ln t} \right) - (1 + \ln t) &= \frac{t - (1 + \ln t)(t - \ln t)}{t - \ln t} \\ &= \frac{t - (t - \ln t + t \ln t - (\ln t)^2)}{t - \ln t} \\ &= \frac{\ln t - t \ln t + (\ln t)^2}{t - \ln t} \\ &= \frac{(\ln t)(1 - t + \ln t)}{t - \ln t} \end{aligned}$$

من جهة ثانية لدينا حسب نتيجة السؤال (1) من الجزء الأول:

$$(\forall t > 0) ; \ln t \leq t - 1 < t$$

$$\text{إذن : } \begin{cases} 1 - t + \ln t \leq 0 \\ t - \ln t > 0 \\ \ln t > \ln 1 = 0 \end{cases} ; (\forall t \geq 1)$$

$$\text{ومنه : } (\forall t \geq 1) ; \frac{(\ln t)(1 - t + \ln t)}{t - \ln t} \leq 0$$

$$\text{يعني : } (\forall t \geq 1) ; \left(\frac{t}{t - \ln t} \right) - (1 + \ln t) \leq 0$$

$$\text{يعني : } (\forall t \geq 1) ; \left(\frac{t}{t - \ln t} \right) \leq (1 + \ln t)$$

$$\text{يعني : } (\forall t \geq 1) ; f(t) \leq 1 + \ln t$$

ليكن x و t عنصرين من المجال $[1, +\infty[$.

$$t \geq 1 \Rightarrow f(t) \leq 1 + \ln t \text{ لدينا:}$$

$$\Rightarrow \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^x (1 + \ln t) dt$$

car ces deux fonctions sont continues et $1 < x$

$$\Rightarrow F(x) \leq x \ln x ; \text{ d'après 5) أ)}$$

$$t \geq 1 \Rightarrow \left(\frac{\ln t}{t} \right)^2 \geq 0 \Rightarrow - \left(\frac{\ln t}{t} \right)^2 \leq 0 \text{ لدينا:}$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{\ln t}{t} \right)^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{\ln t}{t} \right) \left(1 + \frac{\ln t}{t} \right) \leq 1$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{\ln t}{t} \right) \leq \left(\frac{1}{1 - \frac{\ln t}{t}} \right) ; \left(1 - \frac{\ln t}{t} \right) > 0$$

il est très facile de montrer que $1 - \frac{\ln t}{t} > 0$ en partant du fait que $\ln t < t$

$$\Rightarrow 1 + \frac{\ln t}{t} \leq \frac{t}{t - \ln t}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{\ln t}{t} \leq f(t)$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(1 + \frac{\ln t}{t} \right) dt \leq \int_1^x f(t) dt$$

car ces fonctions sont continues et $1 < x$

$$\Rightarrow (x - 1) + \frac{(\ln x)^2}{2} \leq F(x) ; \text{ d'après 5) أ)}$$

لدينا : $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

ونعلم أن $z_1 z_2 = a = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

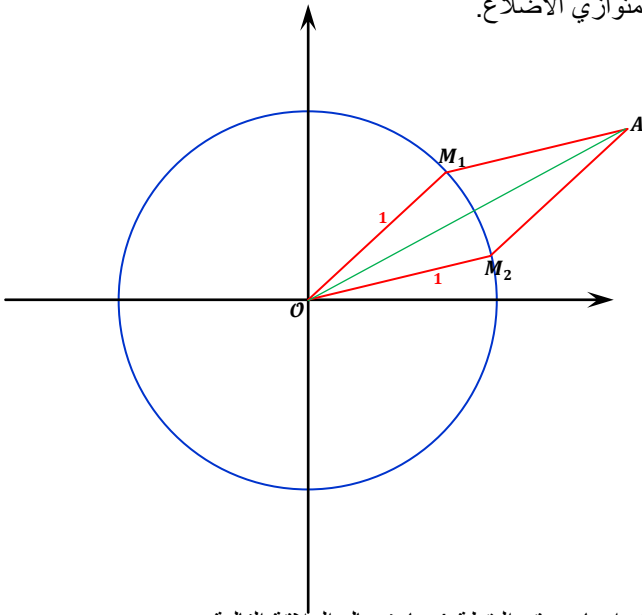
إذن : $e^{i\frac{\pi}{4}} \times z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$

ومنه : $z_2 = e^{i\frac{\pi}{12}}$ أي : $e^{-i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{4}} \times z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{4}}$

إذن : $f(z_1) = f\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{12}} = z_2$

نحصل إذن على : $f(z_1) = z_2$ أي : $F(M_1) = M_2$

يُستحب في البداية رسم شكل توضيحي في ورقة مستقلة و ذلك من أجل معرفة طبيعة الشكل أولاً، هل هو مربع أو مستطيل أو معين أو شبه منحرف أو متوازي الأضلاع.



لقد تم إيجاد موقع النقطة A باستعمال العلاقة التالية :

$$a = z_1 + z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{12}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) e^{i\frac{\pi}{6}} \approx 1,93 e^{i\frac{\pi}{6}}$$

لنبين إذن أن الرباعي OM_1AM_2 معين .

و من أجل ذلك يكفي أن نبين أن جميع أضلاعه متقايسة .

لدينا : $F(M_1) = M_2$ حيث $F_0\left(\frac{-\pi}{6}\right)$ دوران .

إذن : $(z_2 - 0) = e^{-i\frac{\pi}{6}}(z_1 - 0)$ ومنه : $\left(\frac{z_2-0}{z_1-0}\right) = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$$\Rightarrow \left|\frac{z_2-0}{z_1-0}\right| = \left|e^{-i\frac{\pi}{6}}\right| = 1$$

$$\Rightarrow |z_2 - 0| = |z_1 - 0|$$

$$\Rightarrow |z_{M_2} - z_0| = |z_{M_1} - z_0|$$

$$\Rightarrow OM_2 = OM_1 \quad (1)$$

من جهة أخرى لدينا : $z_1 + z_2 = a$ إذن : $(z_1 - a) = (0 - z_2)$

$$(z_{M_1} - z_A) = (z_0 - z_{M_2})$$

$$|z_{M_1} - z_A| = |z_0 - z_{M_2}|$$

$$\text{يعني : } AM_1 = OM_2 \quad (2)$$

تذكير : إذا كان z_1 و z_2 هما حلا المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ فإن :

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a} \text{ و } z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$$

نعتبر المعادلة التالية : $(E) : z^2 - az + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

و ليكن z_1 و z_2 حليها في \mathbb{C} .

إذن : $z_1 \times z_2 = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z_1 z_2| = 1 \\ \arg(z_1 z_2) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z_1| \times |z_2| = 1 \\ \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

لدينا : $\begin{cases} |z_1| \times |z_2| = 1 \\ \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$

إذن من أجل $z_1 = e^{i\theta}$ لدينا $|z_1| = 1$ و $\arg(z_1) \equiv \theta [2\pi]$

ومنه : $\begin{cases} |z_2| = 1 \\ \arg(z_2) \equiv \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) [2\pi] \end{cases}$

وبالتالي : $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} = \left[1; \frac{\pi}{3} - \theta\right]$

سوف نستعمل أثناء الحساب القاعدة التالية :

$$e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

لدينا : $a = z_1 + z_2 = e^{i\theta} + e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}$

$$= 2 \cos\left(\frac{\theta - \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta + \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}{2}\right)}$$

$$= 2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) e^{i\frac{\pi}{6}}$$

لتكن نقطة من المستوى العقدي و $M'(z')$ صورتها بالتحويل F إذن :

$$F(M) = M' \Leftrightarrow f(z) = z'$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}\right) z = z'$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) z$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right) z$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) z$$

$$\Leftrightarrow (z' - 0) = e^{-i\frac{\pi}{6}}(z - 0)$$

إذن F عبارة عن دوران مركزه O وزاويته $\frac{-\pi}{6}$ (أو $\frac{11\pi}{6}$)

حل المعادلة (E) سوف يركز على مبرهنة (Gauss) التالية:

$$\begin{cases} a/bc \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow a/c$$

في البداية يجب علينا تحديد حل خاص للمعادلة (E). ليس بطريقة عشوائية وإنما باستعمال القسامات المتتالية لـ (Euclide) من الأسفل إلى الأعلى.

$$\begin{array}{r|l} 2008 & 120 \\ 88 & 16 \end{array} \Rightarrow 88 = 2008 - 120 \times 16 \quad (1)$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 88 \\ 32 & 1 \end{array} \Rightarrow 32 = 120 - 88 \quad (2)$$

$$\begin{array}{r|l} 88 & 32 \\ 24 & 2 \end{array} \Rightarrow 24 = 88 - 32 \times 2 \quad (3)$$

$$\begin{array}{r|l} 32 & 24 \\ 8 & 1 \end{array} \Rightarrow 8 = 32 - 24 \quad (4)$$

ننتقل إذن من المتساوية (4) ثم نستعمل بعدها (3) ثم (2) ثم (1).

$$\begin{aligned} 8 &= 32 - 24 ; \text{ d'après (4)} \\ &= 32 - (88 - 32 \times 2) ; \text{ d'après (3)} \\ &= 32 \times 3 - 88 ; \text{ Simplification} \\ &= 3 \times (120 - 88) - 88 ; \text{ d'après (2)} \\ &= 3 \times 120 - 4 \times 88 ; \text{ Simplification} \\ &= 3 \times 120 - 4 \times (2008 - 120 \times 16) ; \text{ d'après (1)} \\ &= 67 \times 120 - 4 \times 2008 ; \text{ Simplification} \end{aligned}$$

$$2008(-4) + 120(67) = 8 ;$$

و هذا يعني أن الزوج (-4; 67) حل خاص للمعادلة (E).

ليكن (x, y) الحل العام للمعادلة (E). و ننتقل من النظمة التالية:

$$\begin{cases} (x, y) \text{ est solution de (E)} \\ (-4, 67) \text{ est solution de (E)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2008x + 120y = 8 \\ 2008(-4) + 120(67) = 8 \end{cases} \text{ و التي تصبح :}$$

$$2008(x + 4) + 120(y - 67) = 0$$

$$\text{أي : } 2008(x + 4) = -120(y - 67)$$

$$\text{أي : } 8 \times 251 \times (x + 4) = -15 \times 8 \times (y - 67)$$

$$\text{أي : } (*) \quad 251(x + 4) = -15(y - 67)$$

إذن 15 يقسم الجداء $251(x + 4)$.

و نعلم أن 251 عدد أولي. إذن لا يقسم العدد 251.

$$\text{و منه : } 15 \wedge 251 = 1$$

نستنتج إذن حسب Gauss أن 15 يقسم العامل $(x + 4)$.

$$\text{و بذلك يوجد } k \text{ من } \mathbb{Z} \text{ حيث : } x + 4 = 15k$$

$$\text{أي : } x = 15k - 4$$

نعوض x بـ $(15k - 4)$ في الكتابة (*): نجد:

$$-251(15k) = -15(y - 67)$$

$$\text{يعني : } 251k = -(y - 67) \text{ أي : } y = -251k + 67$$

نستنتج إذن أنه إذا كان الزوج (x, y) حلاً للمعادلة (E) فهو يتخذ الشكل

$$(15k - 4 ; -251k + 67) \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

لنبين الآن أن جميع الأزواج $(15k - 4 ; -251k + 67)$ من \mathbb{Z}^2 هي حلول المعادلة (E).

$$\text{لدينا : } 2008(15k - 4) + 120(-251k + 67)$$

$$= 30120k - 8032 - 30120k + 8040$$

$$= 8040 - 8032$$

$$= 8$$

و بنفس الطريقة لدينا : $z_1 + z_2 = a$: إذن $z_2 - a = 0 - z_1$

$$\text{أي : } (z_{M_2} - z_A) = (z_O - z_{M_1})$$

$$\text{أي : } |z_{M_2} - z_A| = |z_O - z_{M_1}|$$

$$\text{و منه : } (3) \quad AM_2 = M_1O$$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $OM_1 = M_1A = AM_2 = M_2O$

يعني أن أضلاع الرباعي OM_1AM_2 متقايسة. إذن فهو معين.

العدد 251 قاسم للعدد 2008 لأن : $2008 = 8 \times 251$.

العدد 251 عدد أولي لأن جميع الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من

أو تساوي 251 لا تقسم 251. و تلك الأعداد هي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11

و 13. و لا أحد من هذه الأعداد يقسم العدد 251. إذن عدد أولي.

تذكير : تكون المعادلة $ax + by = c$ قابلة للحل في \mathbb{Z}^2 إذا و فقط إذا

كان العدد c يقسم $(a \wedge b)$ حيث a و b عددان نسبيين غير منعدمان

و $a \wedge b$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

إذن لمعرفة هل المعادلة (E) قابلة للحل في \mathbb{Z}^2 يجب أولاً تحديد $2008 \wedge$

و من أجل ذلك أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى : خوارزمية أقليدس :

$$\begin{array}{r|l} 2008 & 120 \\ 88 & 16 \end{array} \Rightarrow 2008 \wedge 120 = 120 \wedge 88$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 88 \\ 32 & 1 \end{array} \Rightarrow 120 \wedge 88 = 88 \wedge 32$$

$$\begin{array}{r|l} 88 & 32 \\ 24 & 2 \end{array} \Rightarrow 88 \wedge 32 = 32 \wedge 24$$

$$\begin{array}{r|l} 32 & 24 \\ 8 & 1 \end{array} \Rightarrow 32 \wedge 24 = 24 \wedge 8$$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 8 \\ 0 & 3 \end{array} \Rightarrow 24 \wedge 8 = 8 \wedge 0 = 8 \quad \text{Stop}$$

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 2008 و 120 هو آخر باقي غير منعدم

في القسامات المتتالية لخوارزمية أقليدس. أي : $2008 \wedge 120 = 8$

الطريقة الثانية : استعمال التفكير إلى جداء عوامل أولية.

$\begin{array}{r l} 2008 & 2 \\ 1004 & 2 \\ 502 & 2 \\ 251 & 251 \end{array}$ <p style="text-align: center;">Stop 1</p> \Downarrow $2008 = 2^3 \times 251$	$\begin{array}{r l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \end{array}$ <p style="text-align: center;">Stop 1</p> \Downarrow $120 = 2^3 \times 3 \times 5$
--	--

$$\text{نلاحظ أن : } (2^3 \times 251) \wedge (2^3 \times 3 \times 5) = 2^3$$

$$\text{يعني : } 2008 \wedge 120 = 8$$

خلاصة : في كلتا الطريقتين نحصل على $2008 \wedge 120 = 8$.

و بما أن 8 يقسم 8 فإن المعادلة $2008x + 120y = 8$ (E) قابلة

للحل في \mathbb{Z}^2 . أي أنها تقبل حلولاً في \mathbb{Z}^2 .

التمرين الثاني

3 ج

سوف نستعمل في هذا السؤال مبرهنة Fermat التالية :
مبرهنة Fermat : إذا كان a و p عدداً صحيحان طبيعيين
حيث $p \in \mathbb{P}^+$ و $a \wedge p = 1$ فإن : $a^{p-1} \equiv 1 [p]$.
لدينا حسب ما سبق : 251 عدد أولي .
و نلاحظ أن : $10 \wedge 251 = 1$.
إذن حسب Fermat نكتب : $10^{251-1} \equiv 1 [251]$.
يوجد إذن k من \mathbb{N} و هو العدد 250 حيث $10^k \equiv 1 [251]$.

التمرين الثاني

3 د

لدينا : $10^{250} \equiv 1 [251]$.
إذن حسب تكافؤ السؤال (3 ب) نستنتج أن : $u_{250} \equiv 0 [2008]$.
يعني أن 2008 قاسم للعدد u_{250} .
أي أن العدد u_{250} مضاعف للعدد 2008 .
أي أن العدد $\frac{888 \dots 8}{250 \text{ fois}}$ مضاعف للعدد 2008 .
إذن 2008 يقبل مضاعفاً يُكتب في نظمة العد العشري بواسطة 250
مرة الرقم 8 فقط .

التمرين الثالث

1

يكفي أن نبين أن $(E, +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(M_2(\mathbb{R}), +)$.
لدينا E جزء من $M_2(\mathbb{R})$ لأنها تضم مصفوفات مربعة ذات معاملات
حقيقية . و هي مجموعة غير فارغة لأنه نستطيع تحديد على الأقل عنصراً
من E بتفصيل (و ليس بإدراك) .

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 \times 0 & 1 + 2 \times 0 \end{pmatrix} = M(1,0) \in E$$

لنبين أن : $\forall M(a,b), M(c,d) \in E ; (M(a,b) - M(c,d)) \in E$.
لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E .

$$\begin{aligned} M(a,b) - M(c,d) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a + 2b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ -2d & c + 2d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a-c) & (b-d) \\ -2(b-d) & (a-c) + 2(b-d) \end{pmatrix} \\ &= M(a-c ; b-d) \in E \end{aligned}$$

لأن $(a-c)$ و $(b-d)$ عدداً حقيقيين .
و بالتالي $(E, +)$ زمرة جزئية من الزمرة الأم $(M_2(\mathbb{R}), +)$.
و بما أن $(M_2(\mathbb{R}), +)$ تبادلية فإن $(E, +)$ تبادلية كذلك .
ملاحظة 1 : هذه الطريقة تعتبر الطريق المختصر للجواب .
أما الطريق الغير المختصر (الطريق المباشر و الاعتيادي)
هو أن نبين الأشياء التالية :

- E مجموعة غير فارغة .
- + قانون تركيب داخلي في E .
- + تبادلي و تجميعي في E .
- + يقبل عنصراً محايداً في E .
- كل عنصر x يقبل مماثلاً x' + في E .

ملاحظة 2 : تمكنا من أن نبين أن $(E, +)$ زمرة جزئية من $(M_2(\mathbb{R}), +)$.
إذن يُمكن أن نعتبر أن $(M_2(\mathbb{R}), +)$ هي الزمرة الأم و أن $(E, +)$
هي الزمرة الإبن(ة) . إذن الزمرة $(E, +)$ سوف تراثُ مميزات الزمرة الأم
من تبادلية و تجميعية و عنصر محايد و تماثل العناصر .

إذن جميع الأزواج $(15k - 4 ; -251k + 67)$ من \mathbb{Z}^2 حيث $k \in \mathbb{Z}$
هي حلول المعادلة (E) .

إذا كانت S هي مجموعة حلول (E) فهي معرفة بإدراك بما يلي :
 $S = \{ (15k - 4 ; -251k + 67) ; k \in \mathbb{Z} \}$

التمرين الثاني

3 أ

سوف نستعمل في الجواب الخاصية التالية :

$$\forall q \neq 1 \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

و هي مجموع $(n+1)$ حد متتابع من المتتالية الهندسية $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
ليكن n عنصراً من \mathbb{N}^* . إذن $(n-1)$ عنصر من \mathbb{N} .

$$\begin{aligned} u_n &= 888 \dots 88 \quad ; \quad n \text{ fois} \\ &= 8 \times (1 + 10 + \dots + 10^{n-1}) \\ &= 8 \left(\frac{10^n - 1}{10 - 1} \right) = \frac{8}{9} (10^n - 1) \end{aligned}$$

$$\text{إذن : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{8}{9} (10^n - 1)$$

التمرين الثاني

3 ب

ليكن n عنصراً من \mathbb{N}^* .
و ننتقل من الافتراض $10^n \equiv 1 [251]$.

إذن العدد 251 يقسم العدد $(10^n - 1)$.
و منه فإن العدد 251 يقسم العدد $8(10^n - 1)$.

يعني أن 251 يقسم $9u_n$.
لأنه حسب السؤال أ) : $9u_n = 8(10^n - 1)$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

إذن 251 يقسم u_n (1) . و ذلك حسب مبرهنة Gauss حيث
 $251 \wedge 9 = 1$ لأن $251 \wedge 9 = 1$.

$$\begin{aligned} u_n &= 888 \dots 88 \quad ; \quad n \text{ fois} \\ &= 8 \underbrace{(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1})}_{= k \in \mathbb{N}} \\ &= 8k ; \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

إذن العدد 8 يقسم العدد u_n (2) .

$$\begin{cases} 251/u_n \\ 8/u_n \\ 8 \wedge 251 = 1 \end{cases} \quad \text{نجمع النتائج (1) و (2) و (3) في النظمة التالية :}$$

إذن نستنتج أن الجداء 251×8 قاسم للعدد u_n .
يعني أن 2008 قاسم لـ u_n . أي : $u_n \equiv 0 [2008]$.

و بذلك نحصل من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ على الاستلزام التالي :

$$\boxed{10^n \equiv 1 [251] \Rightarrow u_n \equiv 0 [2008]}$$

لنبين الآن الاستلزام العكسي .

ليكن n عنصراً من \mathbb{N}^* حيث $u_n \equiv 0 [2008]$.
إذن 2008 يقسم العدد u_n .

إذن يوجد k من \mathbb{Z} بحيث $u_n = 2008k$.
من جهة ثانية لدينا : $9u_n = 8(10^n - 1)$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

$$\text{نعوض في هذه الكتابة العدد } u_n \text{ بالعدد } 2008k \text{ نجد :}$$

$$9(2008k) = 8(10^n - 1)$$

نقسم الطرفين على العدد 8 نحصل على : $9(251k) = 10^n - 1$.
إذن 251 قاسم للعدد $10^n - 1$.

أي : $10^n \equiv 1 [251]$. أي : $10^n \equiv 1 [251]$.

و بذلك نحصل من أجل كل n من \mathbb{N}^* على الإستلزام التالي :

$$\boxed{u_n \equiv 0 [2008] \Rightarrow 10^n \equiv 1 [251]}$$

الخلاصة :

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \equiv 0 [2008] \Leftrightarrow 10^n \equiv 1 [251]}$$

نبين أن $\forall M(a, b), M(c, d) \in E ; M(a, b) \times M(c, d) \in E$;
 لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصفوفتين من E .

$$\begin{aligned} M(a, b) \times M(c, d) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d \\ -2d & c+2d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac - 2bd & ad + b(c + 2d) \\ -2bc - 2d(a + 2b) & -2bd + (a + 2b)(c + 2d) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac - 2bd & ad + bc + 2bd \\ -2(ad + bc + 2bd) & (ac - 2bd) + 2(ad + bc + 2bd) \end{pmatrix} \\ &= M(ac - 2bd ; ad + bc + 2bd) \in E \end{aligned}$$

لأن $(ac - 2bd)$ و $(ad + bc + 2bd)$ عدنان حقيقيان .
 وبالتالي نستنتج أن E مستقرة بالنسبة للقانون \times .
 أي (E, \times) جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

نبين أن $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية و **واحدية** :

- زمرة $(E, +)$
- تجميعي في E
- توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E
- \times يقبل عنصرا محايدا في E
- \times تبادلي في E

لقد حصلنا لحد الآن على ما يلي : زمرة $(E, +)$
 بما أن (E, \times) جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
 فإن \times قانون تركيب داخلي في E .

و تصبح بذلك E مزودة بقانوني تركيب داخليين $+$ و \times .
 نعلم أن الضرب \times تبادلي و تجميعي في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

إذن من خلال الإستقرار نستنتج أن الضرب \times تبادلي و تجميعي كذلك في E .
 و نعلم كذلك أن العنصر المحايد في مجموعة E وجد فإنه يكون وحيدا .
 إذن $I = (1, 0) \in E$ هو العنصر المحايد للضرب \times في E لأن المصفوفة
 I هي العنصر المحايد للضرب \times في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. و E جزء مستقر من
 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بالنسبة للضرب .

نبين الآن أن \times توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E .

و من أجل ذلك ، لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ و $M(e, f)$ ثلاث
 مصفوفات من E . و سوف نستعمل القاعدتين التاليتين :

$$\begin{cases} M(a, b) + M(c, d) = M(a + c ; b + d) \\ M(a, b) \times M(c, d) = M(ac - 2bd ; ad + bc + 2bd) \end{cases}$$

لدينا : $M(a, b) \times (M(c, d) + M(e, f))$

$$\begin{aligned} &= M(a, b) \times M(c + e ; d + f) \\ &= M(a(c + e) - 2b(d + f) ; a(d + f) + \\ &\quad + b(c + e) + 2b(d + f)) \\ &= M(ac + ae - 2bd - 2bf ; ad + af + \\ &\quad + bc + be + 2bd + 2bf) \end{aligned}$$

من جهة أخرى لدينا : $M(a, b) \times M(c, d) + M(a, b) \times M(e, f)$

$$\begin{aligned} &= M(ac - 2bd ; ad + bc + 2bd) + \\ &\quad + M(ae - 2bf ; af + be + 2bf) \\ &= M(ac + ae - 2bd - 2bf ; ad + af + bc + \\ &\quad + be + 2bd + 2bf) \end{aligned}$$

و بالتالي : $\forall M(a, b), M(c, d), M(e, f) \in E ;$

$$\begin{aligned} &M(a, b) \times (M(c, d) + M(e, f)) \\ &= M(a, b) \times M(c, d) + M(a, b) \times M(e, f) \end{aligned}$$

و هذا يعني أن \times توزيعي بالنسبة لـ $+$ على اليسار .
 و بنفس الطريقة نبين أن \times توزيعي بالنسبة لـ $+$ على اليمين .
 و بذلك نحصل على النتائج التالية :

- زمرة $(E, +)$
- \times تجميعي في E
- \times توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E
- \times تبادلي في E
- $M(1, 0)$ عنصر محايد لـ E في E .

و بالتالي نستنتج أن $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية و واحدة وحدتها المصفوفة $M(1, 0)$

نبين أن f تشاكل . لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصفوفتين من E .
 من جهة أولى لدينا :

$$\begin{aligned} f(M(a, b) \times M(c, d)) &= f(M(ac - 2bd ; ad + bc + 2bd)) \\ &= (ac - 2bd) + (ad + bc + 2bd) + i(ad + bc + 2bd) \\ &= (ac + ad + bc) + i(ad + bc + 2bd) \end{aligned}$$

من جهة ثانية لدينا :

$$\begin{aligned} f(M(a, b)) \times f(M(c, d)) &= (a + b + ib) \times (c + d + id) \\ &= ac + ad + i ad + bc + bd + i bd + i bc + i bd - bd \\ &= (ac + ad + bc) + i(ad + bc + 2bd) \end{aligned}$$

إذن مهما تكن المصفوفات $M(a, b)$ و $M(c, d)$ من E .

لدينا : $f(M(a, b) \times M(c, d)) = f(M(a, b)) \times f(M(c, d))$
 و هذا يعني أن f تشاكل من (E, \times) نحو (\mathbb{C}, \times) .

نبين أن f تقابل :

ليكن $\alpha + i\beta$ عددا عقديا . إذن يوجد عدنان حقيقيان a و b حيث
 $\alpha + i\beta = a + b + ib$ و $b = \beta$ و $a = \alpha - b$

لنحل في \mathbb{C} المعادلة $f(M(x, y)) = \alpha + i\beta$ ذات المجهول $M(x, y)$

لدينا : $f(M(x, y)) = \alpha + i\beta$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x + y + iy = a + b + ib \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a + b \\ y = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \end{aligned}$$

نستنتج إذن أن المعادلة $f(M(x, y)) = \alpha + i\beta$ تقبل حلا وحيدا في E .
 أو بتعبير آخر :

$$(\forall (\alpha + i\beta) \in \mathbb{C}) (\exists ! M(x, y) \in E) ; f(M(x, y)) = \alpha + i\beta$$

و هذا يعني بكل بساطة أن التطبيق f تقابل من E نحو \mathbb{C} .

الخلاصة : f تشاكل تقابلي من (E, \times) نحو (\mathbb{C}, \times) .

لتكن $M(a, b)$ مصفوفة من $E^* = E \setminus \{M(0, 0)\}$.

و لتكن المصفوفة $M(x, y)$ مقلوب المصفوفة $M(a, b)$ في (E^*, \times)

إذن : $M(a, b) \times M(x, y) = M(x, y) \times M(a, b) = M(1, 0)$

نحتفظ فقط بإحدى المتساويتين لأن \times تبادلي .

$$M(a, b) \times M(x, y) = M(1, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax - 2by = 1 \\ ay + bx + 2by = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \text{systeme de deux} \\ \text{Equations à deux} \\ \text{inconnus } x \text{ et } y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax = 1 + 2by \\ a^2y + b(ax) + 2ab y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax = 1 + 2by \\ a^2y + b(1 + 2by) + 2ab y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax = 1 + 2by \\ y(a^2 + 2b^2 + 2ab) = -b \end{cases}$$

$$= f^{-1} \left(2 \left(\frac{n}{2} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) + i 2 \left(\frac{n}{2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right) ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$= f^{-1} \left(\left[2 \left(\frac{n}{2} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) - 2 \left(\frac{n}{2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + 2 \left(\frac{n}{2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) + i 2 \left(\frac{n}{2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right)$$

سوف نبسط الآن التعبير : $2 \left(\frac{n}{2} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) - 2 \left(\frac{n}{2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right)$

$$2 \left(\frac{n}{2} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) - 2 \left(\frac{n}{2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{n}{2} \right) \left(\cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) - \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right)$$

$$= 2 \left(\frac{n}{2} \right) \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{-n\pi}{4} \right) \right)$$

$$= 2 \left(\frac{n}{2} \right) \left(2 \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{4} - \frac{n\pi}{4}}{2} \right) \cos \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{4} + \frac{n\pi}{4}}{2} \right) \right)$$

$$= 2 \left(\frac{n}{2} \right) \left(2 \sin \left(\frac{\pi - n\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$= 2 \left(\frac{n}{2} \right) \left(2 \sin \left(\frac{\pi - n\pi}{4} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{n}{2} \right) \cdot 2 \left(\frac{-1}{2} \right) \cdot 2^1 \cdot \sin \left(\frac{\pi - n\pi}{4} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{n+1}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi - n\pi}{4} \right)$$

$$= -2 \left(\frac{n+1}{2} \right) \sin \left(\frac{n\pi - \pi}{4} \right)$$

و بالتالي نحصل على :

$$(M(0,1))^n = f^{-1} \left(-2 \left(\frac{n+1}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi(n-1)}{4} \right) + \right.$$

$$\left. + 2 \left(\frac{n}{2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right) + i 2 \left(\frac{n}{2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right)$$

$$= M \left(-2 \left(\frac{n+1}{2} \right) \sin \left(\frac{(n-1)\pi}{4} \right) ; 2 \left(\frac{n}{2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right)$$

التمرين الرابع

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x)e^x - 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x + 2x)$$

$$= 0 - 0 + (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^x - 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\left(\frac{2}{x} - 1 \right) e^x - \frac{2}{x} \right) = -\infty$$

التمرين الرابع

لدينا $x \rightarrow (2-x)e^x$ دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها عبارة عن جداء دالتين متصلتين وقابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} .

إن φ دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi'(x) = \left((2-x)e^x - 2 \right)'$$

$$= -e^x + (2-x)e^x$$

$$= (1-x)e^x$$

نلاحظ أن : $e^x > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

إن إشارة $\varphi'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-x)$.

إذا كان $x = 1$: فإن $\varphi'(x) = 0$.

إذا كان $x > 1$: فإن $\varphi'(x) < 0$.

إذا كان $x < 1$: فإن $\varphi'(x) > 0$.

و لدينا : $\varphi(1) = e - 2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{a}(1+2by) \\ y = \frac{-b}{a^2+2b^2+2ab} \end{cases} ; \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ M(a,b) \in E^* \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{a}(1+2by) \\ y = \frac{-b}{a^2+2b^2+2ab} \end{cases} ; \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ M(a,b) \in E^* \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{2b^2}{a^2+2b^2+2ab} \right) \\ y = \frac{-b}{a^2+2b^2+2ab} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a+2b}{a^2+2b^2+2ab} \in \mathbb{R}^* ; (a,b) \neq (0,0) \\ y = \frac{-b}{a^2+2b^2+2ab} \in \mathbb{R}^* ; (a,b) \neq (0,0) \end{cases}$$

إن كل مصفوفة $M(a,b)$ من $E^* = E \setminus \{M(0,0)\}$ قابلة للقلب في

E^* ومقلوبها هي المصفوفة : $M \left(\frac{a+2b}{a^2+2b^2+2ab} ; \frac{-b}{a^2+2b^2+2ab} \right)$

التمرين الثالث

4 ج

تذكير بتعريف الجسم : لتكن k مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين * و Γ . تكون المجموعة $(K, *, \Gamma)$ جسما إذا و فقط إذا كان :

- حلقة واحدة $(K, *, \Gamma)$
- و كل عنصر من K ما عدا العنصر المحايد له * يقبل ماثلا بالنسبة له Γ في المجموعة $k^* = k \setminus \{e\}$.

لقد حصلنا على ما يلي :

- زمرة تبادلية عنصرها المحايد $M(0,0)$.
- كل مصفوفة من E ما عدا المصفوفة $M(0,0)$ تقبل مقلوبا في $E \setminus \{M(0,0)\}$.

إن حسب تعريف الجسم ، نستنتج أن $(E, +, \times)$ جسم .

و بما أن \times تبادلي في E فإن الجسم $(E, +, \times)$ تبادلي .

ملاحظة : توجد طريقة نبين من خلالها أن $(E, +, \times)$ جسم و هي أن نبين أن :

- زمرة تبادلية عنصرها المحايد $M(0,0)$.
- زمرة (E^*, \times)
- \times توزيعي بالنسبة له * في E .

لكي تكون (E^*, \times) زمرة يكفي أن نبين أنها زمرة جزئية من الزمرة

أي بين أنه مهما تكن المصفوفتان $M(a,b)$ و $M(c,d)$ من E^*

$$\text{فإن : } M(a,b) \times M \left(\frac{c+2d}{c^2+2d^2+2cd} ; \frac{-d}{c^2+2d^2+2cd} \right) \in E^*$$

التمرين الثالث

4 د

سوف نستعمل في هذا السؤال كون f تشاكل تقابلي و تقابله العكسي f^{-1} تشاكل تقابلي كذلك . إضافة إلى بعض صيغ الحساب المثلثي .

ليكن n عنصرا من \mathbb{N}^* .

$$(M(0,1))^n = M(0,1) \times \dots \times M(0,1) ; n \text{ fois}$$

$$= f^{-1}(1+i) \times \dots \times f^{-1}(1+i) ; n \text{ fois}$$

$$= f^{-1} \left(\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} \right) \times \dots \times f^{-1} \left(\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} \right) ; n \text{ fois}$$

$$= f^{-1} \left(\left(\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} \right) \times \dots \times \left(\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} \right) \right) ; n \text{ fois}$$

$$= f^{-1} \left(\left(\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} \right)^n \right) ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$= f^{-1} \left(2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{in\pi}{4}} \right) ; n \in \mathbb{N}^*$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة φ كما يلي :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	+	0	-
φ	$-\infty$	0	$e-2$	$-\infty$

التمرين الرابع

من خلال جدول تغيرات الدالة φ و نلاحظ أنها دالة متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $[1, +\infty[$.

إذن φ تقابل من المجال $[1, +\infty[$ نحو المجال $\varphi([1, +\infty[)$.

$$\varphi([1, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) ; \varphi(1) \right[=]-\infty ; e-2]$$

$$=]-\infty ; 0,72]$$

إذن تقابل من $[1, +\infty[$ نحو $] -\infty ; 0,72]$.

و هذا يعني أن كل عنصر من $] -\infty ; 0,72]$ يقبل سابقاً وحيداً بالدالة φ من المجال $[1, +\infty[$.

لدينا : $0 \in] -\infty ; 0,72]$.

إذن 0 يمتلك سابقاً وحيداً α من المجال $[1, +\infty[$.

أو بتعبير آخر : $\varphi(\alpha) = 0$; $(\exists! \alpha \geq 1)$

و هذا يعني أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $[1, +\infty[$ وهو العدد α .

لنبين الآن أن : $1,59 < \alpha < 1,60$.

و من أجل ذلك يجب أن نحدد كلا من $\varphi(1,60)$ و $\varphi(1,59)$.

$$\varphi(1,59) = (2 - 1,59)e^{1,59} - 2 \approx 0,01$$

$$\varphi(1,60) = (2 - 1,60)e^{1,60} - 2 \approx -0,01$$

نلاحظ أن : $-0,01 < 0 < 0,01$.

$$\varphi(1,6) < \varphi(\alpha) < \varphi(1,59)$$

تدخل الدالة التناقصية φ^{-1} على هذه الأعداد المنتمية إلى $] -\infty ; 0,72]$

$$\varphi^{-1}(\varphi(1,6)) > \varphi^{-1}(\varphi(\alpha)) > \varphi^{-1}(\varphi(1,59))$$

يعني : $1,6 > \alpha > 1,59$.

التمرين الرابع

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\left(\frac{e^x - e^0}{x - 0} \right)}$$

$$= \frac{0}{1} ; \text{car } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^0}{x - 0} \right) = (e^x)'_{x=0} = e^0 = 1$$

$$= 0 = f(0)$$

إذن f دالة متصلة في الصفر .

التمرين الرابع

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x^2} \right) - \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{4} \left(\frac{e^x}{2} \right)^2 - \frac{1}{4 \left(\frac{x}{2} \right)^2}} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{4} \left(\frac{e^t}{t} \right)^2 - \frac{1}{4t^2}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{1}{4} (+\infty)^2 - 0} \right) = 0$$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right) = 0$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1$$

التمرين الرابع

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{e^x - e^0}{x - 0} \right)}$$

$$= \frac{1}{(e^x)'_{x=0}} = \frac{1}{e^0} = 1 \in \mathbb{R}$$

إذن f قابلة للاشتقاق في الصفر . و العدد المشتق هو $f'(0) = 1$.

التمرين الرابع

لدينا الدالة $x \rightarrow x^2$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها حدودية .

إذن فهي قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* .

و لدينا $x \rightarrow e^x - 1$ دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} (إذن \mathbb{R}^*).

و لدينا : $\forall x \neq 0 ; e^x - 1 \neq 0$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* باعتبارها خارج دالتين قابلتين

للاشتقاق على \mathbb{R}^* باعتبارها خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}^*

و المقام غير منعدم .

ليكن x عنصراً من \mathbb{R}^*

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right)' = \frac{2x(e^x - 1) - e^x(x^2)}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \left(\frac{x}{(e^x - 1)^2} \right) (2(e^x - 1) - x e^x)$$

$$= \left(\frac{x}{(e^x - 1)^2} \right) ((2 - x)e^x - 2)$$

$$= \frac{x \varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$$

التمرين الرابع

$$\varphi(\alpha) = 0 \Rightarrow (2 - \alpha)e^\alpha - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2 - \alpha)e^\alpha = 2$$

$$\Rightarrow e^\alpha = \frac{2}{2 - \alpha} ; \text{avec } \alpha \neq 2$$

$$\Rightarrow e^\alpha - 1 = \frac{2}{2 - \alpha} - 1$$

$$\Rightarrow (e^\alpha - 1) = \frac{\alpha}{2 - \alpha} \quad (*)$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{e^\alpha - 1} = \frac{\alpha^2}{\left(\frac{\alpha}{2 - \alpha} \right)} ; \text{selon } (*)$$

$$= \frac{\alpha^2(2 - \alpha)}{\alpha} ; \text{avec } \alpha \neq 0$$

$$= \alpha(2 - \alpha)$$

التمرين الرابع

1 II

سوف نستعمل الكاملة بالأجزاء أثناء الحساب .

لدينا : $G(x) = \int_0^x \underbrace{t^2}_u \cdot \underbrace{e^{-t}}_{v'} dt$

$$= [-t^2 e^{-t}]_0^x + 2 \int_0^x \underbrace{t}_{\alpha'} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{\beta'} dt$$

$$= [-t^2 e^{-t}]_0^x + 2 \left([-t e^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt \right)$$

$$= [-t^2 e^{-t}]_0^x + 2[-t e^{-t}]_0^x + 2[-e^{-t}]_0^x$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2 e^{-x} + 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2 e^{-x} + 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 e^{-x}) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} - 2 e^{-x} + 2 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2}{e^x} \right) + (0 - 2 \times 0 + 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{\left(\frac{x}{e^2}\right)^2} \right) + 2 = \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ u = \frac{x}{2}}} \left(\frac{4}{\left(\frac{e^u}{u}\right)^2} \right) + 2$$

$$= 0 + 2 = 2$$

وبالتالي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 2$

التمرين الرابع

2 II

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I . وكان a عنصرا من I

فإن الدالة : $F : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I التي تنعدم في a .

في هذا التمرين لدينا f دالة متصلة على المجال $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$

إذن الدالة

$F : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow \int_0^x f(t) dt$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f التي تنعدم في 0 .

يعني أن : $F(0) = 0$ و $F'(x) = f(x)$; $(\forall x \geq 0)$.

ولدينا : $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

$\Rightarrow F'(x) \geq 0$

$\Rightarrow F \text{ est } \nearrow \text{ sur } [0, +\infty[= \mathbb{R}^+$

التمرين الرابع

3 II

يكفي أن ندرس إشارة الفرق $(f(t) - 2t^2 e^{-t})$.

ليكن t عنصرا من المجال $[\ln 2 ; +\infty[$

لدينا : $f(t) - 2t^2 e^{-t} = \frac{t^2}{e^t - 1} - 2t^2 e^{-t}$

$$= \frac{t^2 - 2t^2 e^{-t}(e^t - 1)}{e^t - 1}$$

$$= \frac{t^2 - 2t^2 e^0 + 2t^2 e^{-t}}{e^t - 1}$$

$$= \frac{-t^2 + 2t^2 e^{-t}}{e^t - 1} = \frac{t^2(2e^{-t} - 1)}{e^t - 1}$$

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = \frac{x \varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$

ونلاحظ أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; (e^x - 1)^2 > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة بإشارتي x و $\varphi(x)$ على \mathbb{R}^* .
 و ندرج في الجدول التالي أهم النتائج المحصل عليها .

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	+	0	-	-
φ	$-\infty$	\nearrow	$e-2$	\searrow	$-\infty$
$\varphi(x)$	-	0	+	+	0
x	-	0	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	0	-
f	$-\infty$	\nearrow	$f(1)$	\searrow	0

التمرين الرابع

4 II

في البداية لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

إذن محور الأفاصيل ($y = 0$) مقارب أفقي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

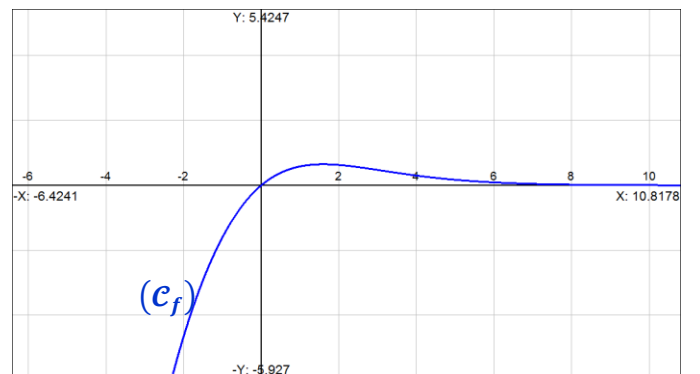
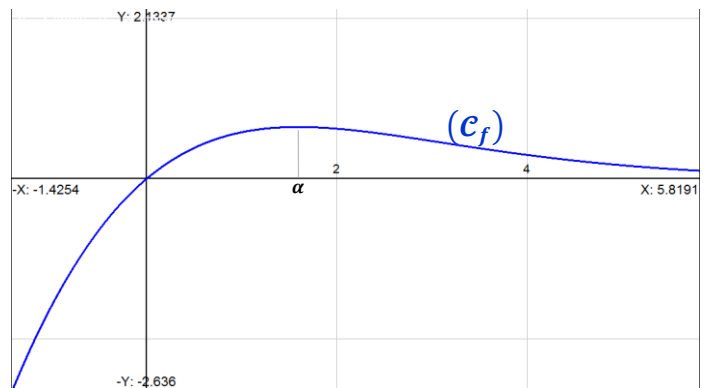
ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x}(e^x - 1)} \right)$

$$= \left(\frac{1}{0^-(0-1)} \right) = +\infty$$

إذن نستنتج أن (C_f) يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور الأرتاب بجوار $-\infty$

التمرين الرابع

5 II



$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{p=1}^n e^{-px} + \left(\frac{e^{-nx}}{e^x - 1} \right) &= \left(\frac{e^{-(n+1)x} - 1}{e^{-x} - 1} - 1 + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} \right) \\ &= \frac{e^{-nx} e^{-x} - 1}{\left(\frac{1-e^x}{e^x} \right)} - 1 + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} \\ &= \frac{e^x e^{-nx} e^{-x} - e^x}{1 - e^x} - \frac{e^x - 1}{e^x - 1} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} \\ &= \frac{e^{-nx} - e^x}{1 - e^x} - \frac{e^x - 1}{e^x - 1} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} \\ &= \frac{e^x - e^{-nx} - e^x + 1 + e^{-nx}}{e^x - 1} \\ &= \frac{1}{e^x - 1} \end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} + \sum_{p=1}^n e^{-px}$

التمرين الرابع

ب 1 IV

لدينا حسب ما سبق $f'(x)$ تتعدم في العدد α على \mathbb{R}^+ و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطة .

إذن f تقبل مطرافا في النقطة ذات الأضلاع α . و هذا المطراف عبارة عن قيمة قصوية و هي $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$.

بتعبير آخر : $(\forall t \in \mathbb{R}^+) ; f(t) \leq f(\alpha)$.

أي : $(\forall t \in \mathbb{R}^+) ; f(t) \leq \alpha(2 - \alpha)$.

و كذلك f دالة موجبة على المجال $[0, +\infty[$.

إذن : $0 \leq f(t) \leq \alpha(2 - \alpha)$.

و لدينا : $(\forall t \geq x) ; 0 \leq e^{-nt} \leq e^{-nx}$.

نضرب التاطيرين طرفا طرفا نحصل على التاطير التالي :

$$0 \leq f(t) \cdot e^{-nt} \leq \alpha(2 - \alpha) e^{-nx}$$

ندخل التكامل $\int_0^x dt$ على هذه الدوال المتصلة على المجال $[0, +\infty[$ حيث $0 \leq x$ نحصل على :

$$(1) \quad 0 \leq \int_0^x (f(t) e^{-nx}) dt \leq \alpha(2 - \alpha) \int_0^x e^{-nt} dt$$

من جهة أخرى لدينا : $\int_0^x e^{-nt} dt = \left[\frac{-1}{n} e^{-nt} \right]_0^x = \frac{-1}{n} e^{-nx} + \frac{1}{n}$.

$$n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{-1}{n} e^{-nx} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{n} e^{-nx} + \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \int_0^x e^{-nt} dt < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \alpha(2 - \alpha) \int_0^x e^{-nt} dt < \frac{\alpha(2 - \alpha)}{n} \quad (2)$$

من (1) و (2) نحصل على :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq \int_0^x f(t) e^{-nt} dt < \frac{\alpha(2 - \alpha)}{n}$$

نلاحظ أن : $(\forall t \in \mathbb{R}^+) ; \frac{t^2}{e^t - 1} > 0$.

إذن : $(\forall t \geq \ln 2) ; \frac{t^2}{e^t - 1} > 0$.

و لدينا : $t \geq \ln 2 \Rightarrow -t \leq -\ln 2$.

$$\Rightarrow e^{-t} \leq e^{-\ln 2}$$

$$\Rightarrow e^{-t} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2e^{-t} \leq 1$$

$$\Rightarrow 2e^{-t} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(2e^{-t} - 1)t^2}{e^t - 1} \leq 0$$

$$\Rightarrow f(t) - 2t^2 e^{-t} \leq 0$$

$$\Rightarrow f(t) \leq 2t^2 e^{-t}$$

و بالتالي : $(\forall t \geq \ln 2) ; f(t) \leq 2t^2 e^{-t}$

التمرين الأول

ب 3 II

ليكن t عنصرا من المجال $[\ln 2 ; +\infty[$ و x عدد حقيقي غير منعدم موجب .

$$t \geq \ln 2 \Rightarrow f(t) \leq 2t^2 e^{-t}$$

$$\Rightarrow \int_{\ln 2}^x f(t) dt \leq \int_{\ln 2}^x 2t^2 e^{-t} dt$$

car ces fonctions sont continues et $\ln 2 \leq x$

$$\Rightarrow \int_0^{\ln 2} f(t) dt + \int_{\ln 2}^x f(t) dt \leq \int_0^{\ln 2} f(t) dt + \int_{\ln 2}^x 2t^2 e^{-t} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^{\ln 2} f(t) dt + \int_0^x 2t^2 e^{-t} dt - \int_0^{\ln 2} 2t^2 e^{-t} dt$$

$$\Rightarrow F(x) \leq \underbrace{\int_0^{\ln 2} (f(t) - 2t^2 e^{-t}) dt}_{\text{ceci est un nombre réel } a} + \int_0^x 2t^2 e^{-t} dt$$

c-à-d une constante réelle

$$\Rightarrow F(x) \leq a + 2G(x)$$

$$\Rightarrow F(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (a + 2G(x))$$

$$\Rightarrow F(x) \leq (a + 4) ; (\forall x \geq 0)$$

F مكبورة على \mathbb{R}^+

التمرين الرابع

أ 1 IV

تذكير : إذا كانت $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها يخالف 1 فإن :

$$q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

ليكن x عددا حقيقيا موجبا و نعتبر المتتالية الهندسية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

التي حدها العام هو : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = (e^{-x})^n$.

نلاحظ أن أساس هذه المتتالية هو عدد حقيقي مخاف لـ 1 .

لأن : $x \neq 0 \Rightarrow e^{-x} \neq 0$.

$$(e^{-x})^0 + (e^{-x})^1 + (e^{-x})^2 + \dots + (e^{-x})^n = \frac{(e^{-x})^{n+1} - 1}{e^{-x} - 1}$$

$$\Rightarrow 1 + \sum_{p=1}^n e^{-px} = \frac{e^{-(n+1)x} - 1}{e^{-x} - 1}$$

$$\Rightarrow \sum_{p=1}^n e^{-px} = \left(\frac{e^{-(n+1)x} - 1}{e^{-x} - 1} - 1 \right)$$

ثم نُدخل التكامل $\int_0^x dt$ على هاتين الدالتين المتصلتين حيث $0 \leq x$.

$$\int_0^x \left(\frac{t^2}{e^t - 1} \right) dt = \int_0^x \left(\frac{t^2 e^{-nt}}{e^t - 1} \right) dt + \int_0^x t^2 \sum_{p=1}^n e^{-pt} dt$$

$$\Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) e^{-nt} dt + \sum_{p=1}^n \int_0^x (t^2 e^{-pt}) dt$$

$$\Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) e^{-nt} dt + \sum_{p=1}^n I_p(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t) e^{-nt} dt = F(x) - \sum_{p=1}^n I_p(x)$$

التمرين الرابع

2 IV

ليكن $(n \in \mathbb{N}^*)$ و $(x \in \mathbb{R}^+)$

لدينا : $\int_0^x f(t) e^{-nt} dt = F(x) - \sum_{p=1}^n I_p(x)$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x f(t) e^{-nt} dt \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{p=1}^n I_p(x) \right)$$

$$= L - \sum_{p=1}^n \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} I_p(x) \right)$$

$$= \left(L - \sum_{p=1}^n \left(\frac{2}{p^3} \right) \right) \in \mathbb{R}$$

إذن الدالة $\int_0^x f(t) e^{-nt} dt \rightarrow$ تقبل النهاية $L - \sum_{p=1}^n \left(\frac{2}{p^3} \right)$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

التمرين الرابع

2 IV

لدينا : $\int_0^x f(t) e^{-nt} dt = F(x) - \sum_{p=1}^n I_p(x)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x f(t) e^{-nt} dt \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{p=1}^n I_p(x) \right)$$

$$\Rightarrow L_n = L - \sum_{p=1}^n \left(\frac{2}{p^3} \right) \Rightarrow L - L_n = \sum_{p=1}^n \left(\frac{2}{p^3} \right)$$

$$\Rightarrow L - L_n = 2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \right)$$

التمرين الرابع

2 IV

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq \int_0^x f(t) e^{-nt} dt \leq \frac{\alpha(2-\alpha)}{n}$

On fait tendre x vers $+\infty$ On obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x f(t) e^{-nt} dt \right) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(2-\alpha)}{n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq L_n \leq \frac{\alpha(2-\alpha)}{n}$$

التمرين الرابع

1 IV

لدينا : $I_n(x) = \int_0^x \frac{t^2}{u} \cdot \frac{e^{-nt}}{v'} dt$

$$= \left[\frac{-t^2 e^{-nt}}{n} \right]_0^x + \frac{2}{n} \int_0^x \frac{t}{\varphi} \cdot \frac{e^{-nt}}{\psi'} dt$$

$$= \left[\frac{-t^2 e^{-nt}}{n} \right]_0^x + \frac{2}{n} \left(\left[\frac{-t e^{-nt}}{n} \right]_0^x + \frac{1}{n} \int_0^x e^{-nt} dt \right)$$

$$= \left(\frac{-x^2 e^{-nx}}{n} \right) + \frac{2}{n} \left(\frac{-x e^{-nx}}{n} \right) + \frac{2}{n^2} \left[\frac{-e^{-nt}}{n} \right]_0^x$$

$$= \frac{-x^2 e^{-nx}}{n} - \frac{2x e^{-nx}}{n^2} - \frac{2 e^{-nx}}{n^3} + \frac{2}{n^3}$$

التمرين الرابع

1 IV

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2 e^{-nx}}{n} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{-1}{n} \right) \left(\frac{4}{n^2} \right)}{\left(\frac{e^{\frac{nx}{2}}}{\frac{nx}{2}} \right)^2}$

$$= \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ u = \frac{nx}{2}}} \frac{\left(\frac{-1}{n} \right) \left(\frac{4}{n^2} \right)}{\left(\frac{e^u}{u} \right)^2} = 0 ; \text{car } \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^u}{u} \right)^2 = +\infty$$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x e^{-nx}}{n^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{n^2} \right) \left(\frac{1}{n} \right)}{\left(\frac{e^{nx}}{nx} \right)^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{n^3} \right)}{\left(\frac{e^u}{u} \right)^2} = 0 ; \text{car } \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^u}{u} \right)^2 = +\infty$$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 e^{-nx}}{n^3} \right) = \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ u = -nx}} \left(\frac{2}{n^3} \right) e^u$

$$= \left(\frac{2}{n^3} \right) \times 0 = 0$$

نستنتج من هذه النهايات الثلاث ما يلي :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2 e^{-nx}}{n} \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x e^{-nx}}{n^2} \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 e^{-nx}}{n^3} \right) + \frac{2}{n^3}$$

$$= 0 - 0 - 0 + \frac{2}{n^3} = \frac{2}{n^3}$$

التمرين الرابع

1 IV

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم . و x عددا حقيقيا موجبا . سوف نستعمل في الجواب نتيجة السؤال (1) IV :

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-nt}}{e^t - 1} + \sum_{p=1}^n e^{-pt} ; t \geq 0$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد t^2 نجد :

$$\frac{t^2}{e^t - 1} = \frac{t^2 e^{-nt}}{e^t - 1} + t^2 \sum_{p=1}^n e^{-pt} ; t \geq 0$$

نستنتج أن المتتالية $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ مصغرة بالعدد 0 .

لنبين الآن أن $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية تناقصية .

$$\begin{aligned} L_{n+1} - L_n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x f(t) e^{-(n+1)t} dt \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x f(t) e^{-nt} dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x f(t) e^{-nt} (e^{-t} - 1) dt \right) \end{aligned}$$

لدينا : $t \geq 0 \Rightarrow -t \leq 0$

$$\Rightarrow e^{-t} \leq 1$$

$$\Rightarrow e^{-t} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow f(t) e^{-nt} (e^{-t} - 1) \leq 0 ; \text{ car } f(t) \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t) e^{-nt} (e^{-t} - 1) dt \leq 0 ; \text{ car } x \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) e^{-nt} (e^{-t} - 1) dt \leq 0$$

$$\Rightarrow L_{n+1} - L_n \leq 0$$

$$\Rightarrow L_{n+1} \leq L_n$$

$$\Rightarrow (L_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite } \searrow$$

بما أن $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تناقصية و مصغرة فهي متقاربة .

التمرين الرابع

IV 2

في البداية رأينا أن المتتالية $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة و سوف نحسب نهايتها بالطريقة المباشرة (التعويض) .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (L_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x f(t) e^{-nt} dt \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^x (f(t) \times 0) dt \right) ; \text{ car } e^{-nt} \rightarrow 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^x 0 dt \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \end{aligned}$$

و رأينا كذلك أن : $L - L_n = 2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \right)$

$$\Rightarrow L - L_n = 2 u_n$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{L}{2} - \frac{L_n}{2}$$

بما أن $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة فإن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{L}{2} - \frac{L_n}{2} \right) = \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} L_n \right) \\ &= \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{L}{2} = L' \end{aligned}$$

أجوبة امتحان مدينة الرباط 2009

التمرين الأول

1

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{لدينا}$$

$$-3A + 2I = -3 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ولدينا}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{إذن} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

نستنتج إذن أن: $A^2 - 3A + 2I = O$

$$A \times \left(\frac{-1}{2}A + \frac{3}{2}I \right) = I \quad \text{يعني: } \frac{-1}{2}A^2 + \frac{3}{2}A - I = O$$

$$\text{و كذلك: يعني: } \left(\frac{-1}{2}A + \frac{3}{2}I \right) \times A = I$$

و بالتالي المصفوفة A قابلة للقلب في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

و مقلوبها هو المصفوفة $\left(\frac{-1}{2}A + \frac{3}{2}I \right)$.

أو بتعبير آخر المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ قابلة للقلب في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

و مقلوبها هو المصفوفة $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

التمرين الأول

2

$$J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2J \\ K^2 = K \times K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2K \\ J \times K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \\ K \times J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

التمرين الأول

2

لتكن a عددا حقيقيا غير منعدم.

$$M(a) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + \frac{1}{a} & a - \frac{1}{a} \\ a - \frac{1}{a} & a + \frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2a} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{a}{2} \right) J + \left(\frac{1}{2a} \right) K$$

التمرين الأول

2

في البداية نلاحظ أن جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لأنه يضم مصفوفات مربعة من الرتبة 2. لتكن $M(a)$ و $M(b)$ مصفوفتين من E .

$$M(a) \times M(b) = \left(\frac{a}{2}J + \frac{1}{2a}K \right) \times \left(\frac{b}{2}J + \frac{1}{2b}K \right) \quad \text{لدينا}$$

$$= \left(\frac{ab}{4} \right) J^2 + \left(\frac{a}{4b} \right) \cdot J \times K + \left(\frac{b}{4a} \right) \cdot K \times J + \left(\frac{1}{4ab} \right) K^2$$

$$= \left(\frac{ab}{4} \right) (2J) + \left(\frac{a}{4b} \right) \cdot O + \left(\frac{b}{4a} \right) \cdot O + \left(\frac{1}{4ab} \right) (2K)$$

$$= \left(\frac{ab}{2} \right) J + \left(\frac{1}{2ab} \right) K$$

$$= M(ab) \in E ; \text{ car } ab \in \mathbb{R}^*$$

إذن: $\forall M(a), M(b) \in E ; M(a) \times M(b) \in E$

و هذا يعني أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

التمرين الأول

3

ليكن a و b عددا حقيقيين غير منعدمين.

لدينا حسب ما سبق: $M(a) \times M(b) = M(ab)$

يعني: $f(a) \times f(b) = f(ab)$

و هذا يعني أن f تشكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) .

لتكن $M(a)$ مصفوفة معلومة من E ولنحل في \mathbb{R}^*

المعادلة $f(x) = M(a)$ ذات المجهول x .

$$f(x) = M(a) \Leftrightarrow M(x) = M(a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + \frac{1}{x} & x - \frac{1}{x} \\ x - \frac{1}{x} & x + \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + \frac{1}{a} & a - \frac{1}{a} \\ a - \frac{1}{a} & a + \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = a \in \mathbb{R}^* ; \text{ car } M(a) \in E$$

إذن المعادلة تقبل حلا وحيدا في \mathbb{R}^* و هو العدد الحقيقي a .

أو بتعبير آخر: $f(x) = M(a) ; (\forall M(a) \in E), (\exists! x \in \mathbb{R}^*)$

و هذا يعني أن f تقابل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) .

الخلاصة: f تشكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) .

التمرين الأول

3

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق و يُحولها إلى مجموعة الوصول.

بما أن f تشكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) .

فان صورة الزمرة التبادلية (\mathbb{R}^*, \times) بالتشاكل f هي الزمرة التبادلية

و بما أن f تقابل من \mathbb{R}^* نحو E . فإن: $f(\mathbb{R}^*) = E$.

إذن صورة الزمرة التبادلية (\mathbb{R}^*, \times) بالتشاكل التقابلي f هي الزمرة التبادلية (E, \times) .

مميزات الزمرة التبادلية (E, \times) نستنتجها من خلال مميزات الزمرة (\mathbb{R}^*, \times) .

بما أن (\mathbb{R}^*, \times) زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون \times هو العدد

الحقيقي 1. و كل عنصر x من \mathbb{R}^* يقبل ماثلا بالقانون \times في \mathbb{R}^* و هو $\frac{1}{x}$

فإن (E, \times) زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون \times هي المصفوفة

$f(1)$. و لكل مصفوفة $M(x)$ من E تقبل ماثلا بالقانون \times في E

و هي المصفوفة $M\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\text{ولدينا: } f(1) = M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\text{و كذلك: } f\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + \frac{1}{x} & -x + \frac{1}{x} \\ -x + \frac{1}{x} & x + \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

أو بتعبير آخر: $Sym_E(M(a)) = Sym_E(f(a))$

$$= f(Sym_{\mathbb{R}^+}(a))$$

$$= f\left(\frac{1}{a}\right) = M\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + \frac{1}{a} & -a + \frac{1}{a} \\ -a + \frac{1}{a} & a + \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

لدينا $x \wedge y = d \in \mathbb{N}^*$ و a يقسم d .
 إذن يوجد c من \mathbb{N}^* بحيث $d = ac$.
 نُعوض d بـ (ac) في المتساوية (*) نحصل على:

$$a(31 - a^2c) = bac(a + b)$$

$$(31 - a^2c) = bc(a + b) \quad \text{نختزل بالعدد الغير المنعدم } a \text{ نحصل على:}$$

$$31 = a^2c + abc + cb^2 \quad \text{أي:}$$

$$31 = c(a^2 + ab + b^2) \quad \text{أي:}$$

نضع: $k = a^2 + b^2 + ab$.
 بما أن a و b عددان صحيحان نسيبان فإن a^2 و b^2 و ab أعداد نسبية
 كذلك. و منه k عدد نسبي.

و لدينا: $c(a^2 + b^2 + ab) = 31$. إذن: $31 = kc$.
 أي أن c يقسم العدد الأولي 31 و $c \in \mathbb{N}$.
 إذن $c = 1$ أو $c = 31$.

الحالة الأولى: إذا كان $c = 31$

$$\text{فإن: } d = ac = 31a$$

$$\text{إذن: } 31(a^2 + b^2 + ab) = 31$$

$$\text{أي: } a^2 + b^2 + ab = 1$$

ثم نطرح السؤال: هل فعلا يوجد (a, b) من \mathbb{Z}^{2*} حيث $a^2 + b^2 + ab = 1$
 ليكن b عددا معلوما و نبحث عن a في \mathbb{Z}^* .

$$\text{الكتابة } a^2 + ab + b^2 - 1 = 0 \text{ عبارة عن معادلة من الدرجة الثانية}$$

$$\text{بمُعاملات حقيقية و بمجهول واحد } a. \text{ و لدينا: } \Delta_b = b^2 - 4(b^2 - 1)$$

$$= -3b^2 + 4$$

$$= 4 - 3b^2$$

$$= (2 - \sqrt{3}b)(2 + \sqrt{3}b)$$

شروط وجود العدد a هو $\Delta_b \geq 0$.

$$\text{يعني: } (2 - \sqrt{3}b)(2 + \sqrt{3}b) \geq 0$$

$$\text{يعني: } -\frac{2}{\sqrt{3}} \leq b \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

يعني: $-1,15 \leq b \leq 1,15$ و $b \in \mathbb{Z}$

إذن لكي يكون a موجودا يجب أن يكون $b \in \{-1; 0; 1\}$
 بما أن $b \neq 0$ فإن الشرط السابق يُصبح: $b \in \{-1; 1\}$

إذا كان $b = 1$ فإن $a(a + 1) = 0$
 و منه: $a = -1$ لأن $a \neq 0$

و نحصل بذلك على: $(a, b) = (-1, 1)$

نُعوض في الكتابة (*): نجد: $1d(-1 + 1) = -1(31 + d)$

أي: $31 + d = 0$. أي: $d = -31$

و هذا تناقض لأن $d \in \mathbb{N}$

إذا كان $b = -1$ فإن $a(a - 1) = 0$
 و منه: $a = 1$ لأن $a \neq 0$

و نحصل بذلك على: $(a, b) = (1, -1)$
 نُعوض في النتيجة (*): نجد: $d = 31$

و منه: $(x, y) = (ad; bd) = (1 \times 31; -1 \times 31) = (31, -31)$
 إذن في حالة $c = 31$ وجدنا حلا واحدا للمعادلة (E) و هو الزوج

و للتأكد لدينا: $31^2 + (-31)^2 - 31 \times 31 - 31 \times 31 = 0$

الحالة الثانية: إذا كان $c = 1$ فإن $d = ac = a$

و لدينا: $1(a^2 + b^2 + ab) = 31$

أي: $a^2 + ab + (b^2 - 31) = 0$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد
 و هو a علما أن b إفتراضنا معلوما.

$$\text{لدينا: } \Delta_b = b^2 - 4(b^2 - 31) = -3b^2 + 124$$

$$= (\sqrt{124} - \sqrt{3}b)(\sqrt{124} + \sqrt{3}b)$$

شروط وجود العدد a هو أن يكون $\Delta_b \geq 0$.

$$\text{يعني: } (\sqrt{124} - \sqrt{3}b)(\sqrt{124} + \sqrt{3}b) \geq 0$$

$$\text{يعني: } -\sqrt{\frac{124}{3}} \leq b \leq \sqrt{\frac{124}{3}} \quad \text{يعني: } -6,42 \leq b \leq 6,42$$

يعني: $b \in \{-6; -5; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

من أجل ذلك أقترح ثلاث طرق مختلفة.

الطريقة الأولى: استعمال مبدأ خوارزمية أقليدس التالي:

$$\frac{a}{d} \mid \frac{b}{c} \Rightarrow a \wedge b = b \wedge d$$

و كذلك الخاصية: $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{2*}; a \wedge b = a^m \wedge b^n$

$$\frac{ab + b^2}{ab} \mid \frac{a}{b} \quad \text{لدينا:}$$

إذن: $b(a + b) \wedge a = a \wedge b^2 = a \wedge b = 1$

الطريقة الثانية: استعمال الخاصيتين التاليتين في \mathbb{Z} .

$$(1) (\forall n \in \mathbb{Z}); a \wedge b = a \wedge (b + na)$$

$$(2) a \wedge c = 1 \Rightarrow a \wedge b = a \wedge bc; (\forall b \in \mathbb{Z}^*)$$

نفترض أن: $a \wedge b = 1$

إذن حسب الخاصية (1) نستنتج أن: $a \wedge (a + b) = 1$

و منه حسب الخاصية (2) نكتب: $1 = a \wedge (a + b) = a \wedge b(a + b)$

ليكن a و b عددان صحيحان نسيبان حيث $a \wedge b = 1$

و ليكن: $a \wedge b(a + b) = d \in \mathbb{N}^*$. نفترض أن: $d \neq 1$.

$$a \wedge b(a + b) = d \Rightarrow d/a \text{ et } d/b(a + b)$$

$$\Rightarrow d/a \text{ et } d/(ab + b^2)$$

$$\Rightarrow d/(-ab) \text{ et } d/a \text{ et } d/(ab + b^2)$$

$$\Rightarrow d/(-ab) \text{ et } d/(ab + b^2) \text{ et } d/a$$

$$\Rightarrow d/(-ab + ab + b^2) \text{ et } d/a$$

$$\Rightarrow d/b^2 \text{ et } d/a$$

$$\Rightarrow d/b \text{ et } d/a$$

$$\Rightarrow d/(a \wedge b)$$

$$\Rightarrow d/1; \text{ car } a \wedge b = 1$$

\Rightarrow Contradiction; car $d \neq 1$ par supposition

إذن ما إفتراضنا كان خاطئا.

و بالتالي: $a \wedge b(a + b) = d = 1$

تكبير بالخاصية التي سوف نستعملها في هذا السؤال.

$$a \wedge b = d \Rightarrow \exists (k, k') \in \mathbb{Z}^{2*}; \begin{cases} a = kd \\ b = k'd \\ k \wedge k' = 1 \end{cases}$$

ليكن (x, y) حلا للمعادلة E حيث $x \wedge y = d \in \mathbb{N}^*$

إذن حسب الخاصية المذكورة: يوجد a و b من \mathbb{Z}^* بحيث $x = ad$

و $y = bd$ و $a \wedge b = 1$

نُعوض x و y على التوالي بـ ad و bd في E نجد:

$$(ad)^2 + (bd)^2 + (ad)(bd) - 31ad = 0$$

و نختزل بالعدد الغير المنعدم d نحصل على:

$$a^2d + b^2d - abd - 31a = 0$$

$$\text{أي: } b^2d + abd = 31a - a^2d$$

$$\text{أي: } (*) \quad bd(a + b) = a(31 - ad)$$

لدينا: $a \wedge b(a + b) = 1$ و $bd(a + b) = a(31 - ad)$

إذن a يقسم الجداء $(b(a + b))$ و $d(b(a + b))$ و أوليان فيما بينهما.

إذن حسب Gauss نستنتج أن العدد a يقسم العدد d .

نجز القسمة الأفقيية للحدودية : $z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8$ على
الحدودية $(z+2)$ نجد :

$$\begin{array}{r} z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 \\ \underline{z^3 + 2z^2} \\ (3+i)z^2 + (10+2i)z + 8 \\ \underline{(3+i)z^2 + 2(3+i)z} \\ 4z + 8 \\ \underline{4z + 8} \\ 0 \end{array}$$

إذن : $z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 = (z+2)(z^2 + (3+i)z + 4)$

إذن المعادلة تُصبح : $z^2 + (3+i)z + 4 = 0$ أو $(z+2) = 0$

لدينا : $\Delta = (3+i)^2 - 16 = 9 - 1 + 6i - 16 = -8 + 6i = -9 + 6i + 1$
 $= (3i)^2 + 2(3i)(1) + 1^2 = (3i+1)^2$

إذن :

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-(3+i) - (3i+1)}{2} = -2(1+i) \\ z_2 = \frac{-(3+i) + (3i+1)}{2} = (1+i) \end{cases}$$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة هي :

$$S = \{-2 ; -2(1+i) ; (i-1)\}$$

التمرين الثالث



لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي و $M_1(z_1)$ صورتها بالتحويل r

لدينا : $r(M) = M_1 \Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) z$
 $\Leftrightarrow z_1 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) z$
 $\Leftrightarrow (z_1 - 0) = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) (z - 0)$

إذن r دوران مركزه O و قياس زاويته $\frac{\pi}{4}$.

لتكن $M_2(z_2)$ صورة $M(z)$ بالتحويل h .

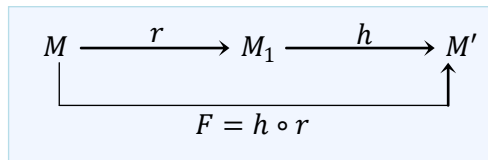
لدينا : $h(M) = M_2 \Leftrightarrow z_2 = \sqrt{2} z$
 $\Leftrightarrow (z_2 - 0) = \sqrt{2} (z - 0)$

إذن h تحاكي مركزه O و نسبته $\sqrt{2}$.

التمرين الثالث



لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي و $M_1(z_1)$ صورتها بالدوران
 h و $M'(z')$ هي صورة $M_1(z_1)$ بالتحاكي h .



لدينا : $F(M) = M' \Leftrightarrow h \circ r(M) = M'$
 $\Leftrightarrow h(r(M)) = M'$
 $\Leftrightarrow h(M_1) = M' \text{ et } z_1 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) z$
 $\Leftrightarrow z' = \sqrt{2} \cdot z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot z$
 $= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) z$
 $= (1+i)z$

إذن : $F(M) = M' \Leftrightarrow z' = (1+i)z$

بما أن $b \neq 0$

فإن $b \in \{-6; -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

نُعوّض كل قيمة لـ b في المعادلة ■ ثم نحلها نجد :

إذا كان $b = -6$ فإن $a = 1$ أو $a = 5$

إذا كان $b = -5$ فإن $a = -1$ أو $a = 6$

إذا كان $b = -4$ فإن $a \notin \mathbb{Z}$

إذا كان $b = -3$ فإن $a \notin \mathbb{Z}$

إذا كان $b = -2$ فإن $a \notin \mathbb{Z}$

إذا كان $b = -1$ فإن $a = 6$ أو $a = -5$

إذا كان $b = 1$ فإن $a = 5$ أو $a = -6$

إذا كان $b = 2$ فإن $a \notin \mathbb{Z}$

إذا كان $b = 3$ فإن $a \notin \mathbb{Z}$

إذا كان $b = 4$ فإن $a \notin \mathbb{Z}$

إذا كان $b = 5$ فإن $a = 1$ أو $a = -6$

إذا كان $b = 6$ فإن $a = -5$ أو $a = -1$

نستنتج إذن أنه في حالة $c = 1$ فإن :

$$(a, b) \in \left\{ \begin{array}{l} (5, -6); (1, -6); (6, -5); (-1, -5); (6, -1) \\ (-5, -1); (5, 1); (-6, 1); (1, 5); (-6, 5) \\ (-5, 6); (-1, 6) \end{array} \right\}$$

و نعلم أن : $x = ad$ و $y = bd$

يعني : $x = a^2$ و $y = ab$

و ذلك لأن : $d = ac = a \Rightarrow c = 1$

نستنتج إذن أن :

$$(x, y) \in \left\{ \begin{array}{l} (25, -30); (1, -6); (36, -30); (1, 5) \\ (36, -6); (25, 5); (25, 5); (36, -6) \\ (1, 5); (36, -30); (25, -30); (1, -6) \end{array} \right\}$$

نلاحظ أن هناك نسختين من كل حل . إذن :

$$(x, y) \in \left\{ \begin{array}{l} (25, -30); (1, -6); (36, -30); (1, 5) \\ (36, -6); (25, 5) \end{array} \right\}$$

عكسيا : نلاحظ أن تعويض أي زوج من هذه الأزواج في المعادلة (E) نحصل في النتيجة على الصفر . أي أن كل زوج من هذه الأزواج حل للمعادلة (E) .

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) في \mathbb{Z}^{2*} تتكون من 7 أزواج و هي :

$$(S) = \left\{ \begin{array}{l} (25, -30); (1, -6); (36, -30); (1, 5) \\ (36, -6); (25, 5); (31, -31) \end{array} \right\}$$

التمرين الثالث



ليكن a عددا حقيقيا بحيث : $a^3 + (5+i)a^2 + (10+2i)a + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow (a^3 + 5a^2 + 10a + 8) + i(a^2 + 2a) = 0 + i0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a = 0 \\ a^3 + 5a^2 + 10a + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a+2) = 0 \\ a^3 + 5a^2 + 10a + 8 = 0 \end{cases}$$

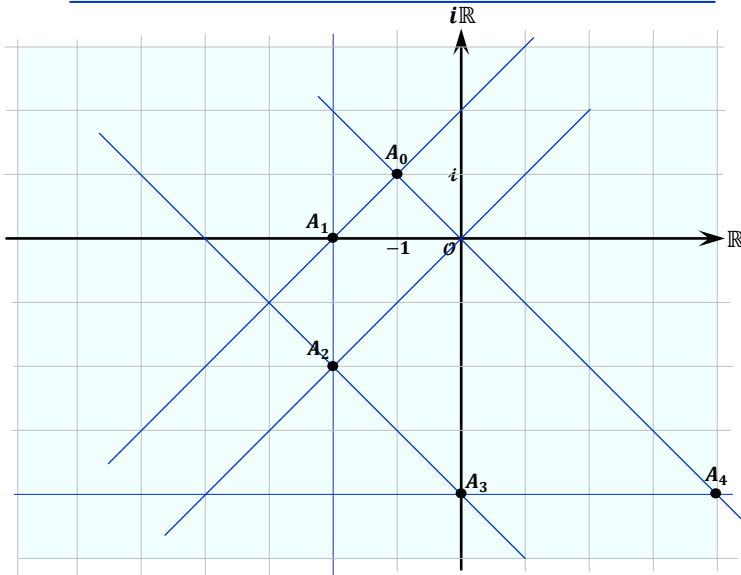
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ ou bien } a = -2 \\ a^3 + 5a^2 + 10a + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ 0^3 + 5(0)^2 + 10(0) + 8 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = -2$$

التمرين الثالث





في البداية نلاحظ أن : $F(M) = M' \Leftrightarrow z' = (1+i)z$
 إذن : $F(A_{n-1}) = A_n \Leftrightarrow z_{A_n} = (1+i)z_{A_{n-1}}$
 $= (1+i)^2 z_{A_{n-2}}$
 $= (1+i)^3 z_{A_{n-3}}$
 \vdots
 $= (1+i)^n z_{A_0}$

تكون النقط O و A_0 و A_n مستقيمة إذا فقط إذا كان العدد $\left(\frac{z_{A_n}-z_0}{z_{A_0}-z_0}\right)$ عددا حقيقيا
 O و A_0 و A_n مستقيمة $\Leftrightarrow \left(\frac{z_{A_n}-z_0}{z_{A_0}-z_0}\right) \in \mathbb{R}$

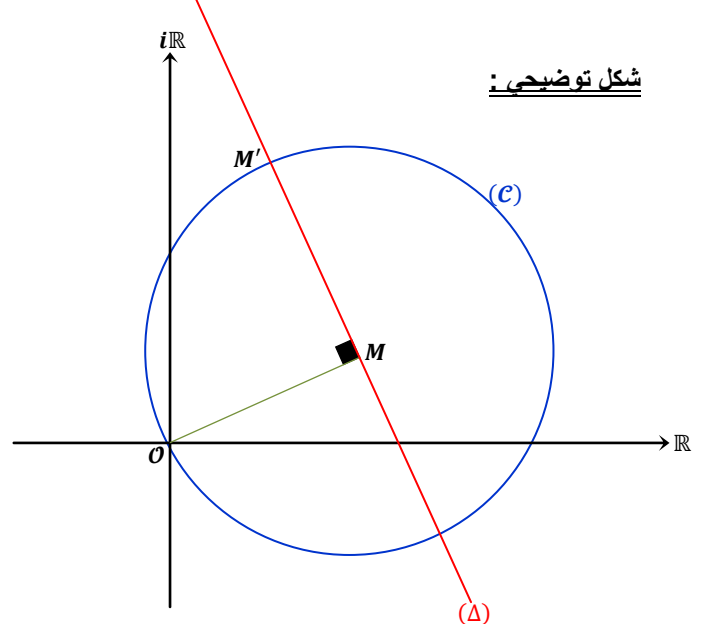
$\Leftrightarrow \left(\frac{z_{A_n}}{z_{A_0}}\right) \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \frac{(1+i)^n z_{A_0}}{z_{A_0}} \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow (1+i)^n \in \mathbb{R} ; z_{A_0} \neq 0$
 $\Leftrightarrow \left(\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \left(2^{\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{in\pi}{4}}\right) \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \frac{n\pi}{4} \equiv 0 \pmod{\pi}$
 $\Leftrightarrow \frac{n\pi}{4} = k\pi ; k \in \mathbb{N}$
 $\Leftrightarrow n = 4k ; k \in \mathbb{N}$
 $\Leftrightarrow n \text{ est un multiple de } 4 \text{ dans } \mathbb{N}$

و بالتالي تكون النقط O و A_0 و A_n مستقيمة إذا فقط إذا كان n مضاعفا لـ 4 في \mathbb{N}

لدينا : $F(M) = M' \Leftrightarrow z' = (1+i)z$
 $\Leftrightarrow z' = z + iz$
 $\Leftrightarrow z' - z = iz$
 $\Leftrightarrow \frac{z' - z}{-z} = -i$
 $\Leftrightarrow \frac{z' - z}{0 - z} = -i \in i\mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z' - z}{0 - z}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - z}{0 - z}\right) \equiv \frac{-\pi}{2} \pmod{2\pi} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} |z_{M'} - z_M| = |z_0 - z_M| \\ \arg\left(\frac{z_{M'} - z_M}{z_0 - z_M}\right) \equiv \frac{-\pi}{2} \pmod{2\pi} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} MM' = MO \\ \arg(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MM'}) \equiv \frac{-\pi}{2} \pmod{2\pi} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow OMM'$ مثلث قائم الزاوية في M و متساوي الساقين رأسه M

طريقة هندسية لإنشاء M' انطلاقا من M .

- في البداية نتوفر على النقطتين O و M .
- نرسم المستقيم (Δ) المار من M و العمودي على (OM) .
- نرسم الدائرة (C) التي مركزها M و شعاعها OM .
- الدائرة (C) تقطع المستقيم (Δ) في نقطتين.
- النقطة M' هي النقطة التي تكون فيها الزاوية $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MM'})$ غير مباشرة.



شكل توضيحي :

تعليل طريقة الإنشاء

يرتكز تعليل هذه الطريقة على التكافؤ التالي :

$F(M) = M' \Leftrightarrow OMM'$ قائم الزاوية في M و متساوي الساقين رأسه M .

و كذلك على النتيجة : $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MM'})$.

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$: (P_n)

من أجل $n = 1$ لدينا : $\frac{2^{1-1}}{1!} = 1 \leq 1$ إذن العبارة (P_1) صحيحة .
ليكن n عنصرا من \mathbb{N}^* ونفترض أن (P_n) صحيحة .

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}^* \\ (P_n) \text{ est vraie} \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n > 0 \\ \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1 \end{array} \right. : \text{لدينا} \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n \geq 1 \\ \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n+1 \geq 2 \\ \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{n+1} \leq 1 \\ \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left(\frac{2}{n+1} \right) \left(\frac{2^{n-1}}{n!} \right) \leq 1 \\ &\Rightarrow \left(\frac{2^{(n+1)-1}}{(n+1)!} \right) \leq 1 \\ &\Rightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie} \end{aligned}$$

و بذلك نحصل على الوضعية الترجعية التالية :

$$\left\{ \begin{array}{l} (P_1) \text{ est vraie} \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; (\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{array} \right.$$

إذن حسب مبدأ التراجع : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; (P_n) \text{ est vraie}$

$$c - \text{à} - d : (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$$

ليكن n عنصرا من \mathbb{N}^* : $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2 \left(\frac{2^{n-1}}{n!} \right) I_n \leq 2 I_n \\ &\Rightarrow \left(\frac{2^n}{n!} \right) I_n \leq 2 I_n \\ &\Rightarrow u_n \leq 2 I_n \leq 2 \left(\frac{e^2}{n+1} \right) \\ &\Rightarrow u_n \leq \left(\frac{2 e^2}{n+1} \right) ; \text{car } I_n \leq \frac{e^2}{n+1} \end{aligned}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \leq \left(\frac{2 e^2}{n+1} \right) : \text{إذن}$$

ليكن n عنصرا من \mathbb{N}^* . سوف نستعمل في هذا السؤال تقنية المكاملة بالأجزاء .

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{u'} \cdot \frac{e^{2x}}{v} dx \\ &= \left[\frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1} e^{2x} \right]_0^1 + \frac{2}{n+1} \int_0^1 (1-x)^{n+1} \cdot e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{n+1} + \left(\frac{2}{n+1} \right) I_{n+1} \end{aligned}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; I_n = \frac{1}{n+1} + \left(\frac{2}{n+1} \right) I_{n+1} : \text{إذن}$$

نضرب الطرفين في $(n+1)$ نجد : $(n+1) I_n = 1 + 2 I_{n+1}$
أي : $2 I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$ (*)

لدينا : $x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0 \leq (1-x) \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq (1-x)^{n+1} \leq 1 ; \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &\Rightarrow 0 \leq (1-x)^{n+1} e^{2x} \leq e^{2x} ; \text{car } e^{2x} > 0 \\ &\Rightarrow \int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{2x} dx \leq \int_0^1 e^{2x} dx \\ &\text{car ces fonctions sont continues et } 0 < 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 \\ &\Rightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &\Rightarrow 0 \leq \left(\frac{n+1}{2} \right) I_n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \text{ selon } (*) \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \left(\frac{n+1}{2} \right) I_n \leq \frac{e^2}{2} ; \text{Ajout de } \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{n+1} \right) \leq I_n \leq \left(\frac{e^2}{n+1} \right) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \left(\frac{1}{n+1} \right) \leq I_n \leq \left(\frac{e^2}{n+1} \right) (**)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^2}{n+1} \right) = 0 \text{ لدينا}$$

$$\left(\frac{1}{n+1} \right) \leq I_n \leq \left(\frac{e^2}{n+1} \right) : \text{إذن التأيير } (**)$$

0

0

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نكتب : $\lim_{n \rightarrow \infty} (I_n) = 0$

و لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2 I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2 I_{n+1} = n I_n + I_n - 1$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n I_n = 2 I_{n+1} - I_n + 1$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n I_n) &= 2 \lim_{m \rightarrow \infty} (I_m) - \lim_{n \rightarrow \infty} (I_n) + 1 \\ &= 2 \times 0 - 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

لنحسب الآن I_1 ثم u_1 لدينا : $I_n = \int_0^1 (1-x) e^{2x} dx$

$$= \int_0^1 e^{2x} dx - \int_0^1 \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{v'} dx$$

$$= \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \left(\left[\frac{x e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx \right)$$

$$= \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{x e^{2x}}{2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{3}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{x e^{2x}}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{e^2}{2}$$

$$= \frac{3e^2}{4} - \frac{3}{4} - \frac{e^2}{2} = \left(\frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} \right)$$

ومنه : $u_1 = \left(\frac{2^1}{1!} \right) I_1 = 2 \left(\frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} \right) = \left(\frac{e^2}{2} - \frac{6}{4} \right)$

وبالتالي : $u_n = \frac{e^2}{2} - \frac{6}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{2^k}{k!} \right)$

$$= \frac{1}{2} \left(e^2 - 3 - \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{2^k}{k!} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^2 - 1 - 2 - \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{2^k}{k!} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^2 - \frac{2^0}{0!} - \frac{2^1}{1!} - \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{2^k}{k!} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2^k}{k!} \right) \right)$$

وبالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2^k}{k!} \right) \right)$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2^k}{k!} \right) = (e^2 - 2u_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2^k}{k!} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^2 - 2u_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2^k}{k!} \right) \right) = e^2$$

وبالتالي : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2^k}{k!} \right) \right) = e^2$

Normalement on écrit $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^k}{k!} \right) = e^2$

et vous aurez l'occasion d'étudier ce genre d'objets mathématiques qu'on appellera Séries numériques à terme général u_n

et qu'on va noter $\sum u_n$

التمرين الرابع

3

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; I_n \geq \frac{1}{n+1} > 0$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \left(\frac{2^n}{n!} \right) I_n > 0$

أي : $(1) (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n > 0$

ونعلم أن : $(2) (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n > \frac{2e^2}{n+1}$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < u_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$

ولدينا : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2e^2}{n+1} \right) = 0$

إذن نحصل على الوضعية التالية : $0 < u_n \leq \left(\frac{2e^2}{n+1} \right)$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0$

التمرين الرابع

4

ليكن n عنصرا من \mathbb{N}^* . لدينا : $u_{n+1} = \left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \right) I_{n+1}$

$$= \left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \right) \left(\left(\frac{n+1}{2} \right) I_n - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{2^n}{n!} \right) I_n - \frac{2^n}{(n+1)!}$$

$$= u_n - \frac{2^n}{(n+1)!}$$

التمرين الرابع

4

لدينا : $(\forall m \in \mathbb{N}^*) ; u_{m+1} = u_m - \frac{2^m}{(m+1)!}$

إذن :

$$(m=1) \Rightarrow u_2 = u_1 - \frac{2^1}{2!}$$

$$(m=2) \Rightarrow u_3 = u_2 - \frac{2^2}{3!}$$

$$(m=3) \Rightarrow u_4 = u_3 - \frac{2^3}{4!}$$

$$\vdots$$

$$(m=n-1) \Rightarrow u_n = u_{n-1} - \frac{2^{n-1}}{n!}$$

نجمع هذه المتساويات طرفا طرفا نجد :

$$(u_2 + \dots + u_{n-1}) + u_n = u_1 + (u_2 + \dots + u_{n-1}) - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{2^p}{(p+1)!}$$

$$\Leftrightarrow u_n = u_1 - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{2^p}{(p+1)!}$$

$$\Leftrightarrow u_n = u_1 - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{2^{p+1}}{2(p+1)!}$$

$$\Leftrightarrow u_n = u_1 - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \left(\frac{2^k}{k!} \right) ; p+1 = k$$

لدينا : $f(x) = \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}$; $(\forall x > 0)$

و لدينا \ln دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* .
و كذلك الدالة $(1+x^2)^2 \rightarrow x$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^*
لأنها حدودية من الدرجة 4 .

و كذلك : $(1+x^2)^2 \neq 0$; $(\forall x > 0)$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ لأنها عبارة عن خارج
دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و المقام لا ينعدم .

ليكن x عنصرا من المجال $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}(1+x^2)^2 - (2(1+x^2)(2x)) \ln x}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 4x \ln x}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{\frac{1}{x} + x - 4x \ln x}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{x \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 4 \ln x \right)}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{x g(x)}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

إذن : $f'(x) = \frac{x g(x)}{(1+x^2)^3}$; $(\forall x > 0)$

ليكن x عنصرا من المجال $]0, +\infty[$.

لدينا : $f'(x) = \frac{x g(x)}{(1+x^2)^3}$; $(\forall x > 0)$

نلاحظ أن : $\frac{x}{(1+x^2)^3} > 0$; $(\forall x > 0)$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $g(x)$ على المجال $]0, +\infty[$.
لنحسب الآن نهايتي f عند 0^+ و $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} : \text{لدينا} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{(1+x^2)^2} \right) \times \frac{x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) \times \left(\frac{x}{(1+x^2)^2} \right) \\ &= 0 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} : \text{و لدينا} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{(1+x^2)^2} \right) \times \ln x \\ &= 1 \times (-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

لنبين الآن أن : $f(\alpha) = \frac{1}{4\alpha^2(1+\alpha^2)}$

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2} + 1 - 4 \ln \alpha = 0 : \text{لدينا} \\ &\Leftrightarrow \frac{1+\alpha^2}{\alpha^2} = 4 \ln \alpha \\ &\Leftrightarrow \frac{1+\alpha^2}{4\alpha^2} = \ln \alpha \end{aligned}$$

في البداية نلاحظ أن الدالة g متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال
 $]0, +\infty[$ لأنها عبارة عن مجموع دوال متصلة و قابلة للاشتقاق
على $]0, +\infty[$.

ليكن x عنصرا من المجال $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } g'(x) &= (x^{-2})' - \frac{4}{x} = -2x^{-3} - \frac{4}{x} \\ &= \frac{-2}{x^3} - \frac{4}{x} = \frac{-(4x^2 + 2)}{x^3} \\ &= \frac{-2}{x^3} (2x^2 + 1) < 0 \end{aligned}$$

نلاحظ أن : $g'(x) < 0$; $(\forall x > 0)$

إذن g دالة تناقصية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$.

لدينا g دالة متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$.

إذن g تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو $]0, +\infty[$.

و لدينا : $g(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right[$

و لدينا كذلك : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 4 \ln x \right) = -\infty$

و لدينا كذلك : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 4 \ln x \right) = +\infty$

إذن g تقابل من $]0, +\infty[$ نحو $]-\infty ; +\infty[$.

أي أن كل عنصر من \mathbb{R} يقبل سابقاً وحيداً من $]0, +\infty[$ بالدالة g .

أي : $(\forall y \in \mathbb{R}), (\exists! x \in]0, +\infty[) : g(x) = y$

بما أن $0 \in \mathbb{R}$ فإن الصفر يمتلك سابقاً وحيداً α في المجال $]0, +\infty[$ بالتقابل
يعني : $g(\alpha) = 0$; $(\exists! \alpha > 0)$

أو بتعبير آخر المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0, +\infty[$.
لنبين الآن أن : $1 < \alpha < 2$.

من أجل ذلك نحسب أولاً $g(1)$ و $g(2)$.

$$\begin{cases} g(1) = \frac{1}{1^2} + 1 - 4 \ln 1 = 1 + 1 - 0 = 2 \\ g(2) = \frac{1}{2^2} + 1 - 4 \ln 2 \approx -1,5 \end{cases}$$

نلاحظ أن : $-1,5 < 0 < 2$ أي : $g(2) < g(\alpha) < g(1)$

نُدخل الدالة التناقصية قطعاً g^{-1} على هذه الأعداد المنتمية إلى \mathbb{R} نجد :

$$g^{-1}(g(2)) > g^{-1}(g(\alpha)) > g^{-1}(g(1))$$

أي : $2 > \alpha > 1$

ليكن x عنصراً من المجال $]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$ و نُفصل بين حالتين :

$$\begin{aligned} x \in]0, \alpha] &\Rightarrow x \leq \alpha \\ &\Rightarrow g(x) \geq g(\alpha) ; \text{car } g \text{ est } \searrow \\ &\Rightarrow g(x) \geq 0 ; \text{car } g(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

إذن : $\forall x \in]0, \alpha] ; g(x) \geq 0$

$$\begin{aligned} x \in [\alpha, +\infty[&\Rightarrow x \geq \alpha \\ &\Rightarrow g(x) \leq g(\alpha) ; \text{car } g \text{ est } \searrow \\ &\Rightarrow g(x) \leq 0 ; \text{car } g(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

إذن : $\forall x \in [\alpha, +\infty[; g(x) \leq 0$

التمرين الخامس

3 I

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعاً. لدينا: $\ln x \leq x - 1$
نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $\frac{1}{(1+x^2)^2}$

نحصل على: $\frac{\ln x}{(1+x^2)^2} \leq \frac{x-1}{(1+x^2)^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{4}(x-1) \leq \frac{x-1}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{4}(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{4}(x-1) \leq (x-1) \left(\frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{4}(x-1) \leq (x-1) \left(\frac{4 - (1+x^2)^2}{(1+x^2)^2} \right)$$

التمرين الخامس

3 I

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) و المماس (T)
ندرس إشارة الفرق $f(x) - \frac{1}{4}(x-1)$.

$$f(x) - \frac{1}{4}(x-1) = (x-1) \left(\frac{4 - (1+x^2)^2}{(1+x^2)^2} \right)$$

$$= \frac{(x-1)(2-1-x^2)(2+1+x^2)}{4(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(1-x^2)(3+x^2)}{4(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-(x-1)(x-1)(1+x)(3+x^2)}{4(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-(x-1)^2(1+x)(3+x^2)}{4(1+x^2)^2} < 0$$

لأنه نلاحظ أن: $(\forall x > 0) ; \begin{cases} (x-1)^2 > 0 \\ (1+x) > 0 \\ (3+x^2) > 0 \\ 4(1+x^2)^2 > 0 \end{cases}$

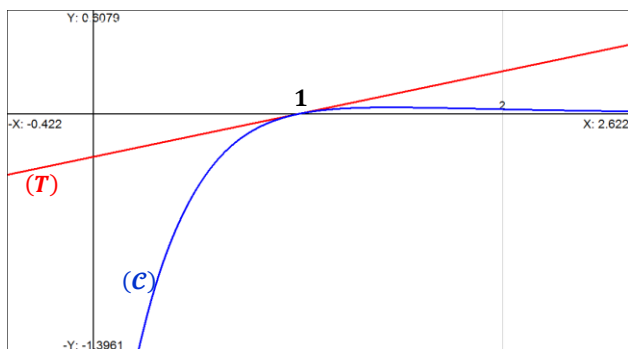
إذن: $(\forall x > 0) ; f(x) - \frac{1}{4}(x-1) < 0$

أي: $(\forall x > 0) ; f(x) < \frac{1}{4}(x-1)$

و هذا يعني أنه على المجال المنحنى يوجد دائماً أسفل المماس.

التمرين الخامس

4 I



$$f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{(1+\alpha^2)^2} = (\ln \alpha) \left(\frac{1}{(1+\alpha^2)^2} \right)$$

$$= \left(\frac{1+\alpha^2}{4\alpha^2} \right) \left(\frac{1}{(1+\alpha^2)^2} \right) = \frac{1}{4\alpha^2(1+\alpha^2)}$$

من هذه النتائج نستنتج جدول تغيرات الدالة كما يلي:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

التمرين الخامس

3 I

ليكن (T) المماس للمنحنى (C) في النقطة ذات الأضلاع 1.
إذن: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

ولدينا: $f'(1) = \frac{1g(1)}{(1+1^2)^3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

وكذلك: $f(1) = \frac{\ln 1}{(1+1^2)^2} = 0$

إذن: $(y) : y = \frac{1}{4}(x-1)$

التمرين الخامس

3 I

لنبين أن: $\ln x \leq x - 1$; $(\forall x > 0)$

من أجل ذلك نعتبر الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي:

$$\varphi(x) = \ln x - x + 1$$

φ دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ لأنها مجموع دوال متصلة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.

ولدينا: $(\forall x > 0) ; \varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

- إذا كان: $x = 1$: فإن: $\varphi'(x) = 0$
- إذا كان: $x > 1$: فإن: $\varphi'(x) < 0$
- إذا كان: $x < 1$: فإن: $\varphi'(x) > 0$

ولدينا: $\varphi(1) = 0$

وكذلك: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x + 1) = -\infty$

وكذلك: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x + 1) = -\infty$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= (+\infty)(0 - 1 + 0) = -\infty$$

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	0	-
φ	$-\infty$	0	$-\infty$

من خلال هذا الجدول نلاحظ أن φ تقبل مطرافاً عند النقطة ذات الأضلاع 1 وهذا المطراف عبارة عن قيمة قصوية 0. وذلك لأن $\varphi'(x)$ تتعدم في 1 وتتغير إشارتها بجوار تلك النقطة.

إذن: $(\forall x \in]0, +\infty[) ; \varphi(x) \leq 0$

أي: $(\forall x \in]0, +\infty[) ; \ln x - x + 1 \leq 0$

أي: $(\forall x > 0) ; \ln x \leq x - 1$

تذكير: إذا كانت f دالة متصلة على مجال I وكان a عنصرا من I

$$F : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{فإن الدالة}$$

$$x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال I والتي تنعدم في a .
لدينا f متصلة على المجال $]0, +\infty[$ وليكن a عنصرا من $]0, +\infty[$

$$\psi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{إذن الدالة}$$

$$x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال $]0, +\infty[$ والتي تنعدم في a .
يعني: $\psi(a) = 0$ و $\psi'(x) = f(x)$; $\forall x \in]0, +\infty[$

$$\text{لدينا } (\forall x > 0) ; F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x f(t) dt$$

$$= \int_{\frac{1}{x}}^a f(t) dt + \int_a^x f(t) dt$$

$$= - \int_a^{\frac{1}{x}} f(t) dt + \int_a^x f(t) dt$$

$$= -\psi\left(\frac{1}{x}\right) + \psi(x)$$

لدينا $x \rightarrow \frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_*^+ و ψ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_*^+
 $\psi(\mathbb{R}_*^+) \subseteq \mathbb{R}_*^+$ و $x \rightarrow \psi\left(\frac{1}{x}\right)$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_*^+
ومنه الدالة $(x) = -\psi\left(\frac{1}{x}\right) + \psi(x)$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_*^+ .
لأنها عبارة عن مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}_*^+ .

ليكن x عنصرا من المجال $]0, +\infty[$.
لدينا: $F'(x) = \left(\psi(x) - \psi\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \psi'(x) - \left(\psi\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$

$$= \psi'(x) - \left(\frac{1}{x}\right)' \psi'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= f(x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{x^2} \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)^2}\right)$$

$$= \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{x^2} (-\ln x) \left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right)$$

$$= \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} - \frac{x^2 \ln x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{(1-x^2) \ln x}{(1+x^2)^2}$$

أسهل طريقة للإجابة على هذا السؤال هي أن نشق الطرف الأيمن
و نبين أنه يساوي بالضبط $F'(x)$.
ليكن x عنصرا من المجال $]0, +\infty[$.

$$\frac{1}{2} \left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \text{Arctan}(x) \right)' + \left(\frac{x \ln x}{1+x^2} \right)'$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) + \frac{(x \ln x)'(1+x^2) - 2x(x \ln x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-x^2}{x^2(x^2+1)} - \frac{1}{1+x^2} \right) + \frac{(1+\ln x)(1+x^2) - 2x^2 \ln x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{x^2+1} - \frac{1}{1+x^2} \right) + \frac{\ln x - x^2 \ln x + x^2 + 1}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{x^2+1} - \frac{1}{1+x^2} \right) + \frac{(1-x^2) \ln x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{-1}{1+x^2} + \frac{(1-x^2) \ln x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{(1-x^2) \ln x}{(1+x^2)^2} = F'(x)$$

نستنتج أن: $F'(x) = \left(\frac{1}{2} \left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \text{Arctan}(x) \right) + \frac{x \ln x}{1+x^2} \right)'$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \text{Arctan}(x) \right) + \frac{x \ln x}{1+x^2} \quad \text{إذن}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Arctan}(x) = 0 & \text{تذكير بنهايات الدالة Arctan} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \text{Arctan}(x) \right) + \frac{x \ln x}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + \left(\frac{0}{1+0} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \text{Arctan}(x) \right) + \frac{x \ln x}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(0 - \frac{\pi}{2} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(0 - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{0}{0+1} = \frac{-\pi}{4}$$

$$(\forall x > 0) ; F'(x) = \frac{(1-x)(1+x) \ln x}{(1+x^2)^2} \quad \text{لدينا}$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة F كما يلي:

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+
$1-x$	+	0	-
$F'(x)$	-	0	-
F	$\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{-\pi}{4}$

أسهل طريقة للإجابة على هذا السؤال هي أن نشق الطرف الأيمن
و نبين أنه يساوي بالضبط $F'(x)$.
ليكن x عنصرا من المجال $]0, +\infty[$.

$$\frac{1}{2} \left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \text{Arctan}(x) \right)' + \left(\frac{x \ln x}{1+x^2} \right)'$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) + \frac{(x \ln x)'(1+x^2) - 2x(x \ln x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-x^2}{x^2(x^2+1)} - \frac{1}{1+x^2} \right) + \frac{(1+\ln x)(1+x^2) - 2x^2 \ln x}{(1+x^2)^2}$$

أجوبة امتحان مدينة إنزغان 2007

التصميم الأول

1

الخاصية التي سوف نستعملها في الجواب هي الآتية .
إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا غير أولي و أكبر من 2 فإنه يوجد عدد أولي موجب p يقسم n . و حيث $2 \leq n$
أو بتعبير آخر : إذا كانت جميع الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي n لا تقسم n فإن n عدد أولي .
في هذا السؤال : لدينا جميع الأعداد التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 2003 هي 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 23 و 29 و 31 و 37 و 41 و 43 و نلاحظ باستعمال الآلة الحاسبة أنه لا أحد من هذه الأعداد يقسم 2003 إذن العدد 2003 عدد أولي .

التصميم الأول

2

نحل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $123x + 2003y = 1$: (E) .
في البداية يجب تحديد $2003 \wedge 123$.
و هذا سهل في هذه الحالة لأن 2003 عدد أولي و أكبر من 123 .
إذن : $2003 \wedge 123 = 1$
و منه نستنتج أن المعادلة (E) قابلة للحل في \mathbb{Z}^2 .
نحتاج الآن إلى إيجاد حل خاص للمعادلة (E) .
و ذلك بالإستعانة بالقسمات المتتالية في خوارزمية أقليدس.

$$2003 \begin{array}{l} 123 \\ 35 \end{array} \begin{array}{l} 123 \\ 16 \end{array} \Rightarrow 35 = 2003 - 16 \times 123 \quad (1)$$

$$123 \begin{array}{l} 35 \\ 18 \end{array} \begin{array}{l} 35 \\ 3 \end{array} \Rightarrow 18 = 123 - 3 \times 35 \quad (2)$$

$$35 \begin{array}{l} 18 \\ 17 \end{array} \begin{array}{l} 18 \\ 1 \end{array} \Rightarrow 17 = 35 - 18 \quad (3)$$

$$18 \begin{array}{l} 17 \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} 17 \\ 1 \end{array} \Rightarrow 1 = 18 - 17 \quad (4)$$

$$17 \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 17 \end{array} \Rightarrow \text{you're gonna stop right now}$$

لدينا : ————— : d' après (4)
 $1 = 18 - 17$; d' après (3)
 $= 18 - (35 - 18)$; d' après (3)
 $= 2 \times 18 - 35$; *Simplification*
 $= 2(123 - 3 \times 35) - 35$; d' après (2)
 $= 2 \times 123 - 7 \times 35$; *Simplification*
 $= 2 \times 123 - 7(2003 - 16 \times 123)$; d' après (1)
 $= 114 \times 123 - 7 \times 2003$; *Simplification*
 $= 123(114) + 2003(-7) = 1$; *Bingo!!!*

و هذا يعني أن الزوج $(114, -7)$ حل خاص للمعادلة (E) .
ليكن (x, y) الحل العام للمعادلة (E) .
و نطلق من النظمة التالية .
{ (x, y) est solution de (E) }
{ $(114, -7)$ est solution de (E) }

التي تُصبح :
{ $123x + 2003y = 1$ }
{ $123(114) + 2003(-7) = 1$ }

ننجز عملية الطرح بين هاتين المتساويتين فنحصل على :
 $123(x - 114) + 2003(y + 7) = 0$

$$\text{أي : } 2003(y + 7) = 123(114 - x) \quad (*)$$

و نستنتج من هذه الكتابة أن 123 يقسم الجداء $2003(y + 7)$.
و بما أن : $2003 \wedge 123 = 1$
فإنه حسب *Gauss* نستنتج أن العدد 123 يقسم العامل $(y + 7)$.
و يوجد بذلك k من \mathbb{Z} حيث $y + 7 = 123k$

أي : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; y = 123k - 7$

نعوض y بـ $(123k - 7)$ في النتيجة (*) نجد :

$$2003(123k) = 123(114 - x)$$

$$\text{أي : } x = -2003k + 114$$

و بذلك نستنتج أنه إذا كان (x, y) حلا للمعادلة (E) .

فإنه بالضرورة سوف يكون مكتوبا على الشكل :
 $(-2003k + 114 ; 123k - 7) ; k \in \mathbb{Z}$

لنبين الآن أن جميع الأزواج (x, y) من \mathbb{Z}^2 المكتوبة على شكل :

$(-2003k + 114 ; 123k - 7)$ هي حلول للمعادلة (E) .

لدينا : $123(-2003k + 114) + 2003(123k - 7)$

$$= -246369k + 14022 + 24636k - 14021$$

$$= 14022 - 14021$$

$$= 1$$

إذن كل زوج من \mathbb{Z}^2 مكتوب على شكل

$(-2003k + 114 ; 123k - 7)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ هو حل للمعادلة (E) .

خلاصة : S مجموعة حلول المعادلة (E) معرفة بإدراك بما يلي :

$$S = \{ (-2003k + 114 ; 123k - 7) ; k \in \mathbb{Z} \}$$

التصميم الأول

2

ليكن k_0 عددا صحيحا حيث $123k_0 \equiv 1 [2003]$

إذن نستنتج أن 2003 يقسم العدد $(123k_0 - 1)$.

يوجد إذن k' من \mathbb{Z} حيث $123k_0 - 1 = 2003k'$

$$\text{أي : } 123k_0 - 2003k' = 1$$

أي : $123k_0 + 2003k_1 = 1$ مع $k_1 = -k'$

و هذا يعني أن الزوج (k_0, k_1) حل للمعادلة (E) .

هذا الزوج إذن يُكتب على شكل :

$$k \in \mathbb{Z} \text{ حيث } (k_0, k_1) = (-2003k + 114 ; 123k - 7)$$

لكي يكون العدد $-2003k + 114$ صحيحا طبيعيا نختار لـ k قيمة

سالبة أو منعدمة . و أصغر قيمة عددية موجبة للتعبير $-2003k + 114$

نحصل عليها عندما نختار $k = 0$.

إذن إذا كان $k = 0$ فإن $k_0 = 114$.

التصميم الأول

2

ليكن x عددا نسبيا حيث $x \equiv 456k_0 [2003]$

نلاحظ أن : $456 = 4 \times 114 = 4k_0$

إذن : $x \equiv 4k_0^2 [2003]$

نضرب طرفي هذه المتوافقة في العدد 123 نجد :

$$(1) \quad 123x \equiv 123 \cdot 4 \cdot k_0^2 [2003]$$

من جهة أخرى لدينا : $123k_0 \equiv 1 [2003]$

نضرب طرفي هذه المتوافقة في $4k_0$ نحصل على :

$$(2) \quad 123 \cdot 4 \cdot k_0^2 \equiv 4k_0 [2003]$$

و نعلم أن علاقة " يوافق بتريديد " متعدية (لأنها علاقة تكافؤ)

إذن من (1) و (2) نستنتج أن : $123x \equiv 4k_0 [2003]$

و بما أن : $4k_0 = 4 \times 114 = 456$

فإن : $123x \equiv 456 [2003]$

و بذلك نكون قد بينا الإستلزام التالي : $(x \in \mathbb{Z})$

$$x \equiv 456k_0 [2003] \Rightarrow 123x \equiv 456 [2003] \quad (*)$$

من أجل الإستلزام الآخر نعتبر $x \in \mathbb{Z}$ حيث $123x \equiv 456 [2003]$

لدينا : $123k_0 \equiv 1 [2003]$

نضرب طرفي هذه المتوافقة في $4k_0 = 456$ نجد :

$$(4) \quad 4 \cdot 123 \cdot k_0^2 \equiv 456 [2003]$$

و نعلم أن علاقة " يوافق بتريديد " متعدية . (لأنها علاقة تكافؤ)

إذن من (3) و (4) نستنتج أن : $123 \equiv 123 \cdot 4 \cdot k_0^2 [2003]$

و في هذه المتوافقة نستطيع أن نختزل بالعدد 123 لأنه أولي مع 2003

و ذلك حسب : (مبرهنة *Gauss*)

التمرين الثاني

1 2

ليكن z عددا عقديا مخالفا لـ -1 و 0 و 1 .
 نفترض أن $M = N$. إذن: $aff(N) = aff(M)$.
 أي: أي $z^2 = z$. أي: $z^2 - z = 0$.
 أي: أي $z(z-1) = 0$. أي: $z = 0$ أو $z = 1$.
 وهذا تناقض لأن $z \neq 0$ و $z \neq 1$.
 إذن ما افترضناه كان خاطئا.
 إذن: $M \neq N$.
 لدينا $z^2 \neq z$ إذن $(z^2)^2 \neq z^2$.
 أي $z^4 \neq z^2$. أي $P \neq N$.
 نفترض الآن أن $M = P$.
 إذن $z^4 = z$. أي: $z(z^3 - 1) = 0$.
 ومنه $z^3 - 1 = 0$ لأن $z \neq 0$.
 يعني أن: $(z-1)(z^2 + z + 1) = 0$.
 ومنه $z^2 + z + 1 = 0$ لأن $z \neq 1$.
 ولدينا $z \neq -1$ أي $z + 1 \neq 0$.
 وكذلك $z \neq 0$ أي $z^2 \neq 0$.
 ومنهما نستنتج أن: $z^2 + z + 1 \neq 0$.
 إذن العبارة $(z^2 + z + 1) = 0$ تناقض واضح.
 يعني أن ما افترضناه كان خاطئا.
 إذن: $M \neq P$.
 إذن النقط M و N و P مختلفة مثلي مثلي.

التمرين الثاني

1 2

نضع $z = x + iy$ حيث x و y عدنان حقيقيان.

$$MNP \text{ قائم الزاوية في } N \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{(NM, NP)} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ M \neq N \neq P \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \arg\left(\frac{z_P - z_N}{z_M - z_N}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ z_M \neq z_N \neq z_P \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{z_P - z_N}{z_M - z_N}\right) \in i\mathbb{R} \\ z_M \neq z_N \neq z_P \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{z^4 - z^2}{z - z^2}\right) \in i\mathbb{R} \\ z \notin \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(z^2 - z)(z^2 + z)}{(z - z^2)} \in i\mathbb{R} \\ z \notin \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

نختزل بالعدد المنعدم $(z^2 - z)$ فنحصل على:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(z^2 + z) \in i\mathbb{R} \\ z \notin \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (z^2 + z) \in i\mathbb{R} \\ z \notin \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ((x + iy)^2 + (x + iy)) \in i\mathbb{R} \\ (x + iy) \notin \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y) \in i\mathbb{R} \\ (x, y) \notin \{(-1, 0); (0, 0); (1, 0)\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ y(2x + 1) \neq 0 \\ (x, y) \notin \{(-1, 0); (0, 0); (1, 0)\} \end{cases}$$

من (1) و (2) نستنتج أن: $ax \equiv b [2003]$

إذن المعادلة $ax \equiv [2003]$ هي كذلك تقبل حلا وحيدا x من المجموعة $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2002\}$.

أو بتعبير آخر، يوجد عدد صحيح طبيعي وحيد x .

بحيث $mb \equiv x [2003]$ و $1 \leq x < 2003$.

التمرين الأول

1 3

رأينا من خلال السؤال السابق أن:

$$\begin{cases} \forall a \in \{1, 2, \dots, 2002\} \\ \forall b \neq 0 [2003] \\ \exists! x \in \{1, 2, \dots, 2002\} \end{cases} ; ax \equiv b [2003]$$

من أجل $b = 1$ نحصل على ما يلي:

$$\begin{cases} \forall y \in \{1, 2, \dots, 2002\} \\ \exists! x \in \{1, 2, \dots, 2002\} \end{cases} ; xy \equiv 1 [2003]$$

أو بتعبير آخر، كل عنصر من $\{1, 2, \dots, 2002\}$ يقبل مقلوبا وحيدا من $\{1, 2, \dots, 2002\}$ بالضرب التوافقي بترديد 2003.

و هذا يعني أن التطبيق f المعروف بما يلي:

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, \dots, 2002\} &\rightarrow \{1, 2, \dots, 2002\} \\ x &\rightarrow y \\ xy &\equiv 1 [2003] \end{aligned}$$

f تطبيق تقابلي من $\{1, 2, \dots, 2002\}$ نحو $\{1, 2, \dots, 2002\}$.
 المتوافقة $xy \equiv 1 [2003]$ حيث x و y عنصرين من $\{1, 2, \dots, 2002\}$. هي في الحقيقة 2002 متوافقة.

و عند المرور إلى الجداء بين جميع أطراف هذه المتوافقات الألفي و متوافقة نحصل على ما يلي: $[2003] \equiv 1 (1 \times 2 \times \dots \times 2002)^2$

أي: $[2003] \equiv 1 (2002!)^2$

إضافات: عندما نغير معطيات التمرين و الاشتغال بعدد أولي p عوض

2003 سوف نحصل على النتيجة التالية: $[p] \equiv 1 ((p-1)!)^2$

أي p يقسم $((p-1)!)^2 - 1$.

أي p يقسم $((p-1)! - 1)((p-1)! + 1)$.

أي أن p يقسم التعبير $(p-1)! + 1$ أو $(p-1)! - 1$ لأن p عدد أولي.

عندما نفترض أن p يقسم $(p-1)! - 1$ نحصل على تناقض.

إذن p يقسم $(p-1)! + 1$.

ومنه: $[p] \equiv 0 (p-1)! + 1$.

و هذه المبرهنة تسمى: (Théorème de wilson)

$$p \text{ عدد أولي} \Leftrightarrow [p] \equiv 0 (p-1)! + 1$$

التمرين الثاني

1

$$MNP \text{ قائم الزاوية في } N \Leftrightarrow \overline{(NM, NP)} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_P - z_N}{z_M - z_N}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_P - z_N}{z_M - z_N} \in (i\mathbb{R})^*$$

$$\Leftrightarrow \frac{p-n}{m-n} \in (i\mathbb{R})^*$$

$$\Leftrightarrow i \left(\frac{p-n}{m-n}\right) \in \mathbb{R}^*$$

التمرين الثالث

1

توجد طريقتان لإنجاز ذلك :

الطريقة الأولى : استعمال تعريف الزمرة و تبين أن :

- E مجموعة غير فارغة
- + قانون تركيب داخلي في E
- + تبادلي و تجميعي في E
- + يقبل عنصرا محايدا وحيدا في E
- كل عنصر x يقبل ماثلا وحيدا x من E

الطريقة الثانية : استعمال مفهوم الزمرة الجزئية .

لتبين أن $(E, +)$ زمرة جزئية من الزمرة الأم $(M_2(\mathbb{R}), +)$ و من أجل ذلك يكفي أن تبين أن E جزء غير فارغ من $M_2(\mathbb{R})$:

$$\bullet \quad \begin{cases} \forall M(a,b) \in E \\ \forall M(c,d) \in E ; M(a,b) - M(c,d) \in E \end{cases} \text{ و}$$

من الواضح أن E جزء من $M_2(\mathbb{R})$ لأنها تضم مصفوفات مربعة من الرتبة 2 و ذات معاملات حقيقية . و هي مجموعة غير فارغة لأننا نستطيع رصد عنصر واحد على الأقل من E و هي المصفوفة $M(1,0) = I$. لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E .

$$\text{لدينا : } \begin{aligned} M(a,b) - M(c,d) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & -d \\ 3d & c-2d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a-c & -(b-d) \\ 3(b-d) & (a-c)-2(b-d) \end{pmatrix} \\ &= M((a-c) ; (b-d)) \in E \end{aligned}$$

لأن $(a-c)$ و $(b-d)$ عدنان حقيقيان . و بالتالي $(E, +)$ زمرة تبادلية لأنها زمرة جزئية من الزمرة التبادلية الأم $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

التمرين الثالث

أ

2

لتكن a و b و c و d أربعة أعداد حقيقية :

$$\begin{aligned} M(a,b) \times M(c,d) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -d \\ 3d & c-2d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac-3bd & -ad-b(a-2d) \\ 3bc+3d(a-2b) & -3bd+(a-2b)(c-2d) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ac-3bd) & -(ad+ab+2bd) \\ 3(ad+ab+2bd) & (ac-3bd)-2(ad+ab+2bd) \end{pmatrix} \\ &= M(ac-3bd ; ad+bc-2bd) \in E \end{aligned}$$

لأن $(ac-3bd)$ و $(ad+bc-2bd)$ عدنان حقيقيان .

التمرين الثالث

ب

2

تكون $(E, +, \times)$ حلقة إذا فقط إذا كان :

- $(E, +)$ زمرة تبادلية .
- القانون \times تجميعي في (E, \times) .
- القانون \times توزيعي بالنسبة للقانون + .

حصلنا من خلال ما سبق على أن $(E, +)$ زمرة تبادلية .

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ و $M(e,f)$ ثلاث مصفوفات من E .

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } M(a,b) \times (M(c,d) \times M(e,f)) &= M(a,b) \times M(ce-3df ; cf+de-2df) \\ &= M(a(ce-3df) - \\ &\quad -3b(cf+de-2df) ; a(cf+ \\ &\quad +de-2df) + b(ce-3df) - \\ &\quad -2b(cf+de-2df)) \\ &= M(ace-3(adf+bcf+bde+ \\ &\quad + bdf) ; acf+ade+ \\ &\quad + bce+ bdf - \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ (x,y) \neq \left(\frac{-1}{2}; 0\right) \\ (x,y) \notin \{(-1,0); (0,0); (1,0)\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ (x,y) \notin \{(-1,0); (0,0)\} \end{cases}$$

لاحظ أن النقطتان $(0,0)$ و $(-1,0)$ تُحققان الشرط $x^2 - y^2 + x = 0$

و النقطتان $\left(\frac{-1}{2}; 0\right)$ و $(1,0)$ لا تحققانه .

إذن يكون المثلث MNP قائم الزاوية في N ،

إذا و فقط إذا كانت النقطة $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ تنتمي إلى المنحنى (Γ) ذو المعادلة التالية :

$x^2 - y^2 + x = 0$ محروم من النقطتين $O(0,0)$ و $A(-1,0)$.

التمرين الثاني

ج

2

$$\begin{aligned} (\Gamma) &= \left\{ M(x,y) ; x^2 - y^2 + x = 0 ; \begin{cases} (x,y) \neq (0,0) \\ (x,y) \neq (-1,0) \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ M(x,y) ; (x^2 + x) - y^2 = 0 ; \begin{cases} (x,y) \neq (0,0) \\ (x,y) \neq (-1,0) \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ M(x,y) ; \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - y^2 = \frac{1}{4} \right\} \\ &= \left\{ M(x,y) ; \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4} \right\} \\ &= \left\{ M(x,y) ; \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{(y-0)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \right\} \end{aligned}$$

إذن (Γ) عبارة عن هذلول مركز تماثله $\Omega\left(\frac{-1}{2}; 0\right)$ و بؤراته $F(c,0)$

و $F'(-c,0)$. بحيث $c = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

و مقاربا هما المستقيمان (Δ) و (Δ') . المعرفين بما يلي :

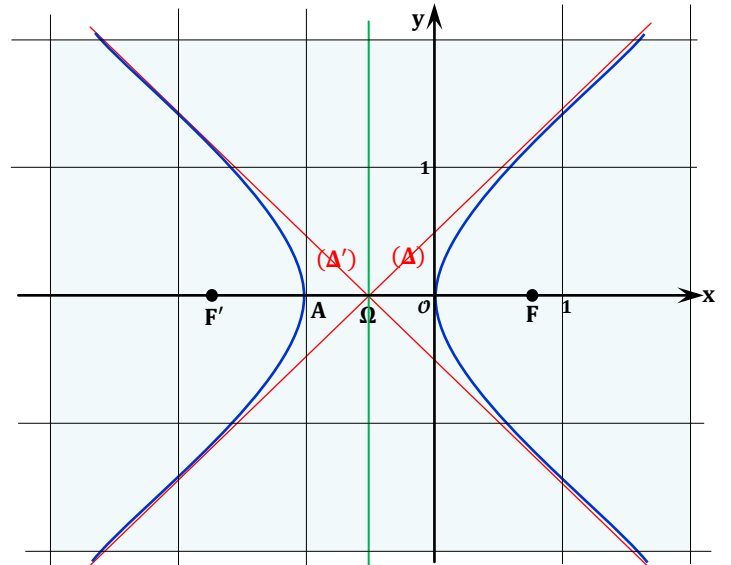
$$\begin{cases} (\Delta) : (y-0) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ (\Delta') : (y-0) = \frac{-1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\Delta) : y = x + \frac{1}{2} \\ (\Delta') : y = -\left(x + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \text{ يعني :}$$

التمرين الثاني

د

2



$$\begin{aligned}
 a + \frac{3b^2}{a} - 2b = 0 &\Rightarrow a(a - 2b) = 3b^2 \\
 &\Rightarrow a^2 - 2ab = 3b^2 \\
 &\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 4b^2 \\
 &\Rightarrow (a - b)^2 = 4b^2 \\
 &\Rightarrow (a - b) = \pm 2b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Si } a - b = 2b &\Rightarrow \begin{cases} 3bc - 3bd = 0 \\ 3bd + bc - 2bd = 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} 3b(c - b) = 0 \\ bd + bc = 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ ou } c - b = 0 \\ bd + bc = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Si } b = 0 &\Rightarrow a = 0 \\
 &\Rightarrow c = 0 \text{ et } d = 0 \\
 &\Rightarrow \text{Contradiction}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Si } c - d = 0 &\Rightarrow c = d \\
 &\Rightarrow 2bd = 0 \\
 &\Rightarrow a = 0 \text{ et } b = 0 \text{ et } c = 0 \text{ et } d = 0 \\
 &\Rightarrow \text{Contradiction}
 \end{aligned}$$

نستنتج إذن الإستلزام التالي:

$$\begin{cases} ac - 3bd = 0 \\ ad + bc - 2bd = 0 \end{cases} \Rightarrow (a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$$

ومنه نستخرج ما يلي:

$$(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} ac - 3bd \neq 0 \\ ad + bc - 2bd \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow M(ac - 3bd ; ad + bc - 2bd) \neq M(0, 0) \\
 &\Rightarrow M(a, b) \times M(c, d) \in E^*
 \end{aligned}$$

إذن E^* جزء مستقر من (E, \times) .

التمرين الثالث

ب 3

لنبين أن φ تشاكل.

لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصفوفتين من E^* .

$$\begin{aligned}
 \varphi(M(a, b) \times M(c, d)) &= \varphi(M(ac - 3bd ; ad + bc - 2bd)) \\
 &= (ac - 3bd - ad - bc + 2bd) + i\sqrt{2}(ad + bc - 2bd) \\
 \varphi(M(a, b)) \times \varphi(M(c, d)) &= ((a - b) + ib\sqrt{2})((c - d) + id\sqrt{2}) \\
 &= (a - b)(c - d) + i\sqrt{2}(d(a - b) + b(c - d)) - 2bd \\
 &= (ac - bd - ad - bc) + i\sqrt{2}(ad + bc - 2bd)
 \end{aligned}$$

نستنتج إذن أن:

$$\varphi(M(a, b) \times M(c, d)) = \varphi(M(a, b)) \times \varphi(M(c, d))$$

و هذا يعني أن φ تشاكل من (E^*, \times) نحو (\mathbb{C}^*, \times) .
لنبين أن φ تقابل.

ليكن $(\alpha + i\beta)$ عددا عقديا غير منعدم.

$$\text{لدينا: } \alpha + i\beta = \left(\left(\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\beta \right) + i \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\beta \right) \sqrt{2}$$

أي يوجد $a = \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta$ و $b = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta$ عنصرين من \mathbb{R}^* حيث $\alpha + i\beta$ لحل في E^* المعادلة: $\varphi(M(x, y)) = \alpha + i\beta$ ذات المجهول $M(x, y)$

و بنفس الطريقة نبين أن:

$$\begin{aligned}
 (M(a, b) \times M(c, d)) \times M(e, f) &= \\
 &= M(ace - 3(adf + bcf + bdf) ; acf + \\
 &\quad + ade + bce + bdf - 2(adf + bcf + bde))
 \end{aligned}$$

إذن \times قانون تجميعي في (E, \times) .

$$\begin{aligned}
 \text{و لدينا: } M(a, b) \times (M(c, d) + M(e, f)) &= \\
 &= M(a, b) \times M(c + e ; d + f) \\
 &= M(a(c + e) - 3b(d + f) ; a(d + f) + \\
 &\quad + b(c + e) - 2b(d + f)) \\
 &= M((ac + ae) - 3(bd + bf) ; ad + af + \\
 &\quad + bc + be - 2(bd + bf))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{و بنفس الطريقة لدينا: } M(a, b) \times M(c, d) + M(a, b) \times M(e, f) &= \\
 &= M(ac - 3bd ; ad + bc - 2bd) + \\
 &\quad + M(ae - 3bf ; af + be - 2bf) \\
 &= M((ac + ae) - 3(bd + bf) ; ad + af + bc + \\
 &\quad + be - 2(bd + bf))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{إذن: } M(a, b) \times (M(c, d) \times M(e, f)) &= M(a, b) \times \\
 &\quad M(c, d) + M(a, b) \times M(e, f)
 \end{aligned}$$

و هذا يعني أن \times توزيعي بالنسبة لـ $+$ على اليسار.

و بنفس الطريقة نبين بكل بساطة أن \times توزيعي بالنسبة لـ $+$ على اليمين.

$$\begin{aligned}
 (M(c, d) + M(e, f)) \times M(a, b) &= \\
 &= M(c, d) \times M(a, b) + M(e, f) \times M(a, b)
 \end{aligned}$$

إذن \times توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E (3).
و من النتائج (1) و (2) و (3) نستنتج أن $(E, +, \times)$ حلقة.

التمرين الثالث

أ 3

لكي يكون E^* جزءا مستقرا في (E, \times) يكفي أن نتحقق من أن لكل مصفوفتين $M(a, b)$ و $M(c, d)$ من E^*

لدينا: $M(a, b) \times M(c, d) \in E^*$

لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصفوفتين من E^* .

$$M(a, b) \times M(c, d) = M(ac - 3bd ; ad + bc - 2bd)$$

و لكي تكون هذه المصفوفة ضمن E^*

$$\begin{cases} ac - 3bd \neq 0 \\ ad + bc - 2bd \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ac - 3bd = 0 \\ ad + bc - 2bd = 0 \end{cases} \text{ بالخلف، نفترض أن}$$

$$\begin{cases} c = \frac{3bd}{a} ; a \neq 0 \\ ad + \frac{3b^2d}{a} - 2bd = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{3bd}{a} ; a \neq 0 \\ d \left(a + \frac{3b^2}{a} - 2b \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{3bd}{a} ; a \neq 0 \\ d = 0 \text{ ou } \left(a + \frac{3b^2}{a} - 2b \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Si } d = 0 &\Rightarrow c = 0 \\
 &\Rightarrow a = 0 \text{ et } b = 0 \\
 &\Rightarrow \text{Absurde car } (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} : \text{ لدينا}$$

$$= 1 + (1 + 0)(0) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} : \text{ لدينا}$$

$$= 1 + (1 + 0)(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} : \text{ لدينا}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + e^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} (1 + e^t + t e^t)$$

$$t = \frac{1}{x}$$

$$= 1 + 0 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} : \text{ لدينا}$$

$$= 1 + (1 + \infty)(+\infty) = +\infty$$

ولدينا : $g\left(\frac{-1}{2}\right) = 1 + (1 - 2)e^{-2} = 1 - e^{-2} \approx 0,86$
و نلخص في الجدول التالي إشارة $g'(x)$ و تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	0	$+\infty$
x	-		-	+
$2x + 1$	-	0	+	+
$g'(x)$	-	0	+	-
g	2	↘	↗	1
		0,86		2

التمرين الرابع

2 I

على المجال $]-\infty, 0[$ نلاحظ أن g تقبل مطرافا عند النقطة $\left(\frac{-1}{2}; g\left(\frac{-1}{2}\right)\right)$ و هذا المطراف عبارة عن قيمة دنوية لأن $g'(x)$ تتعدم في $\frac{-1}{2}$ و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطة ولدينا : $g\left(\frac{-1}{2}\right) \approx 0,86 > 0$.

إذن : $\forall x \in]-\infty, 0[; g(x) \geq g\left(\frac{-1}{2}\right) \approx 0,86$

يعني : $(\forall x < 0) ; g(x) > 0$

على المجال $]0, +\infty[$ نلاحظ أن g تقابل من $]0, +\infty[$ نحو $]2, +\infty[$.

لأن g دالة متصلة و تناقصية قطعاً على $]0, +\infty[$.

يعني : $(\forall y \in]2, +\infty[)(\exists! x \in]0, +\infty[) ; g(x) = y$

أو بتعبير آخر : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; g(x) \in]2, +\infty[$

أي : $(\forall x > 0) ; g(x) > 2 > 0$

نستنتج أن الدالة g موجبة على \mathbb{R}^* بأكمله.

التمرين الرابع

1 II

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}\right) = +\infty : \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}\right) = -\infty : \text{ لدينا}$$

لدينا : $\varphi(M(x, y)) = \alpha + i\beta$

$$\Leftrightarrow (x - y) + iy\sqrt{2} = \alpha + i\beta$$

$$\Leftrightarrow (x - y) + iy\sqrt{2} = (a - b) + ib\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a - b \\ y\sqrt{2} = b\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a = \left(\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta\right) \neq 0 \\ y = b = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta \neq 0 \end{cases}$$

إذن المعادلة $\varphi(M(x, y)) = \alpha + i\beta$ تقبل حلاً وحيداً في E^*

و هو المصفوفة $M\left(\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta ; \frac{1}{\sqrt{2}}\beta\right)$.

أو بتعبير آخر :

$$\forall (\alpha + i\beta) \in \mathbb{C}^* ; \exists! M(x, y) \in E^* : \varphi(M(x, y)) = \alpha + i\beta$$

و هذا يعني أن φ تقبل من (E^*, \times) نحو (\mathbb{C}^*, \times) .

خلاصة: φ تشاكل تقابلي من (E^*, \times) نحو (\mathbb{C}^*, \times) .

التمرين الثالث

4

تكون الحلقة $(E, +, \times)$ جسماً تبادلياً إذا وفقط إذا كان :

- زمرة تبادلية $(E, +)$
- زمرة تبادلية (E^*, \times)
- القانون \times توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E .

لدينا حسب ما سبق : $(E, +)$ زمرة تبادلية (1)

ولدينا φ تشاكل تقابلي من (E^*, \times) نحو (\mathbb{C}^*, \times) .

إذن صورة الزمرة التبادلية (\mathbb{C}^*, \times) بالتشاكل التقابلي φ^{-1} هي الزمرة

التبادلية (E^*, \times) . إذن زمرة تبادلية (2).

و كذلك نعلم حسب ما سبق أن \times توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E (3).

إذن من النتائج (1) و (2) و (3) نستنتج أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي.

التمرين الرابع

1 I

ليكن x عدداً حقيقياً غير منعدم. لدينا : $g(x) = 1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$

نلاحظ أن : $x \rightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ و $x \rightarrow e^{\frac{1}{x}}$ دالتان قابلتان للإشتقاق على \mathbb{R}^* .

إذن الدالة $e^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}^* باعتبارها جداء

دالتين قابلتين للإشتقاق على \mathbb{R}^* .

و بالتالي g دالة قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}^* لأنها مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على \mathbb{R}^* .

$$g'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(e^{\frac{1}{x}}\right)'$$

$$= \left(\frac{-1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(\frac{-1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \left(\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\right) \left(1 + 1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\right) \left(\frac{2x + 1}{x}\right)$$

نلاحظ أن : $(\forall x \neq 0) ; \left(\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\right) < 0$

إذن إشارة $g'(x)$ متعلقة فقط بإشارتي x و $(2x + 1)$.
نضيف نهايات الدالة g عند محددات مجموعة تعريفها

$$= \frac{1 + e^{\frac{1}{x}} - x \left(\frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right)}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{1 + e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

$$= \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{g(x)}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

التمرين الرابع

5 II

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = \frac{g(x)}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$

و نعلم أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; g(x) > 0$

و نلاحظ أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2 > 0$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) > 0$

يعني أن الدالة f تزايدية قطعاً على \mathbb{R}^* و نرسم جدول تغيرات f كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	\parallel	$+$
f	$-\infty$	0	$+\infty$

التمرين الرابع

6 II

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \right) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} - \frac{1}{2}x \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x - x(1 + e^{\frac{1}{x}})}{2(1 + e^{\frac{1}{x}})} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - x e^{\frac{1}{x}}}{2(1 + e^{\frac{1}{x}})} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right) \left(\frac{1}{2(1 + e^{\frac{1}{x}})} \right)$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = \frac{1}{x}}} - \left(\frac{e^t - e^0}{t - 0} \right) \left(\frac{1}{2(1 + e^t)} \right)$$

$$= -(e^0) \left(\frac{1}{2(1 + e^0)} \right) = \frac{-1}{4}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = \frac{-1}{4} \end{cases}$$

نحصل على الوضعية التالية :

التمرين الرابع

2 II

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \right) = 0 = f(0)$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \right)$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = \frac{1}{x}}} \left(\frac{\frac{1}{t}}{1 + e^t} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t + t e^t} \right)$$

$$= 0 = f(0)$$

نلاحظ أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

و هذا يعني أن الدالة f متصلة في الصفر لأنها متصلة على يمينه و يساره .

التمرين الرابع

3 II

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \right)$

$$= 0 ; \text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}} \right) = +\infty$$

$$= 0 = f'_d(0) \in \mathbb{R}$$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \right)$

$$= \left(\frac{1}{1 + 0} \right) = 1 = f'_g(0) \in \mathbb{R}$$

نلاحظ أن $f'_d(0) \neq f'_g(0)$. إذن f غير قابلة للاشتقاق في الصفر .

هندسيا : النهاية $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 0$

تعني أن المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس أفقي على يمين النقطة $(0,0)$

و النهاية $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 1$

تعني أن المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس (Δ)

معادلته $y = x + f(0)$: (Δ) على اليسار في النقطة $(0,0)$

يعني المنصف الأول للمعلم : (Δ) : $y = x$.

التمرين الرابع

4 II

نعلم أن الدالتان $x \rightarrow \frac{1}{x}$ متصلتان و قابلتان للاشتقاق على \mathbb{R}^* .

و الدالة $x \rightarrow e^x$ متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

و جميع عناصر \mathbb{R}^* تقبل صوراً بالدالة Exp . (يعني : $Exp(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$)

إذن الدالة $x \rightarrow e^{\frac{1}{x}}$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* باعتبارها مُركب دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}^* .

إذن الدالة $x \rightarrow 1 + e^{\frac{1}{x}}$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}^* .

و بالتالي الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* لأنها عبارة عن خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}^* و كذلك $1 + e^{\frac{1}{x}} \neq 0 ; (\forall x \neq 0)$.

ليكن x عنصراً من \mathbb{R}^* . لدينا :

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \right)' = \frac{1 \left(1 + e^{\frac{1}{x}} \right) - \left(1 + e^{\frac{1}{x}} \right)' x}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}} \right)^2}$$

بما أن : $n \geq 1$ لأن $0 \in]-n, +\infty[$

فإن الصفر يمتلك سابقاً وحيداً α_n من المجال $]0, +\infty[$
 يعني : $(\forall n \geq 1), (\exists! \alpha_n \in]0, +\infty[) : \psi_n(\alpha_n) = 0$
 يعني : $(\forall n \geq 1), (\exists! \alpha_n > 0) : f(\alpha_n) - n = 0$
 يعني : $(\forall n \geq 1), (\exists! \alpha_n > 0) : f(\alpha_n) = n$
 أي أن المعادلة : $f(x) = n$ تقبل حلاً وحيداً α_n في \mathbb{R}_+^* .

التمرين الرابع

ب 8 II

في البداية سوف نحتاج إلى أن نبين أن : $f(x) < x$; $(\forall x > 0)$
 ليكن x عدداً حقيقياً موجباً قطعاً . لدينا :

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} > 1 > 0$$

$$\Rightarrow 1 + e^{\frac{1}{x}} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} < x ; \text{car } x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) < x ; (\forall x > 0) (*)$$

$$\Rightarrow f(\alpha_n) < \alpha_n ; (\text{car } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n > 0)$$

$$\Rightarrow n < \alpha_n ; (\text{car } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(\alpha_n) = n)$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n > n$$

$$\Rightarrow \alpha_n > n ; \left(\begin{array}{l} \text{On fait tendre} \\ n \text{ vers } l'infini \end{array} \right)$$

$n \infty$

$+\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n \infty} (\alpha_n) = +\infty ; \left(\begin{array}{l} d'après le critère \\ de comparaison \end{array} \right)$$

التمرين الرابع

أ 1 III

تذكير بمبرهنة المتوسط :

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ حيث $a \leq b$. فإنه يوجد عدد c من المجال $[a, b]$ بحيث :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$f(c)$ تسمى القيمة المتوسطة للدالة f على $[a, b]$.

لدينا f دالة متصلة على \mathbb{R} بأكمله .

إذن فهي متصلة على أي مجال $[1, x^2]$ من \mathbb{R} حيث $x \geq 1$.

ومن هنا حسب مبرهنة المتوسط يوجد عدد c من $[1, x^2]$ حيث :

$$f(c) = \frac{1}{x^2 - 1} \int_1^{x^2} f(x) dx$$

$$\text{أي : } \exists c \in [1, x^2] ; f(c) = \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right) F(x)$$

$$\text{أي : } \exists c \in [1, x^2] ; F(x) = (x^2 - 1) f(c)$$

التمرين الرابع

ب 1 III

ليكن x عنصراً من المجال $[1, +\infty[$.

لدينا : $c \in [1, x^2] \Rightarrow 1 \leq c \leq x^2$

$$\Rightarrow f(1) \leq f(c) \leq f(x^2) ; \text{car } f \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1) f(1) \leq (x^2 - 1) f(c) \leq (x^2 - 1) f(x^2)$$

$$\text{car : } x \geq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1) f(1) \leq F(x) \leq (x^2 - 1) f(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) f(1) = (+\infty - 1) f(1) = +\infty ; \text{car } f(1) > 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

و بنفس الطريقة لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \right) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} - \frac{1}{2}x \right)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x - x e^{\frac{1}{x}}}{2(1 + e^{\frac{1}{x}})} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^-} - \left(\frac{e^t - e^0}{t - 0} \right) \left(\frac{1}{2(1 + e^t)} \right) \\ &= -(e^t)' / t=0 \times \frac{1}{2(1 + e^0)} \\ &= -e^0 \times \frac{1}{2(2)} = \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

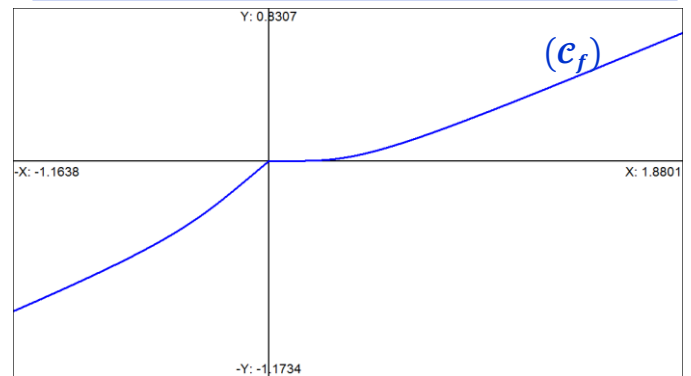
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = \frac{-1}{4} \end{cases}$$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

إذن نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

التمرين الرابع

7 II



التمرين الرابع

أ 8 II

نعتبر الدالة العددية ψ_n المعرفة على \mathbb{R}_+^* بما يلي :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \psi_n(x) = f(x) - n$$

لدينا ψ_n دالة متصلة على \mathbb{R}_+^* لأنها فرق دالتين متصلتين على \mathbb{R}_+^* .

و لدينا ψ_n قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* لأنها فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}_+^*

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \psi_n'(x) = f'(x) > 0$$

إذن ψ_n دالة تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$.

بما أن ψ_n متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$.

فهي تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو المجال $]0, +\infty[$.

و لدينا : $\psi_n(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} \psi_n(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi_n(x) \right[$

$$= \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) - n) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - n) \right[$$

$$=]-n ; +\infty[$$

إذن ψ_n تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو المجال $] -n, +\infty[$.

و هذا يعني أن كل عنصر من مجموعة الوصول $] -n, +\infty[$ يقبل سابقاً

وحيداً من مجموعة الإنطلاق $]0, +\infty[$ بالتقابل ψ_n .

أو بتعبير آخر :

$$(\forall y \in]-n, +\infty[), (\exists! x \in]0, +\infty[) : \psi_n(x) = y$$

نلاحظ أن: $(\forall x \geq 1) ; 2x^3 \geq 2 > 0$
 وكذلك: $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \left(1 + e^{\frac{1}{x^2}}\right) > 0$
 إذن $F'(x)$ تكون دائما موجبة قطعاً على $[1, +\infty[$.
 أي أن الدالة F تزايدية قطعاً على المجال $[1, +\infty[$
 و نرسم جدول تغيرات F كما يلي:

x	1	$+\infty$
$F'(x)$		+
F		$+\infty$

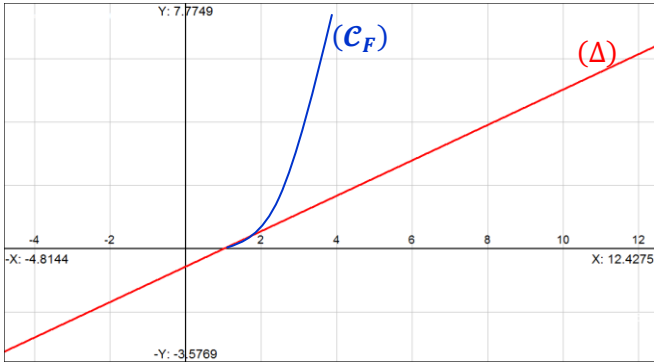
التمرين الرابع

3 III

معادلة نصف المماس (Δ) للمنحنى (C_F) عند النقطة التي أفصولها 1
 نُكتب على شكل: $(\Delta) : y = F'(1)(x-1) + F(1)$
 $\Rightarrow (\Delta) : y = \left(\frac{2}{1+e}\right)(x-1) + 0$
 $\Rightarrow (\Delta) : y = \left(\frac{2}{1+e}\right)(x-1)$
 $\rightsquigarrow (\Delta) : y = 0,53(x-1)$

التمرين الرابع

4 III



التمرين الرابع

1 IV

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.
 $u_{n+1} - u_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^1 \left(\frac{f(t)}{t^3}\right) dt - \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{f(t)}{t^3}\right) dt$
 $= \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left(\frac{f(t)}{t^3}\right) dt$
 لدينا: $\forall t \in [1, +\infty[; \frac{f(t)}{t^3} > 0$
 إذن $t \rightarrow \frac{f(t)}{t^3}$ دالة متصلة وموجبة قطعاً على المجال $[1, +\infty[$.
 إذن فهي متصلة وموجبة قطعاً على $\left[\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$
 ولدينا كذلك $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ لأن $n+1 > n$.

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left(\frac{f(t)}{t^3}\right) dt > 0 \quad \text{إذن :}$$

أي: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} - u_n > 0$

أي: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} > u_n$

و هذا يعني أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعاً.

و نحصل على الوضعية التالية: $(x^2 - 1) f(1) \leq F(x)$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$+\infty$$

إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

التمرين الرابع

1 III

لدينا: $(\forall x \geq 1) ; (x^2 - 1) f(1) \leq F(x)$
 نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $\frac{1}{x}$ نجد:

$$(\forall x \geq 1) ; \left(x - \frac{1}{x}\right) f(1) \leq \frac{F(x)}{x}$$

و لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) f(1) = (+\infty - 0) f(1) = +\infty ; \text{car } f(1) > 0$

إذن نحصل على الوضعية التالية: $\left(x - \frac{1}{x}\right) f(1) \leq \frac{F(x)}{x}$

$$+\infty$$

و منه حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$

و من النهايتين : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty \end{cases}$

نستنتج أن (C_F) يقبل فرعاً شلجياً في اتجاه محور الأرتاب بجوار $+\infty$

التمرين الرابع

2 III

تذكير: إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصراً من I
 فإن الدالة

$$F : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم في a .

و بذلك نكتب: $\begin{cases} F(a) = 0 \\ (\forall x \in I) ; F'(x) = f(x) \end{cases}$

لدينا f دالة متصلة على \mathbb{R} إذن f متصلة على المجال $[1, +\infty[$.
 و لدينا $1 \in [1, +\infty[$. إذن الدالة:

$$G : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \int_1^x f(t) dt$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال $[1, +\infty[$ و التي تنعدم

في العدد 1. و نكتب: $\begin{cases} G(1) = 0 \\ (\forall x \geq 1) ; G'(x) = f(x) \end{cases}$

من جهة أخرى لدينا: $F(x) = \int_1^{x^2} f(t) dt = G(x^2)$

$$\text{إذن : } F'(x) = (G(x^2))' = (x^2)' G'(x^2) = 2x f(x^2) = \frac{2x \cdot x^2}{1 + e^{\frac{1}{x^2}}}$$

إذن: $(\forall x \geq 1) ; F'(x) = \frac{2x^3}{1 + e^{\frac{1}{x^2}}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left((n-1) - \ln \left(\frac{1+e^n}{1+e} \right) \right) \text{ : ومنه} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left((n-1) - \ln(1+e^n) + \ln(1+e) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left((n-1) - \ln(e^n(e^{-n}+1)) + \ln(1+e) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1-n-\ln(e^{-n}+1) + \ln(1+e)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1 - \ln(e^{-n}+1) + \ln(1+e)) \\
&= -1 - \ln(0+1) + \ln(1+e) \\
&= -1 + \ln(1+e) \\
&= \ln \left(\frac{1}{e} \right) + \ln(1+e) \\
&= \ln \left(\frac{1+e}{e} \right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \ln \left(\frac{1+e}{e} \right) \text{ : وبالتالي}$$

التمرين الرابع

I 2 IV

$$\text{On a : } u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{f(y)}{y} \right) dy ; y \text{ variable muette}$$

$$\frac{dt}{dy} = -\left(\frac{1}{y}\right)^2 = -t^2 \text{ : إذن } t = \frac{1}{y} \text{ : نضع}$$

$$\text{إذا كان : } y = \frac{1}{n} \text{ : فإن } t = n$$

$$\text{إذا كان : } y = 1 \text{ : فإن } t = 1$$

$$u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{f(y)}{y} \right) dy = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{1}{y^2 \left(1+e^{\frac{1}{y}}\right)} \right) dy \text{ : ومنه}$$

$$= \int_n^1 (t^2) \left(\frac{1}{1+e^t} \right) \left(\frac{-1}{t^2} dt \right)$$

$$= \int_n^1 \left(\frac{-1}{1+e^t} \right) dt$$

$$= \int_1^n \left(\frac{1}{1+e^t} \right) dt$$

$$= \int_1^n \left(\frac{1+e^t - e^t}{1+e^t} \right) dt$$

$$= \int_1^n \left(1 - \frac{e^t}{1+e^t} \right) dt$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \int_1^n \left(1 - \frac{e^t}{1+e^t} \right) dt \text{ : وبالتالي}$$

التمرين الرابع

I 2 IV

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow u_n = \int_1^n \left(1 - \frac{e^t}{1+e^t} \right) dt$$

$$= \int_1^n 1 dt - \int_1^n \left(\frac{e^t}{1+e^t} \right) dt$$

$$= [t]_1^n - \int_1^n \frac{(1+e^x)'}{(1+e^x)} dt$$

$$= [t]_1^n - [\ln|1+e^t|]_1^n$$

$$= [t]_1^n - [\ln(1+e^t)]_1^n ; 1+e^t > 0 \text{ toujours}$$

$$= (n-1) - (\ln(1+e^n) - \ln(1+e))$$

$$= (n-1) - \ln \left(\frac{1+e^n}{1+e} \right)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = (n-1) - \ln \left(\frac{1+e^n}{1+e} \right) \text{ : وبالتالي}$$

أجوبة امتحان مدينة طنجة 2009

التمرين الأول

1

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^0 & 0e^0 \\ 0 & e^0 \end{pmatrix} = M_0$$

لدينا : $I = M_0 \in A$ بما أن $0 \in \mathbb{R}$ فإن

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = N_1$$

لدينا : $I = N_1 \in B$ بما أن $1 \in \mathbb{R}_+^*$ فإن

التمرين الأول

2

لتكن M_a و M_b مصفوفتين من A .

$$M_a \times M_b = \begin{pmatrix} e^a & a e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^b & b e^b \\ 0 & e^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a e^b & b e^a e^b + a e^a e^b \\ 0 & e^a e^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(a+b)} & (a+b) e^{(a+b)} \\ 0 & e^{(a+b)} \end{pmatrix} = M_{(a+b)}$$

لدينا : بما أن $M_a \in A$ و $M_b \in A$ فإن $M_{(a+b)} \in A$ و منه : $(a+b) \in \mathbb{R}$. يعني : $M_{(a+b)} \in A$

التمرين الأول

2

لكي نبين أن (A, \times) زمرة تبادلية توجد طريقتان .
الطريقة الأولى : يكفي أن نبين أن :

- A مجموعة غير فارغة
- \times قانون تركيب داخلي في A
- \times تبادلي و تجميعي
- \times يقبل عنصرا محايدا وحيدا في A
- كل مصفوفة M_a من A تقبل مقلوبا من A .

الطريقة الثانية : يكفي أن نبين أن (A, \times) زمرة جزئية من الزمرة التبادلية الأم $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$. ومن أجل ذلك نبين أن :

- A جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
-

الطريقة الأولى : A مجموعة غير فارغة لأنها تضم مصفوفات مربعة من الرتبة 2 . ومن بين هذه المصفوفات نستطيع رصد العنصر I :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^0 & 0e^0 \\ 0 & e^0 \end{pmatrix} = M_0 \in A$$

لدينا : $I = M_0 \in A$ بما أن $0 \in \mathbb{R}$ فإن

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1$$

لدينا : $I = M_1 \in B$ بما أن $1 \in \mathbb{R}_+^*$ فإن

$$\forall (M_a, M_b) \in A^2 ; M_a \times M_b = M_{(a+b)} \in A$$

$$\forall (M_a, M_b) \in A^2 ; M_a \times M_b = M_{(a+b)} = M_b \times M_a$$

و كذلك \times قانون تجميعي في A لأن :

$$\forall (M_a, M_b, M_c) \in A^3 ; M_a \times (M_b \times M_c) = M_a \times M_{(b+c)} = M_{a+(b+c)} = M_{(a+b)+c} = (M_a \times M_b) \times M_c$$

لكن المصفوفة M_e العنصر المحايد للضرب في A .
إذن : $\forall M_x \in A ; M_x \times M_e = M_e \times M_x = M_x$

$$M_{x+\varepsilon} = M_x$$

$$\forall (x, \varepsilon) \in \mathbb{R} ; M_{x+\varepsilon} = M_x$$

أي : $e^{(x+\varepsilon)} = e^x$. يعني : $x + \varepsilon = x$: أي : $\varepsilon = 0 \in \mathbb{R}$.
إذن المصفوفة M_0 هي العنصر المحايد للضرب \times في A .
لتكن M_x مصفوفة من A و $M_{x'}$ مائلتها بالنسبة للقانون \times .
إذن : $M_x \times M_{x'} = M_{x'} \times M_x = M_0$: أي : $M_{x+x'} = M_0$.

$$x + x' = 0 \text{ : أي : } x' = -x$$

أي : $M_x \in A \Rightarrow x \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow -x \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow M_{-x} \in A$

إذن كل مصفوفة M_x من A تقبل مقلوبا و هي المصفوفة M_{-x} من A .
و نكتب : $(M_x)^{-1} = M_{-x}$

الطريقة الثانية : سوف نحتاج في هذه الطريقة إلى تعبير مقلوب مصفوفة بصفة عامة في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بالنسبة للضرب .

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) ; M^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

لدينا A جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لأنها تضم مصفوفات مربعة من الرتبة 2 ذات معاملات حقيقية . و من بين هذه المصفوفات نجد :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_0 \in A$$

لدينا : $I = M_0 \in A$ بما أن $0 \in \mathbb{R}$ فإن

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1$$

لدينا : $I = M_1 \in B$ بما أن $1 \in \mathbb{R}_+^*$ فإن

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1$$

لدينا : $I = M_1 \in B$ بما أن $1 \in \mathbb{R}_+^*$ فإن

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1$$

لدينا : $I = M_1 \in B$ بما أن $1 \in \mathbb{R}_+^*$ فإن

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1$$

لدينا : $I = M_1 \in B$ بما أن $1 \in \mathbb{R}_+^*$ فإن

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1$$

لدينا : $I = M_1 \in B$ بما أن $1 \in \mathbb{R}_+^*$ فإن

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1$$

لدينا : $I = M_1 \in B$ بما أن $1 \in \mathbb{R}_+^*$ فإن

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1$$

لدينا : $I = M_1 \in B$ بما أن $1 \in \mathbb{R}_+^*$ فإن

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1$$

لدينا : $I = M_1 \in B$ بما أن $1 \in \mathbb{R}_+^*$ فإن

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1$$

لدينا : $I = M_1 \in B$ بما أن $1 \in \mathbb{R}_+^*$ فإن

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1$$

لدينا : $I = M_1 \in B$ بما أن $1 \in \mathbb{R}_+^*$ فإن

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1$$

لدينا : $I = M_1 \in B$ بما أن $1 \in \mathbb{R}_+^*$ فإن

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1$$

لدينا : $I = M_1 \in B$ بما أن $1 \in \mathbb{R}_+^*$ فإن

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1$$

لكي تكون المجموعة $A \cup B$ مستقرة بالضرب \times في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
يكفي أن نتحقق من أن: $\forall (M, M') \in (A \cup B)^2$; $M \times M' \in A \cup B$
أو بتعبير آخر، يكفي أن نتحقق من الشروط التالية:

$$\forall (N_a, N_b) \in B^2; N_a \times N_b \in A \cup B$$

$$\forall (M_a, M_b) \in A^2; M_a \times M_b \in A \cup B$$

$$\forall (M_a, N_b) \in A \times B; M_a \times N_b \in A \cup B$$

نلاحظ أن الشرطان الأول والثاني محققان حسب ما سبق.

أما الشرط الثالث فهو غير محقق ونعلل ذلك بما يلي:

لتكن M_a مصفوفة من A و N_b مصفوفة من B .

$$M_a \times N_b = \begin{pmatrix} e^a & a e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \ln b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & (-\ln b)(e^a) + a e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix} = M$$

لنبين أن $M \notin B$ و $M \notin A$

بالخلف نفترض أن $M \in A$.

إذن يوجد $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث $M = M_\alpha$

$$\begin{pmatrix} e^a & (a + \ln b)e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\alpha & \alpha e^\alpha \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ a + \ln b = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ b = 1 \end{cases}$$

و هذا تناقض واضح و خصوصا عندما يكون $b \neq 1$.

نفترض الآن أن: $M \in B$.

إذن يوجد $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ حيث $M = N_\beta$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^a & (a + \ln b)e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^a = 1 \\ (a + \ln b)e^a = \ln \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \beta \end{cases}$$

و هذا تناقض عندما نأخذ $a \neq 0$

إذن: $\forall (M_a, N_b) \in A \times B$; $M_a \times N_b \notin A \cup B$

و بالتالي المجموعة $A \cup B$ غير مستقرة بالضرب \times في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

التمرين الثاني

تذكير: ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من 2.

إذا كان n عدد غير أولي فإنه يوجد عدد أولي p يقسم n و مُربعه أصغر

من أو يساوي n .

بتعبير آخر: إذا كانت جميع الأعداد الأولية التي مُربعاتها أصغر من أو

تساوي n لا تقسم n فإن العدد n عدد أولي.

لدينا الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 2011 هي 2 و 3

و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 19 و 23 و 29 و 31 و 37 و 41 و 43

و 47. و نتأكد باستعمال الآلة الحاسبة أن 2011 لا يقبل القسمة على أي

عدد من هذه الأعداد. إذن العدد 2011 أولي.

ملاحظة: هذه التقنية تُصبح تافهة كلما كان n عددا كبيرا و كل عدد أراد

الحصول على شهادة الأولية يجب أن ينتظر طويلا أمام مكتب هذه الخاصية.

ها ها ها ها

Autrement – dit : il existe d'autres méthodes et d'autres testes de primalité plus efficaces et non couteux. et qui délivrent les certificats de primalité aux ayant droit à bon prix HHHH!

لكي يكون B جزءا مستقرا من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ يكفي أن نبين أن:

B جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. و \times قانون تركيب داخلي في B .

B جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لأنه يضم مصفوفات مربعة من الرتبة

2 و ذات معاملات حقيقية و من بين هذه المصفوفات نجد $I = N_1 \in B$.

لتكن N_a و N_b مصفوفتين من B .

$$N_a \times N_b = \begin{pmatrix} 1 & \ln a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \ln b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln a + \ln b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln(ab) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = N_{ab}$$

$$(N_a, N_b) \in B^2 \Rightarrow a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\Rightarrow ab > 0$$

$$\Rightarrow N_{ab} \in B$$

$$\Rightarrow N_a \times N_b \in B$$

إذن \times قانون تركيب داخلي في B .

و منه B جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

التمرين الأول

تكون المجموعتان (\mathbb{R}_+^*, \times) و (B, \times) متشاكلتان تقابليا إذا وجد تطبيق

f معرف من (\mathbb{R}_+^*, \times) نحو (B, \times) بحيث تشاكل تقابلي.

نعتبر التطبيق المعرف من (\mathbb{R}_+^*, \times) نحو (B, \times) بما يلي:

$$f : (\mathbb{R}_+^*, \times) \rightarrow (B, \times) \\ b \rightarrow f(b) = N_b$$

لتكن N_a و N_b مصفوفتان من B . لدينا: $N_a \times N_b = N_{ab}$

إذن: $f(a) \times f(b) = f(a \times b)$.

و هذا يعني أن f تشاكل من (\mathbb{R}_+^*, \times) نحو (B, \times) .

لتكن N_b مصفوفة من B . إذن: $b \in \mathbb{R}_+^*$

و لنحل في \mathbb{R}_+^* المعادلة $f(x) = N_b$ ذات المجهول x .

$$f(x) = N_b \Leftrightarrow N_x = N_b \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \ln x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \ln x = \ln b \\ \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{\ln b} \\ \Leftrightarrow x = b \in \mathbb{R}_+^*$$

إذن المعادلة تقبل حلا في \mathbb{R}_+^* و هو العدد b .

أو بتعبير آخر: $(\forall N_b \in B)(\exists! x \in \mathbb{R}_+^*) ; f(x) = N_b$

و هذا يعني أن f تطبيق تقابلي من \mathbb{R}_+^* نحو B

خلاصة: f تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}_+^*, \times) نحو (B, \times)

و منه (\mathbb{R}_+^*, \times) و (B, \times) متشاكلتان تقابليا.

و نستنتج من هذا أن صورة الزمرة التبادلية (\mathbb{R}_+^*, \times) بالتشاكل التقابلي f

هي الزمرة التبادلية (B, \times) .

و نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق

و يُحولها إلى مجموعة الوصول.

بما أن (\mathbb{R}_+^*, \times) زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالضرب \times هو العدد

الحقيقي الموجب 1 و كل عدد حقيقي x يقبل ماثلا و هو العدد $\frac{1}{x}$.

فإن (B, \times) زمرة تبادلية كذلك عنصرها المحايد بالضرب \times هو

المصفوفة $N_1 = f(1)$ و كل مصفوفة N_x تقبل ماثلة بالضرب \times

و هي المصفوفة $N_{\frac{1}{x}} = f\left(\frac{1}{x}\right)$

نفترض أن $p = 67$.

إذن المعادلة (E) تصبح: $67x + y^{66} = 2011$
 لدينا عدد أولي و $67 \wedge y = 1$
 إذن حسب ميرهنة فيرما نكتب: $y^{66} \equiv 1 [67]$
 يوجد إذن k من \mathbb{N} بحيث $(y^{66} - 1) = 67k$
 نعوض y^{66} بالعدد $(67k + 1)$ في المعادلة (E)
 نجد: $67x + 67k + 1 = 2011$
 يعني أن: $67(x + k) = 2010$. أي: $x + y = 30$
 أي: $x = 30 - k$

لدينا: $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x > 0$
 $\Rightarrow 30 - k > 0$
 $\Rightarrow k < 30$
 $\Rightarrow 67k < 2010$
 $\Rightarrow 67k + 1 < 2011$
 $\Rightarrow y^{66} < 2011$
 $\Rightarrow 0 < y^{66} < 2011$; car $y \in \mathbb{N}^*$
 $\Rightarrow \sqrt[66]{0} < \sqrt[66]{y^{66}} < \sqrt[66]{2011}$; et $y \in \mathbb{N}^*$
 $\Rightarrow 0 < y < 1,12$; et $y \in \mathbb{N}^*$
 $\Rightarrow y = 1 \in \mathbb{N}^*$
 $\Rightarrow 67k + y^{66} = 2011$ et $y = 1$
 $\Rightarrow 67k + 1^{66} = 2011$
 $\Rightarrow 67k = 2010$
 $\Rightarrow x = 30 \in \mathbb{N}^*$

خلاصة: في حالة $p = 67$ المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ وهو الزوج $(30; 1)$.

نفترض أن $p = 5$.

إذن المعادلة (E) تصبح: $5x + y^4 = 2011$
 لدينا 5 عدد أولي و $5 \wedge y = 1$
 إذن حسب Fermat نكتب: $y^4 \equiv 1 [5]$
 إذن يوجد k من \mathbb{N} بحيث $y^4 - 1 = 5k$
 نعوض y^4 بالعدد $(5k + 1)$ في (E)
 نحصل على: $5x + 5k + 1 = 2011$
 يعني: $5(x + k) = 2010$. يعني: $x + k = 402$
 يعني: $x = 402 - k$

لدينا: $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x > 0$
 $\Rightarrow 402 - k > 0$
 $\Rightarrow k < 402$
 $\Rightarrow 5k < 2010$
 $\Rightarrow 5k + 1 < 2011$
 $\Rightarrow y^4 < 2011$
 $\Rightarrow 0 < y^4 < 2011$; car $y \in \mathbb{N}^*$
 $\Rightarrow \sqrt[4]{0} < \sqrt[4]{y^4} < \sqrt[4]{2011}$; et $y \in \mathbb{N}^*$
 $\Rightarrow 0 < y < 6,69$; et $y \in \mathbb{N}^*$
 $\Rightarrow y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $\Rightarrow y \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$; car $5 \wedge y = 1$

نعوض y بكل قيمة من هذه القيم في المعادلة (E) التي تصبح معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد x فنحصل في الأخير على النتائج التالية:

$y = 1 \Rightarrow x = 402 \in \mathbb{N}^*$
 $y = 2 \Rightarrow x = 399 \in \mathbb{N}^*$
 $y = 3 \Rightarrow x = 386 \in \mathbb{N}^*$
 $y = 4 \Rightarrow x = 351 \in \mathbb{N}^*$
 $y = 6 \Rightarrow x = 143 \in \mathbb{N}^*$

ليكن (x, y) حلا للمعادلة E في $(\mathbb{N}^*)^2$
 ونريد أن نبين أن p لا يقسم العدد y .
 بالخلف نفترض أن p قاسم للعدد y .
 إذن يوجد k من \mathbb{N}^* حيث $y = kp$
 ولدينا (x, y) حل للمعادلة (E) في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$
 إذن: $px + y^{p-1} = 2011$
 نعوض في هذه الكتابة y بالعدد kp نجد: $px + (kp)^{p-1} = 2011$
 أي: $p(x + k^{p-1} \cdot p^{p-2}) = 2011$
 إذن p يقسم العدد 2011.
 حصلنا إذن على أن p عدد أولي و يقسم العدد الأولي 2011.
 إذن: $p = 2011$. وهذا يتناقض مع المعطيات الصريحة للتمرين.
 إذن ما افترضناه كان خاطئا.
 إذن p لا يقسم العدد y .

سوف نستعمل في هذا السؤال مبرهنة (Fermat).
 تذكر بمبرهنة فيرما: (الصيغة العامة)

$$p \in \mathbb{P}^+ \Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z}; a^p \equiv a [p]$$

تذكر بمبرهنة فيرما: (الصيغة الخاصة)

$$\begin{cases} p \in \mathbb{P}^+ \\ p \wedge a = 1 \end{cases} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 [p]$$

لدينا p عدد أولي و لا يقسم العدد y . إذن $p \in \mathbb{P}^+$ و $p \wedge y = 1$
 ومنه حسب Fermat نستنتج أن: $y^{p-1} \equiv 1 [p]$
 إذن يوجد k من \mathbb{N} حيث $(y^{p-1} - 1) = kp$
 ولدينا (x, y) حل للمعادلة (E) في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$
 إذن: $px + y^{p-1} = 2011$
 نعوض في هذه الكتابة y^{p-1} بـ $(kp + 1)$ فنحصل على:

$$px + kp + 1 = 2011$$

يعني: $px + kp = 2010$. وهذا يعني أن p يقسم العدد 2010.
 أي: $p(x + k) = 2010$. فنكافئ العدد 2010 إلى جداء عوامل أولية نحصل على ما يلي:

2010	2
1005	5
201	3
67	67
Stop	1

يعني أن: $2010 = 2 \times 5 \times 3 \times 67$.

لقد حصلنا لحد الآن على الوضعية التالية:

- عدد أولي و أكبر من أو يساوي 5
- العدد p يقسم العدد 2010
-

نستنتج إذن أن: $p \in \{5; 67\}$.
 لاحظ أن $p \neq 3$ و $p \neq 2$ لأن $p \geq 5$.

الأزواج التي حصلنا عليها هي : (402 ; 1) و (399 ; 2) و (386 ; 3) و (351 ; 4) و (143 ; 6) .
عكسيا ، عندما نعوض كل زوج من هذه الأزواج في المعادلة (E) نحصل على العدد 2011 .

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ هي :

$$S = \{(402 ; 1) ; (399 ; 2) ; (143 ; 6) ; (386 ; 3) ; (351 ; 4)\}$$

التمرين الثالث

1

لدينا : $\Delta = (3m - 2i)^2 - 4(2m^2 - 4mi)$

$$= 9m^2 - 4 - 12mi - 8m^2 + 16mi$$

$$= m^2 + 4mi - 4$$

$$= m^2 + 2(m)(2i) + (2i)^2$$

$$= (m + 2i)^2$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 التاليين :

$$\begin{cases} z_1 = \frac{(3m - 2i) - (m + 2i)}{2} = m - 2i \\ z_2 = \frac{(3m - 2i) + (m + 2i)}{2} = 2m \end{cases}$$

التمرين الثالث

2

$$m = (1 + i) \Rightarrow \begin{cases} z_1 = (1 + i) - 2i = (1 - i) \\ z_2 = 2(1 + i) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ |z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |z_1| < |z_2|$$

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$= \sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}} ; \text{Forme exponentielle}$$

$$= \left[\sqrt{2} ; -\frac{\pi}{4} \right] ; \text{Forme trigonométrique}$$

$$z_2 = 2(1 + i) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$= 2\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} ; \text{Forme exponentielle}$$

$$= \left[2\sqrt{2} ; \frac{\pi}{4} \right] ; \text{Forme trigonométrique}$$

التمرين الثالث

2

لدينا : $(-z_1)^3 = (i - 1)^3 = i^3 - 3i^2 + 3i - 1$

$$= -i + 3 + 3i - 1 = 2i + 2$$

$$= 2(i + 1) = z_2$$

إذن $(-z_1)$ جذر مكعب للعدد العقدي z_2 .
تذكير : كل عدد عقدي $z = r e^{i\theta}$ يقبل n جذرا نونيا z_k نكتب على شكل $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ حيث $k \in \{0, 1, 3, \dots, n-1\}$.
لدينا الجذور المكعبة الثلاثة للعدد $z_2 = 2\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$ هي : $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} e^{\frac{i\pi}{12}}$ و $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)}$ و $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)}$.
أي : $\sqrt{2} e^{\frac{17i\pi}{12}}$ و $\sqrt{2} e^{\frac{9i\pi}{12}}$ و $\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{12}}$.

ونلاحظ أن : $\sqrt{2} e^{\frac{9i\pi}{12}} = \sqrt{2} e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)}$

$$= \sqrt{2} e^{i\pi} e^{-\frac{i\pi}{4}} = -\sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}} = -z_1$$

نكتب الآن $\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{12}}$ و $\sqrt{2} e^{\frac{17i\pi}{12}}$ على الشكل الجبري .

في البداية لدينا : $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. إذن : $\cos\left(2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

أي : $2 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. أي : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}}$.

ولدينا كذلك : $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. إذن : $\sin\left(2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{1}{2}$.

أي : $2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$.

ومنه : $2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}} \right) = \frac{1}{2}$. إذن : $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}+2}}$.

وبالتالي : $\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{12}} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$

$$= \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}+2}} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} + i \sqrt{\frac{1}{4(\sqrt{3}+2)}}$$

وكذلك : $\sqrt{2} e^{\frac{17i\pi}{12}} = \sqrt{2} e^{i\left(\pi + \frac{5\pi}{12}\right)} = \sqrt{2} e^{i\pi} e^{\frac{5i\pi}{12}}$

$$= -\sqrt{2} e^{\frac{5i\pi}{12}} = -\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

$$= -\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \right)$$

$$= -\sqrt{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

$$= -\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}+2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}} \right)$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{2(\sqrt{3}+2)}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}$$

التمرين الثالث

3

بالخلف نفترض أن النقط A و B و C نقط مستقيمية .

يوجد إذن عدد حقيقي k بحيث $AC = k \cdot AB$.

أي : $(z_C - z_A) = k(z_B - z_A)$; $(\exists k \in \mathbb{R}^*)$.

$$\Leftrightarrow \frac{(z_C - z_A)}{(z_B - z_A)} = k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m - 2i - i)}{(2m - i)} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m - 3i)}{(2m - i)} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{(m - 3i)}}{\overline{(2m - i)}} = \frac{(m - 3i)}{(2m - i)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{m} + 3i}{2\bar{m} + i} = \frac{m - 3i}{2m - i}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{m} + 3i)(2m - i) = (m - 3i)(2\bar{m} + i)$$

$$\Leftrightarrow 2m\bar{m} - i\bar{m} + 6im + 3 = 2m\bar{m} + im - 6i\bar{m} + 3$$

$$\Leftrightarrow 5i\bar{m} + 5im = 0$$

$$\Leftrightarrow 5i(\bar{m} + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{m} + m = 0 ; \text{ car } 5i \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \operatorname{Re}(m) = 0 ; \text{ car } (m + \bar{m}) = 2 \operatorname{Re}(m)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(m) = 0$$

$$\Leftrightarrow m \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \text{Contradiction car } m \notin i\mathbb{R}$$

إذن ما افترضناه كان خاطئا .
ومنه فإن النقط A و B و C غير مستقيمية .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) \right) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) \right) \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t=(1+x)}} \left(\frac{2(t-1)}{t} - \ln t \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(2 - \frac{2}{t} - \ln t \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(2 - \left(\frac{2}{t} \right) \left(1 + \frac{2}{t} \ln t \right) \right) \\ &= \left(2 - (+\infty) \left(1 + \frac{2}{t} \times 0 \right) \right) = -\infty \end{aligned}$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$

إذن المنحنى (C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = -1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{x} \right) \text{ ولدينا :} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{t} - \left(\frac{\ln t}{t} \right) \left(1 + \frac{1}{t-1} \right) \right) \\ &= (0 - (0)(1+0)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

نسنتج أن (C) يقبل فرعا شلجما اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

في البداية نلاحظ أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1, +\infty[$.
لأنها عبارة عن فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على $]-1, +\infty[$.
ليكن x عنصرا من المجال $]-1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) \right)' \text{ لدينا :} \\ &= \frac{2(1+x) - 1(2x)}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{2 - (1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

نلاحظ أن : $\frac{1}{(1+x)^2} > 0$; $(\forall x > -1)$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-x)$.

نرسم إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f		$\ln\left(\frac{e}{2}\right)$	

BCD مثلث متساوي الساقين
و قائم الزاوية في D.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} DB = DC \\ (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_B - z_D| = |z_C - z_D| \\ \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_D}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} = i \\ \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} = -i \end{cases} \text{ أو}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m - 2i - d}{2m - d} = i \\ \frac{m - 2i - d}{2m - d} = -i \end{cases} \text{ أو}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m - 2i - d) = i(2m - d) \\ (m - 2i - d) = -i(2m - d) \end{cases} \text{ أو}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d(1 - i) = (m - 2mi - 2i) \\ d(1 + i) = (m + 2im - 2i) \end{cases} \text{ أو}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d(1 - i)(1 + i) = (1 + i)(m - 2mi - 2i) \\ d(1 + i)(1 - i) = (1 - i)(m + 2im - 2i) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2d = 3m - im + 2 - 2i \\ 2d = 3m + im - 2 - 2i \end{cases} \text{ أو}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{3m - im + 2 - 2i}{2} \\ d = \frac{3m + im - 2 - 2i}{2} \end{cases} \text{ أو}$$

لكي يكون الرباعي ABCD مربعا يكفي أن يكون المثلث ABC قائم الزاوية
و متساوي الساقين في A.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i \\ \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i \end{cases} \text{ أو}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m - i}{m - 3i} = i \\ \frac{2m - i}{m - 3i} = -i \end{cases} \text{ أو}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - i = i(m - 3i) \\ 2m - i = -i(m - 3i) \end{cases} \text{ أو}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2 - i)m = (3 + i) \\ (2 + i)m = (i - 3) \end{cases} \text{ أو}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2 + i)(2 - i)m = (2 + i)(3 + i) \\ (2 - i)(2 + i)m = (2 - i)(i - 3) \end{cases} \text{ أو}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m = 5(i + 1) \\ 5m = 5(i - 1) \end{cases} \text{ أو}$$

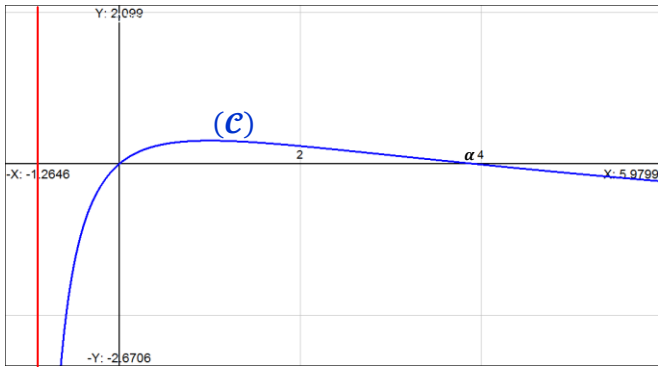
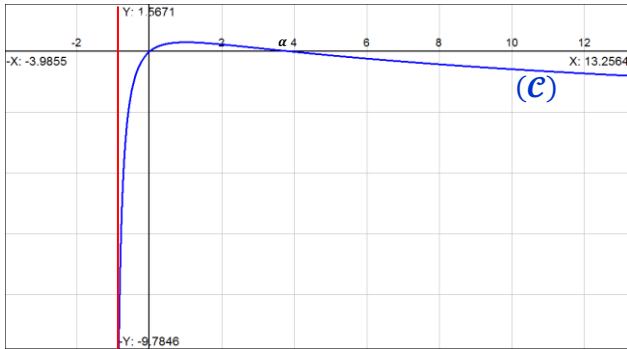
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = (i + 1) \\ m = (i - 1) \end{cases} \text{ أو}$$

و نلخص إشارة $f(x)$ في الجدول التالي :

x	-1	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	0	-
f				$\ln\left(\frac{e}{2}\right)$	
$f(x)$	-	0	+	+	0

إذن تكون الدالة f موجبة على المجال $[0, \alpha]$. و تكون سالبة على المجالين $]-1, 0[$ و $[\alpha, +\infty[$.

التمرين الرابع



التمرين الرابع

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 4 .

و نعتبر الدالة العددية φ_n المعرفة على المجال $]-1, +\infty[$ بما يلي :

$$(\forall x > -1) ; \varphi_n(x) = f(x) - \frac{1}{n}$$

φ_n دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $]-1, +\infty[$ لأنها عبارة عن فرق دالتين متصلتين و قابلتين للاشتقاق على المجال $]-1, +\infty[$.

إذن φ_n متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0, 1[$.

$$\forall x \in]0, 1[; \varphi_n'(x) = f'(x) > 0$$

إذن φ_n متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $]0, 1[$.

إذن φ_n تقابل من المجال $]0, 1[$ نحو المجال $]0, 1[$.

$$\text{ولدينا : } \varphi_n(]0, 1[) =]\varphi_n(0) ; \varphi_n(1)[= \left] \frac{-1}{n} ; \ln\left(\frac{e}{2}\right) - \frac{1}{n} \right[$$

إذن φ_n تقابل من المجال $]0, 1[$ نحو المجال $\left] \frac{-1}{n} ; \ln\left(\frac{e}{2}\right) - \frac{1}{n} \right[$.

أي أن كل عنصر من مجموعة الوصول $\left] \frac{-1}{n} ; \ln\left(\frac{e}{2}\right) - \frac{1}{n} \right[$ يقبل سابقاً واحداً من المجال $]0, 1[$.

من جهة أخرى لدينا : $\ln\left(\frac{e}{2}\right) \approx 0,3$

التمرين الرابع

من خلال جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن f دالة متصلة و تناقصية قطعاً على $]1, +\infty[$.

إذن f تقابل من المجال $]1, +\infty[$ نحو المجال $]1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{ولدينا : } f(]1, +\infty[) &= \int \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; f(1)[\\ &=]-\infty ; \ln\left(\frac{e}{2}\right)[\\ &\approx]-\infty ; 0,3[\end{aligned}$$

إذن f تقابل من المجال $]1, +\infty[$ نحو المجال $]-\infty ; \ln\left(\frac{e}{2}\right)[$.

إذن كل عنصر من مجموعة الوصول $]-\infty ; \ln\left(\frac{e}{2}\right)[$ يقبل سابقاً واحداً من مجموعة الانطلاق $]1, +\infty[$ بالتقابل f .

أي : $\forall y \in]-\infty ; \ln\left(\frac{e}{2}\right)[, \exists ! x \in]1, +\infty[: f(x) = y$.

بما أن $\ln\left(\frac{e}{2}\right) > 0$: لأن $0 \in]-\infty ; \ln\left(\frac{e}{2}\right)[$.

فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً α بالتقابل f من المجال $]1, +\infty[$.

أو بتعبير آخر : $\exists ! \alpha \in]1, +\infty[; f(\alpha) = 0$.

أي : $\exists ! \alpha > 1 ; f(\alpha) = 0$.

أو بتعبير أخير نقول أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]1, +\infty[$.

بنفس الطريقة f دالة متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $]-1 ; 1[$.

إذن فهي تقابل من المجال $]-1 ; 1[$ نحو صورته $]-1 ; 1[$.

$$\begin{aligned} \text{ولدينا : } f(]-1 ; 1[) &= \int \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) ; f(1)[\\ &=]-\infty ; \ln\left(\frac{e}{2}\right)[\end{aligned}$$

إذن f تقابل من المجال $]-1 ; 1[$ نحو المجال $]-\infty ; \ln\left(\frac{e}{2}\right)[$.

أي أن كل عنصر من المجال $]-\infty ; \ln\left(\frac{e}{2}\right)[$ يقبل سابقاً واحداً من المجال $]-1 ; 1[$ بالتقابل f .

لدينا $]-\infty ; \ln\left(\frac{e}{2}\right)[$ إذن يوجد سابق وحيد للعدد 0 من $]-1 ; 1[$.

و نلاحظ أن $f(0) = 0$ و $0 \in]-1 ; 1[$.

أي أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]-1 ; 1[$ و هو 0 .

خلاصة : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين 0 و α بحيث $\alpha > 1$. إشارة $f(x)$ على المجال $]-1, +\infty[$

ليكن x عنصراً من المجال $]-1, +\infty[$ و نفضل بين أربع حالات :

$$\begin{aligned} x \in]-1 ; 0] &\Rightarrow x \leq 0 \\ &\Rightarrow f(x) \leq f(0) ; \text{car } f \text{ est } \nearrow \text{ sur }]-1, 0[\\ &\Rightarrow f(x) \leq 0 ; \text{car } f(0) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) \text{ est une quantité négative} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in [0, 1] &\Rightarrow x \geq 0 \\ &\Rightarrow f(x) \geq f(0) ; \text{car } f \text{ est } \nearrow \text{ sur } [0, 1] \\ &\Rightarrow f(x) \geq 0 ; \text{car } f(0) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) \text{ est une quantité positive} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in [1 ; \alpha] &\Rightarrow x \leq \alpha \\ &\Rightarrow f(x) \geq f(\alpha) ; \text{car } f \text{ est } \searrow \text{ sur } [1, \alpha] \\ &\Rightarrow f(x) \geq 0 ; \text{car } f(\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) \text{ est une quantité positive} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in [1 ; +\infty[&\Rightarrow x \geq \alpha \\ &\Rightarrow f(x) \leq f(\alpha) ; \text{car } f \text{ est } \searrow \text{ sur } [\alpha, +\infty[\\ &\Rightarrow f(x) \leq 0 ; \text{car } f(\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) \text{ est une quantité négative} \end{aligned}$$

دراسة اشتقاق الدالة φ في الصفر

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} \right) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t = x^2}} \left(\frac{\ln(1 + t)}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + t) - \ln(1 + 0)}{t - 0} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{u(t) - u(0)}{t - 0} \right) ; \begin{cases} u(t) = \ln(1 + t) \\ \text{dérivable} \\ \text{sur }]-1, +\infty[\end{cases} \\ &= u'(0) = \frac{1}{1 + 0} = 1 \in \mathbb{R} \\ &= 1 = \varphi'(0) \end{aligned}$$

إذن الدالة φ قابلة للاشتقاق في الصفر. ولدينا : $\varphi'(0) = 1$.
ملاحظة : $\varphi'(0) = 1$ هو ميل المماس لـ (C_φ) في 0.

التمرين الرابع

1 II

لدينا : $(\forall t \neq 0) ; \varphi(t) = \frac{\ln(1 + t^2)}{t}$

الدالة \ln قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* .
 والدالة $t \rightarrow 1 + t^2$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها حدودية.
 ولدينا : $(\forall t \in \mathbb{R}) ; 1 + t^2 > 0$
 وهذا يعني أن جميع عناصر \mathbb{R} تقبل صوراً بالدالة $\ln(1 + t^2)$
 إذن الدالة $t \rightarrow \ln(1 + t^2)$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها عبارة
 عن مركب دالتين قابلتين للاشتقاق.
 ولدينا الدالة $t \rightarrow \frac{1}{t}$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* لأنها عبارة عن جداء دالتين
 قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}^* .

ولدينا : $(\forall t \in \mathbb{R}^*) ; \varphi'(t) = \left(\frac{\ln(1 + t^2)}{t} \right)'$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{t} \cdot \ln(1 + t^2) \right)' \\ &= \left(\frac{1}{t} \right)' \cdot \ln(1 + t^2) + \frac{1}{t} \cdot (\ln(1 + t^2))' \\ &= \frac{-\ln(1 + t^2)}{t^2} + \frac{2t}{t(1 + t^2)} \\ &= \frac{-\ln(1 + t^2)}{t^2} + \frac{2}{1 + t^2} \\ &= \frac{1}{t^2} \left(-\ln(1 + t^2) + \frac{2t^2}{1 + t^2} \right) \\ &= \frac{1}{t^2} \cdot f(t^2) \end{aligned}$$

التمرين الرابع

1 II

لدينا : $(\forall t \neq 0) ; \varphi'(t) = \frac{f(t^2)}{t^2}$

ونلاحظ أن : $(\forall t \neq 0) ; t^2 > 0$
 إذن إشارة $\varphi'(t)$ متعلقة فقط بإشارة $f(t^2)$ وسوف ندرس فقط ما
 يحدث في المجال $]0, +\infty[$ ثم نستنتج بعد ذلك المجال $]-\infty, 0[$.
 وذلك لأن دالة فردية وتمثيلها المبياني متماثل بالنسبة لأصل المعلم.

- إذا كان : $t = \sqrt{\alpha}$ فإن : $\varphi'(t) = 0$
- إذا كان : $t > \sqrt{\alpha}$ فإن : $\varphi'(t) < 0$
- إذا كان : $t < \sqrt{\alpha}$ فإن : $\varphi'(t) > 0$

و أضيف النهايتين : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$

إذن : $n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \approx 0,25 < 0,3 \approx \ln\left(\frac{e}{2}\right) \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} < \ln\left(\frac{e}{2}\right) \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{e}{2}\right) - \frac{1}{n} > 0 \\ &\Rightarrow 0 \in \left] \frac{-1}{n} ; \ln\left(\frac{e}{2}\right) - \frac{1}{n} \right[; (\forall n \geq 4) \end{aligned}$$

وبما أن الصفر عنصر من مجموعة الوصل $\left] \frac{-1}{n} ; \ln\left(\frac{e}{2}\right) - \frac{1}{n} \right[$ فإنه يمتلك سابقاً وحيداً u_n من مجموعة الانطلاق $]0, 1[$.

أو بتعبير آخر : $(\forall n \geq 4), (\exists! u_n \in]0, 1[) : \varphi_n(u_n) = 0$
 أي : $(\forall n \geq 4), (\exists! u_n \in]0, 1[) : f(u_n) - \frac{1}{n} = 0$

أي : $(\forall n \geq 4), (\exists! u_n \in]0, 1[) : f(u_n) = \frac{1}{n}$
 وهذا يعني أن المعادلة $f(x) = \frac{1}{n}$ تقبل حلاً وحيداً u_n في المجال $]0, 1[$.

التمرين الرابع

2 I

لدينا : $n \geq 4 \Rightarrow n + 1 > n$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow f(u_{n+1}) < f(u_n) ; \text{car } \begin{cases} f(u_n) = \frac{1}{n} \\ f(u_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(u_{n+1})) < f^{-1}(f(u_n)) ; \text{car } \begin{cases} f \text{ bijective} \\ f \text{ et } f^{-1} \text{ sont } \nearrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$$

$\Rightarrow (u_n)_{n \geq 4}$ est une suite strict^o ↘
 وبما أن $(u_n)_{n \geq 4}$ متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 0 ($0 < u_n < 1$) فهي متقاربة ونهايتها تُحسب كما يلي :

$$\begin{aligned} f(u_n) = \frac{1}{n} &\Rightarrow u_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = f^{-1}(0) \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0 ; \text{car } f(0) = 0 \end{aligned}$$

التمرين الرابع

1 II

لدينا : $\varphi(-0) = \varphi(0) = 0 = -0$

و : $(\forall t \neq 0) ; \varphi(-t) = \frac{\ln(1 + (-t)^2)}{(-t)} = \frac{-\ln(1 + t^2)}{t}$

إذن نستنتج أن : $(\forall t \in \mathbb{R}) ; \varphi(-t) = -\varphi(t)$
 وهذا يعني أن الدالة φ فردية.

التمرين الأول

1 II

دراسة الاتصال في الصفر

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t^2)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{h(t) - h(0)}{t - 1} \right) = h'(0) = 0 = \varphi(0) \end{aligned}$$

و ذلك بحيث $h(t) = \ln(1 + t^2)$ وهذه الدالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} بأكمله.
 لأن $t \rightarrow 1 + t^2$ حدودية والدالة \ln قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* .

و كذلك : $(\forall t \in \mathbb{R}) ; 1 + t^2 > 0$

إذن : $(\forall t \in \mathbb{R}) ; h'(t) = \frac{2t}{1 + t^2}$

من أجل $t = 0$ لدينا : $h'(0) = \frac{2 \times 0}{1 + 0^2} = 0$

نستنتج إذن أن : $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \varphi(0)$
 وهذا يعني أن الدالة φ متصلة في 0.

أو بتعبير آخر نكتب : $F(a) = 0$ $(\forall x \in I)$; $F'(x) = f(x)$:
 لدينا دالة متصلة على $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ و
 0 عنصر من المجال $]-\infty, +\infty[$.

إذن الدالة : $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow \int_0^x \varphi(t) dt$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على \mathbb{R} و التي تنعدم في 0 .

أي : $g(0) = 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g'(x) = \varphi(x)$ و بالتالي g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

و لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g'(x) = \varphi(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$

التمرين الرابع



لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g'(x) = \varphi(x)$

نستنتج إذن إشارة $g'(x)$ انطلاقا من إشارة $\varphi(x)$ على \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$-\sqrt{\alpha}$	0	$\sqrt{\alpha}$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	+		+	-
φ	0	$\frac{-2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$	0	$\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$	0
$g'(x)$	-	-	0	+	+
g	$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$		0		$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

التمرين الرابع



في البداية لدينا : $\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt = \int_1^x \left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt$

$= [(\ln t)^2]_1^x - \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt$

$= (\ln x)^2 - \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt$

$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt + \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt = (\ln x)^2$

$\Rightarrow 2 \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt = (\ln x)^2$

$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt = \frac{(\ln x)^2}{2}$

$\Rightarrow I = 2 \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt = (\ln x)^2$

التمرين الرابع



ليكن $x \geq 1$. من جهة أولى لدينا :

$\int_1^x \varphi(t) dt = [g(t)]_1^x$; car g est une primitive de φ sur $[1, +\infty[$
 $= g(x) - g(1)$ (1)

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right)$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x}\right)$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right) \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$= 2 \times 0 + 0 \times \ln(1+0) = 0$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right)$

$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(1+t^2)}{t}$

$= -\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t} = 0$

و لدينا : $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{1+\alpha} - \ln(1+\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2\alpha}{1+\alpha} = \ln(1+\alpha)$

$\Leftrightarrow \varphi(\sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(1+(\sqrt{\alpha})^2)}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\ln(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha}}$

$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$

نرسم إذن جدول تغيرات الدالة كما يلي :

x	$-\infty$	$-\sqrt{\alpha}$	0	$\sqrt{\alpha}$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	+		+	-
φ	0	$\frac{-2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$	0	$\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$	0

التمرين الرابع



ليكن x عددا حقيقيا . لدينا : $g(-x) = \int_0^{-x} \varphi(t) dt$

نضع $y = -t$ إذن $dy = -dt$

إذا كان $t = 0$ فإن $y = 0$

إذا كان $t = -x$ فإن $y = x$

إذن التكامل يُصبح : $g(-x) = \int_0^{-x} \varphi(t) dt = \int_0^x \varphi(-y) (-dy)$

$= \int_0^x -\varphi(y) (-dy)$; car φ est impaire

$= \int_0^x \varphi(y) dy = g(x)$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(-x) = g(x)$

و هذا يعني أن الدالة g دالة زوجية .

التمرين الرابع



تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصرا من I

فإن الدالة : $F : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال I و التي تنعدم في a .

$$\begin{aligned} x \geq 0 &\Rightarrow u(x) \leq u(0) ; \text{ car } u \text{ est } \searrow \text{ sur } [0, +\infty[\\ &\Rightarrow u(x) \leq 0 ; \text{ car } u(0) = 0 \\ &\Rightarrow \ln(1+x) - x \leq 0 \\ &\Rightarrow \ln(1+x) \leq x \end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall x \geq 0) ; \ln(1+x) \leq x$ (*)

التمرين الرابع

من جهة أولى لدينا : $t \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{t^2} > 0$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) > 1$$

$$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) > 0 ; \text{ car } t \geq 1$$

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \geq 0 \quad (1)$$

car : $\left| \begin{array}{l} 1 \leq x \text{ et } \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \\ \text{est continue sur } [1, +\infty[\end{array} \right.$

و من جهة ثانية لدينا : $t \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{t^2} > 0$

$$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \leq \frac{1}{t^2} ; \text{ d'après } (*)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \leq \frac{1}{t^3} ; \text{ car } t \geq 1 > 0$$

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \leq \int_1^x \left(\frac{1}{t^3}\right) dt$$

car ces deux fonctions sont continues et $1 \leq x$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\right) dt \leq \left[\frac{1}{-2t^2}\right]_1^x$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\right) dt \leq \frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{2}$$

$$\text{Comme } \frac{1}{2x^2} \geq 0 \text{ Alors } \frac{-1}{2x^2} \leq 0$$

$$\text{D'où } \left(\frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\right) dt \leq \frac{1}{2} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall x \geq 1) ; 0 \leq \int_1^x \left(\frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\right) dt \leq \frac{1}{2}$$

التمرين الرابع

$$\text{لدينا : } (\forall x \geq 1) ; 0 \leq \int_1^x \left(\frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\right) dt \leq \frac{1}{2}$$

إن حسب نتيجة السؤال (3) ب) نكتب :

$$0 \leq g(x) - g(1) - (\ln x)^2 \leq \frac{1}{2}$$

ما يهمني في هذا التأطير هو الشق الأيسر فقط .

$$0 \leq g(x) - g(1) - (\ln x)^2$$

$$\text{أي : } g(x) \geq g(1) + (\ln x)^2$$

$$\begin{aligned} \int_1^x \varphi(t) dt &= \int_1^x \left(\frac{\ln(t^2 + 1)}{t}\right) dt : \text{ من جهة ثانية لدينا} \\ &= \int_1^x \left(\frac{\ln\left(t^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\right)}{t}\right) dt \\ &= \int_1^x \left(\frac{\ln(t^2)}{t} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)}{t}\right) dt \\ &= 2 \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt + \int_1^x \left(\frac{1}{t}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= (\ln x)^2 + \int_1^x \left(\frac{1}{t}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \quad (2) \end{aligned}$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall x \geq 1) ; g(x) - g(1) = (\ln x)^2 + \int_1^x \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

التمرين الرابع

للإجابة على هذا السؤال ندرس تغيرات الدالة العددية u المعرفة على المجال $]-1, +\infty[$ بما يلي : $u(x) = \ln(1+x) - x$. في البداية نلاحظ أن u متصلة وقابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$ لأنها عبارة عن فرق دالتين متصلتين وقابلتين للاشتقاق على $]-1, +\infty[$

$$(\forall x > -1) ; u'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

نلاحظ أن إشارة $u'(x)$ متعلقة فقط بإشارة x

$$\text{لأن } (\forall x > -1) ; \frac{-1}{1+x} < 0$$

و نضيف كذلك نهايتي u عند محددات مجموعة تعريفها

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} u(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (\ln(1+x) - x) : \text{ لدينا} \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t=1+x}} (\ln t - t + 1) \\ &= -\infty - 0 + 1 = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1+x) - x) : \text{ لدينا} \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t=1+x}} (\ln t - t + 1) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} t \left(\frac{\ln t}{t} - 1 + \frac{1}{t}\right) \\ &= (+\infty)(0 - 1 - 0) = -\infty \end{aligned}$$

و نرسم جدول تغيرات الدالة كما يلي :

x	-1	0	$+\infty$
x		-	+
$u'(x)$		+	-
u		0	
		\nearrow	\searrow
		$-\infty$	$-\infty$

من هذا الجدول نستغل تناقصية الدالة u على $[0, +\infty[$.

التمرين الرابع



من جهة أولى لدينا :

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \left(\frac{2}{1+\frac{1}{k}}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{2}{k} \cdot \frac{k}{k+1} - \ln\left(\frac{1+k}{k}\right)$$

$$= \frac{2}{k+1} - (\ln(1+k) - \ln k) \quad (\otimes)$$

من جهة ثانية لدينا من أجل كل عدد k من \mathbb{N}^* : $\ln(1+k) - \ln k < \frac{1}{k}$
 إذن من أجل العدد $(k+1)$ من \mathbb{N}^* نجد :

$$\ln(2+k) - \ln(1+k) < \frac{1}{k+1}$$

نضرب الطرفين في العدد الموجب 2 نجد :

$$2 \ln(2+k) - 2 \ln(1+k) < \frac{2}{k+1}$$

نضيف إلى كلا الطرفين الكمية $-(\ln(1+k) - \ln k)$ فنحصل على :

$$2 \ln(2+k) - 3 \ln(1+k) + \ln k < \frac{2}{k+1} - (\ln(1+k) - \ln k)$$

إذن حسب النتيجة \otimes نستنتج أن :

$$2 \ln(2+k) - 3 \ln(1+k) + \ln k < f\left(\frac{1}{k}\right) \quad (\ominus)$$

و من هذه النتيجة \ominus نكتب :

$$(2 \ln(2+k) - 2 \ln(1+k)) - (\ln k - \ln(1+k)) <$$

$$\Rightarrow 2 \ln\left(\frac{2+k}{1+k}\right) - (\ln(1+k) - \ln k) < f\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow 2 \ln\left(\frac{2+k}{1+k}\right) - \ln\left(\frac{1+k}{k}\right) < f\left(\frac{1}{k}\right) \quad (\#)$$

التمرين الرابع



ليكن k و n عددان صحيحان طبيعيين غير منعدمان . لدينا :

$$2 \ln\left(\frac{2+k}{1+k}\right) - \ln\left(\frac{1+k}{k}\right) < f\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \left(2 \ln\left(\frac{2+k}{1+k}\right) - \ln\left(\frac{1+k}{k}\right)\right) < \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow 2 \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{2+k}{1+k}\right) - \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{1+k}{k}\right) < S_n \quad (*)$$

من جهة أولى لدينا :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{2+k}{1+k}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{2+n}{1+n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{2+n}{1+n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2+n}{2}\right)$$

من جهة ثانية لدينا :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{1+k}{k}\right) = \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{1+n}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{1+n}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1+n}{1}\right) = \ln(1+n)$$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(1) + (\ln x)^2) = g(1) + (+\infty) = +\infty$
 إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$g(x) \geq \frac{g(1) + (\ln x)^2}{x \rightarrow +\infty} + \infty$$

إذن حسب خاصيات الترتيب و النهايات نكتب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
 و بنفس الطريقة ، لكن هذه المرة ننطلق من التأطير السابق بأكمله .

$$0 \leq g(x) - g(1) - (\ln x)^2 \leq \frac{1}{2}$$

و نضرب جميع الأطراف في العدد الموجب $\frac{1}{x}$ نحصل على :

$$0 \leq \frac{g(x)}{x} - \frac{g(1)}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x} \leq \frac{1}{2x}$$

نضيف إلى جميع الأطراف الكمية $\left(\frac{g(1)}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}\right)$ نجد :

$$\left(\frac{g(1)}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}\right) \leq \frac{g(x)}{x} \leq \left(\frac{1}{2x} + \frac{g(1)}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}\right)$$

نحتاج إلى حساب النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(\sqrt{x}))^2}{(\sqrt{x})^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln \sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$= 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 4 \times 0^2 = 0$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(1)}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}\right) = 0 + 0 = 0$

و كذلك : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2x} + \frac{g(1)}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}\right) = 0 + 0 + 0 = 0$
 إذن التأطير ■ يُصبح :

$$\left(\frac{g(1)}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}\right) \leq \frac{g(x)}{x} \leq \left(\frac{1}{2x} + \frac{g(1)}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}\right)$$

و منه حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

و من النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

نستنتج أن منحنى الدالة g يقبل فرعاً شلجياً اتجاهه محور الأفاسيل بجوار $+\infty$

التمرين الرابع



لدينا حسب ما سبق : $(\forall x \geq 0) ; \ln(1+x) \leq x$ (*)

ليكن k عدداً صحيحاً طبيعياً غير منعدم . $\frac{1}{k} > 0$

$$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k} ; \text{ d'après } (*)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1+k}{k}\right) < \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \ln(1+k) - \ln k < \frac{1}{k}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{p=0}^n \left(\frac{(-1)^p x^{p+1}}{p+1} \right) +$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right) + (-1)^{n+1} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} \right) dt$$

التمرين الرابع

3 IV

نطلق من العلاقتين التاليتين:

$$\begin{cases} \frac{2x}{1+x} = 2x \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \right) \\ \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right) + (-1)^{n+1} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} \right) dt \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) \\ &= 2x \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \right) - \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right) - \\ &\quad - (-1)^{n+1} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} \right) dt \\ &= \sum_{k=0}^n 2(-1)^k x^{k+1} + \frac{2(-1)^{n+1} x^{n+2}}{1+x} - \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right) + \\ &\quad + (-1)^{n+2} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} \right) dt \\ &= \sum_{k=0}^n -2(-1)^{k+1} x^{k+1} + \frac{2(-1)^{n+1} x^{n+2}}{1+x} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{(-1)^k x^k}{k} \right) + (-1)^{n+2} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} \right) dt \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} -2(-1)^k x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{(-1)^k x^k}{k} \right) \right) + \frac{2(-1)^{n+1} x^{n+2}}{1+x} + \\ &\quad + (-1)^{n+2} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} \right) dt \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \left(-2 + \frac{1}{k} \right) (-1)^k x^k \right) + \frac{2(-1)^{n+1} x^{n+2}}{1+x} + \\ &\quad + (-1)^{n+2} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} \right) dt \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1-2k}{k} \right) (-1)^k x^k \right) + \frac{2(-1)^{n+1} x^{n+2}}{1+x} + \\ &\quad + (-1)^{n+2} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} \right) dt \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} (-1) \left(\frac{2k-1}{k} \right) (-1)^{k-1} x^k \right) + \frac{2(-1)^{n+1} x^{n+2}}{1+x} + \\ &\quad + (-1)^{n+2} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} \right) dt \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{2k-1}{k} \right) (-1)^{k-1} x^k \right) + \frac{2(-1)^{n+1} x^{n+2}}{1+x} + \\ &\quad + (-1)^{n+2} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} \right) dt \end{aligned}$$

إذن عند الرجوع إلى الكتابة (*) نحصل على:

$$\begin{aligned} -2 \ln \left(\frac{2+n}{2} \right) - \ln(1+n) &< S_n \\ \Leftrightarrow \ln \left(\frac{2+n}{2} \right)^2 + \ln \left(\frac{1}{1+n} \right) &< S_n \\ \Leftrightarrow \ln \left(\left(\frac{2+n}{2} \right)^2 \times \left(\frac{1}{1+n} \right) \right) &< S_n \\ \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \ln \left(\frac{(2+n)^2}{4(n+1)} \right) &< S_n \end{aligned}$$

لدينا : $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{(2+n)^2}{4(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4n + 4} \right) = +\infty$

car : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{4n} \right) = +\infty$ et $\lim_{m \rightarrow \infty} \ln m = +\infty$

و بالتالي نحصل على الوضعية التالية : $\ln \left(\frac{(2+n)^2}{4(n+1)} \right) < S_n$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = +\infty$

التمرين الرابع

1 IV

ليكن x عنصرا من المجال $]0,1[$.
سوف نستعمل في هذا السؤال قاعدة مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها المخالف لـ 1.
ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

$$(\forall q \neq 1) ; 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

نعتبر المتتالية الهندسية التي أساسها $(-x)$ المخالف لـ 1.

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} 1 + (-x) + (-x)^2 + \dots + (-x)^n &= \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 - (-x)} \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^n (-x)^k x^k &= \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{1+x} \\ \Rightarrow \frac{1}{1+x} &= \left(\sum_{k=0}^n (-x)^k x^k \right) + \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{1+x} \end{aligned}$$

التمرين الرابع

2 IV

$$\frac{1}{1+t} = \left(\sum_{p=0}^n (-x)^p t^p \right) + \frac{(-1)^{n+1} \cdot t^{n+1}}{1+t}$$

كلا الطرفين عبارة عن دالتين متصلتين على $[0, x]$ حيث $x \in]0,1[$.

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1+t} \right) dt = \int_0^x \left(\sum_{p=0}^n (-1)^p t^p + \frac{(-1)^{n+1} \cdot t^{n+1}}{1+t} \right) dt$$

$$[\ln|1+t|]_0^x = \int_0^x \left(\sum_{p=0}^n (-1)^p t^p \right) dt + \int_0^x \left(\frac{(-1)^{n+1} \cdot t^{n+1}}{1+t} \right) dt$$

$$\ln(1+x) = \sum_{p=0}^n \left((-1)^p \int_0^x t^p dt \right) +$$

$$\ln(1+x) = \sum_{p=0}^n \left((-1)^p \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} \right]_0^x \right) + (-1)^{n+1} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} \right) dt$$

ليكن x عنصرا من المجال $]0,1[$ و m عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{m+1} \left(\frac{2k-1}{k} \right) (-1)^{k-1} x^k \right) + \frac{2(-1)^{m+1} x^{m+2}}{1+x} + (-1)^{m+2} \int_0^x \left(\frac{t^{m+1}}{1+t} \right) dt$$

Ensuite , on fait tendre m vers $+\infty$ and we get

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{m+1} \left(\frac{2k-1}{k} \right) (-1)^{k-1} x^k \right) + \\ &+ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2(-1)^{m+1} x^{m+2}}{1+x} \right) + \\ &+ \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{m+2} \int_0^x \left(\frac{t^{m+1}}{1+t} \right) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{2k-1}{k} \right) (-1)^{k-1} x^k \right) + \left(\frac{2(\pm 1)}{1+x} \right) (0) + \\ &+ (\pm) \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^x \left(\frac{t^{m+1}}{1+t} \right) dt}_{=0} \\ \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{2k-1}{k} \right) (-1)^{k-1} x^k \right) \\ \Rightarrow f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{2k-1}{k} \right) (-1)^{k-1} x^k \right) \end{aligned}$$

En d'autres termes : la série de fonctions $\sum f_n(x)$
Converge vers la fonction somme $f(x)$
sur l'intervalle $]0,1[$
(Cours des fonctions Analytiques)

من جهة أولى ، لدينا من أجل $x \in]0,1[$

$$\begin{aligned} t \in [0, x] &\Rightarrow t \geq 0 \\ &\Rightarrow t^{n+1} \geq 0 ; \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \frac{t^{n+1}}{t+1} \geq 0 ; \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1} \right) dt \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

car la condition de la continuité est vérifiée et $0 \leq x$

من جهة ثانية لدينا من أجل $x \in [0, x]$

$$\begin{aligned} t \in [0, x] &\Rightarrow t \leq x \\ &\Rightarrow t^{n+1} \leq x^{n+1} ; \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \frac{t^{n+1}}{t+1} \leq \frac{x^{n+1}}{t+1} ; t \geq 0 \\ &\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1} \right) dt \leq \int_0^x \left(\frac{x^{n+1}}{t+1} \right) dt \\ &\text{car ces deux fonctions sont continues} \\ &\text{sur } [0, x] \text{ et que } 0 < x \\ &\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1} \right) dt \leq x^{n+1} \int_0^x \left(\frac{1}{t+1} \right) dt \\ &\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1} \right) dt \leq x^{n+1} [\ln|t+1|]_0^x \\ &\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1} \right) dt \leq x^{n+1} \cdot \ln(x+1) \\ &\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1} \right) dt \leq x^{n+1} \cdot x \\ &\text{car : } \forall x \geq 0 ; \ln(1+x) \leq x \\ &\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1} \right) dt \leq x^{n+2} \quad (2) \end{aligned}$$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $0 \leq \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1} \right) dt \leq x^{n+2}$

نلاحظ أن (x^{n+2}) عبارة عن متتالية هندسية أساسها x عدد حقيقي

موجب و أصغر من 1 . إذن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (x^{n+2}) = 0$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$0 \leq \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1} \right) dt \leq \underbrace{x^{n+2}}_{n \rightarrow \infty} \underbrace{0}_{n \rightarrow \infty}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1} \right) dt \right) = 0$$

أجوبة امتحان مدينة أسفي 2010

التمرين الأول

1

$$J = M(0,1) \in E ; \text{car } (0,1) \in \mathbb{R}^2$$

$$I = M(1,0) \in E ; \text{car } (1,0) \in \mathbb{R}^2$$

التمرين الأول

1

$$E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et } E \neq \emptyset$$

$$M(x,y) + M(x',y') = M(x+x' ; y+y')$$

التمرين الأول

2

$$J^2 = J - I ; \text{ simple calcul matriciel}$$

التمرين الأول

2

$$E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et } E \neq \emptyset$$

$$M(x,y) \times M(x',y') = (xI + yJ) \times (x'I + y'J) \\ = M(xx' - yy' ; xy' + yx' + yy') \in E$$

التمرين الأول

3

يكفي أن نستعمل استقرار E في المجموعتين السابقتين و نبين أن :

- + و \times قانوني تركيب داخليين في E .
- $(E, +)$ زمرة تبادلية
- القانون \times تجميعي في (E, \times)
- القانون \times توزيعي بالنسبة للقانون +
- القانون \times تبادلي

التمرين الأول

4

The implication bellow is obvious :

$$x = y = 0 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 = 0$$

What about the other ?

On the one hand we have :

$$x^2 + xy + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = -xy \\ \Rightarrow -xy \geq 0 \\ \Rightarrow xy \leq 0 \quad (1)$$

On the other hand we're gonna get :

$$x^2 + xy + y^2 = 0 \Rightarrow (x+y)^2 = xy \\ \Rightarrow xy \geq 2 \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow xy = 0 \\ \Rightarrow x = 0 \text{ or } y = 0$$

if only one of those is different to 0 then $x^2 + xy + y^2 \neq 0$ it's too bad !
So both x and y must be equal to zero
That's why $x = y = 0$

التمرين الأول

4

$$M(x,y) \times M\left(\frac{x+y}{\Delta} ; \frac{-y}{\Delta}\right) = M(1,0) = I ; \text{ it's easy !}$$

التمرين الأول

4

- يكون $(E, +, \times)$ جسما تبادليا إذا و فقط إذا كان :
 - $(E, +, \times)$ حلقة واحدة و تبادلية .
 - كل عنصر من E ما عدا $M(0,0)$ يقبل مماثلا بالنسبة للقانون \times .
- الشرط الأول نحصل عليه من خلال ما سبق. أما الشرط الثاني فسوف نستعمل من أجله التكافؤ الوارد في السؤال (4) أ) و كذلك نتيجة السؤال ب) (التماثل) .

التمرين الأول

5

φ تشاكل من (F, τ) نحو (E, \times)

$$\varphi((x,y) \tau (x',y')) = \varphi(x,y) \times \varphi(x',y') :$$

و سوف نستعمل من أجل ذلك النتيجة التالية :

$$M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' - yy' ; xy' + yx' + yy')$$

أما التقابل فهو سهل لأن المعادلة $\varphi(x,y) = M(a,b)$ ذات المجهول

(x,y) تقبل حلا وحيدا في F و هو الزوج (a,b) حيث $M(a,b)$ عنصر من E .

التمرين الأول

5

صورة الزمرة التبادلية (E, \times) بالتشاكل التقابلي φ^{-1} هي الزمرة التبادلية (F, τ) .

$$\varphi^{-1}(E, \times) = (F, \tau) :$$

يعني : نستنتج إذن مميزات (F, τ) انطلاقا من مميزات (E, \times) .

إذن : (F, τ) زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو الزوج

$$\varphi^{-1}(M(1,0)) = (1,0) \text{ و كل زوج } (x,y) \text{ يقبل مماثلا في } F$$

$$\text{و هو الزوج } \varphi^{-1}\left(M\left(\frac{x+y}{\Delta} ; \frac{-y}{\Delta}\right)\right) = \left(\frac{x+y}{\Delta} ; \frac{-y}{\Delta}\right)$$

التمرين الثاني

1

simple calcul

التمرين الثاني

1

l'équation (E) admet deux solutions :

$$m(i - \sqrt{3}) \text{ et } 2m$$

التمرين الثاني

1

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{m(i - \sqrt{3})}{2m} = e^{\frac{i5\pi}{6}}$$

التمرين الثاني

2

$$(z' - 0) = e^{\frac{i5\pi}{6}}(z - 0)$$

$$\Leftrightarrow F \text{ est une rotation de centre } O \text{ et d'angle } \left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

التمرين الثاني

2

l'image du cercle (C) est le cercle (C') de centre

$$\Omega' \left(-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \right) \text{ et du même rayon } 2$$

التمرين الثاني

3

soit à prouver la véracité du prédicat suivant :

$$(P_n) : z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6}\right)}$$

le test de départ est trivial

$$\text{car } z_0 = \text{aff}(M_0) = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi \cdot 0}{6}\right)} = i$$

On suppose que (P_n) est vraie pour un certain entier naturel n fixé

$$M_{n+1} = F(M_n) \Leftrightarrow z_{n+1} = e^{\frac{5i\pi}{6}} \cdot z_n \\ \Leftrightarrow z_{n+1} = e^{\frac{5i\pi}{6}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6}\right)} \\ \Leftrightarrow z_{n+1} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi(n+1)}{6}\right)}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} (P_0) \text{ est vraie} \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{d'où : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6}\right)}$$

pour l'implication inverse on a :

$$\begin{cases} x \equiv x_0 \ [60] \\ x_0 \text{ sol de } (S) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv x_0 \ [60] \\ x_0 \equiv 0 \ [12] \\ x_0 \equiv 3 \ [5] \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0 \ [12] \\ x \equiv 3 \ [5] \end{cases} \\ \Rightarrow x \text{ est solution de } (S)$$

التمرين الثاني

د

4

On choisit tout d'abord une solution particulière de l'équation (E) parmi les couples : $\{(5k - 6 ; 12k - 15) ; k \in \mathbb{Z}\}$

Pour $k = 1$ on obtient $(k_0, l_0) = (-1, -3)$

d'où $x_0 = 12k_0 = -12$

$$x \text{ est solution de } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \ [60] \\ x \equiv -12 \ [60] \\ x = 60k - 12 ; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

التمرين الثاني

ا

5

$$\begin{aligned} R_n &= \{n \in \mathbb{N} ; n \equiv 0 \ [12] \text{ et } n \equiv 3 \ [5]\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} ; n = 60k - 12 ; k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} ; n = 60k - 12 \geq 0\} \\ &= \{60k - 12 ; k \in \mathbb{N}^*\} \end{aligned}$$

التمرين الثالث

ا

1

x	0	$+\infty$
$g'_n(x)$		+
g_n	$-\infty$	$+\infty$

التمرين الثالث

ب

1

لدينا $g_n(1) = 0$:
 لدراسة إشارة $(x - 1)g_n(x)$ ناقش الحالتين $x < 1$ و $x > 1$
 ثم استغل تزايدية الدالة g_n على المجال $]0, +\infty[$.
 وكذلك كون $g_n(1) = 0$ وسوف تحصل على الجدول التالي :

x	0	1	$+\infty$
$g_n(x)$	-	0	+

التمرين الثالث

ا

2

it's an easy calculus, just do it

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= n(x-1)^{n-1} \ln x + \frac{(x-1)^n}{x} \\ &= (x-1)^{n-1} \left(n \ln x + \frac{x-1}{x} \right) \\ &= (x-1)^{n-1} g_n(x) \end{aligned}$$

التمرين الثاني

ب

3

$$\begin{aligned} n \equiv p \ [12] &\Leftrightarrow n = p + 12k ; k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi p}{6} + 10k\pi)} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi p}{6})} \\ &\Leftrightarrow z_n = z_p \\ &\Leftrightarrow M_n = M_p \end{aligned}$$

التمرين الثاني

ج

3

$$S = \{(5k - 6 ; 12k - 15) ; k \in \mathbb{Z}\}$$

المراحل المتبعة تجدونها في الامتحانات السابقة في هذا الكتاب .

التمرين الثاني

د

3

$$\begin{aligned} M_n \in (O, \vec{u}) &\Leftrightarrow z_n \in \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6})} \in \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6}\right) \equiv 0 \ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6}\right) = 2m\pi ; \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 3\pi + 5\pi n = 12m\pi ; \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 12m - 5n = 3 ; \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 5k - 6 \\ n = 12k - 15 \end{cases} ; \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N} \Rightarrow 12k - 15 \geq 0 \\ \Rightarrow k \geq \frac{15}{12} \approx 1,25 \\ \Rightarrow k \geq 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow n = 12k - 15 ; \text{ avec } k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \end{aligned}$$

التمرين الثاني

ا

4

$$\begin{aligned} (k_0, l_0) \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \begin{cases} 12k_0 - 5l_0 = 3 \\ x_0 = 12k_0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 5l_0 = 3 \\ x_0 = 12k_0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 3 = 5l_0 \\ x_0 = 12k_0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \equiv 3 \ [5] \\ x_0 \equiv 0 \ [12] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x_0 \text{ est solution de } (S) \end{aligned}$$

التمرين الثاني

ب

4

soit à démontrer l'équivalence suivante :

$$x \text{ est solution de } (S) \Leftrightarrow x \equiv x_0 \ [60]$$

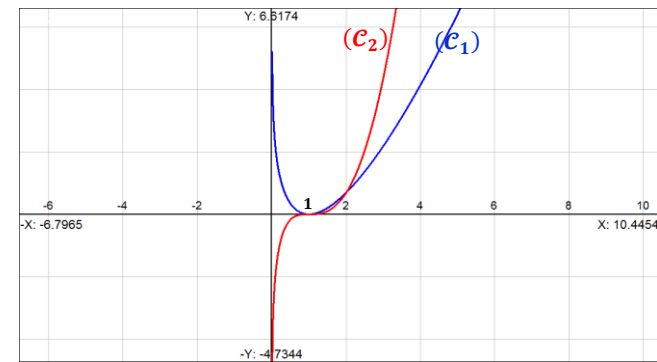
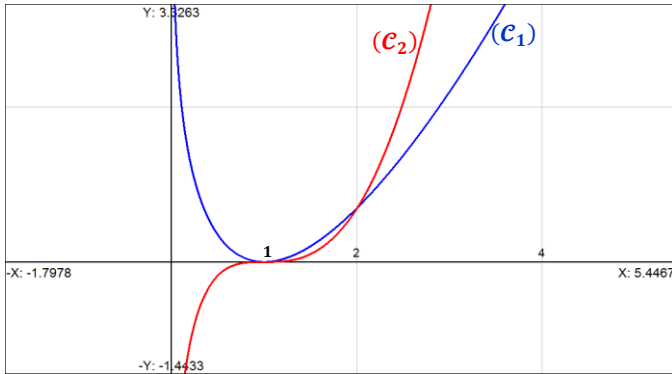
$$\begin{aligned} \begin{cases} x \text{ sol de } (S) \\ x_0 \text{ sol de } (S) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0 \ [12] \text{ et } x_0 \equiv 0 \ [12] \\ x \equiv 3 \ [5] \text{ et } x_0 \equiv 3 \ [5] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (x - x_0) \equiv 0 \ [12] \\ (x - x_0) \equiv 0 \ [5] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 12/(x - x_0) \\ 5/(x - x_0) \end{cases} \\ &\Rightarrow 12 \times 5/(x - x_0) ; \text{ car } 12 \wedge 5 = 1 \\ &\Rightarrow 60/(x - x_0) \\ &\Rightarrow x \equiv x_0 \ [60] \end{aligned}$$

si n est pair :

x	0	1	2	+∞
ln x	-	+	+	+
(x-1) ⁿ	+	+	+	+
(x-2)	-	-	+	+
f _{n+1} (x) - f _n (x)	+	-	+	+

si n est impair :

x	0	1	2	+∞
ln x	-	+	+	+
(x-1) ⁿ	-	+	+	+
(x-2)	-	-	+	+
f _{n+1} (x) - f _n (x)	-	-	+	+



$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^e |f_1(x) - f_2(x)| dx \\ &= \int_1^2 |f_1(x) - f_2(x)| dx + \int_2^e |f_1(x) - f_2(x)| dx \\ &= \int_1^2 (f_1(x) - f_2(x)) dx + \int_2^e (f_2(x) - f_1(x)) dx \\ &= \int_1^2 (f_1(x) - f_2(x)) dx + \int_2^e (f_2(x) - f_1(x)) dx \\ &= \int_1^2 f_1(x) dx - \int_1^2 f_2(x) dx + \int_2^e f_2(x) dx - \int_2^e f_1(x) dx \\ &= \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_4 \end{aligned}$$

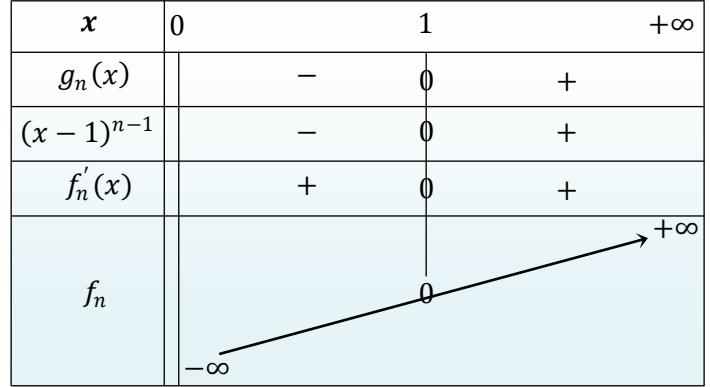
si n est pair :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^n \ln x = "(1)(-\infty)" = -\infty$$

n pair

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^n \ln x = +\infty$$

n pair



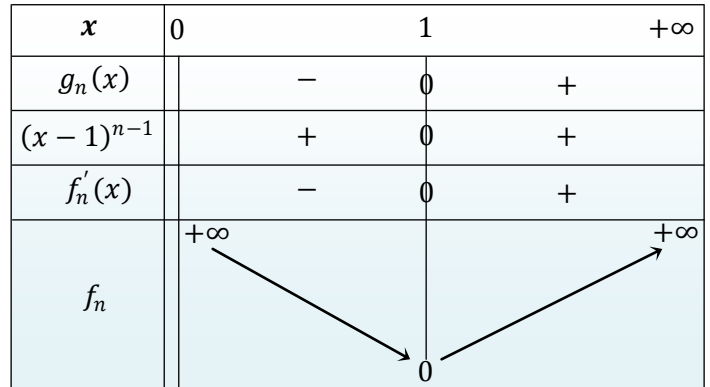
si n est impair :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^n \ln x = "(-1)(-\infty)" = +\infty$$

n impair

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^n \ln x = "(+\infty)(+\infty)" = +\infty$$

n impair



في حالة n عدد زوجي أو n عدد فردي لدينا :

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \pm\infty \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{محور الأرتيب مقارب} \\ \text{عموديا لطفزحني } (C_n) \\ \text{على يمين} \end{pmatrix}$$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f_n(x)}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x-1)^n}{x} \right) \ln x : \text{ لدينا } \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^n}{x} \right) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \\ &= (+\infty) \times (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

إن (C_n) يقبل فرعا شلجما اتجاهه محور الأرتيب بجوار +∞ كيفما كانت زوجية العدد n.

التمرين الثالث

1 II

$$x \in]0,1[\Rightarrow x < 1$$

$$\Rightarrow x^2 < x ; \text{ avec } x \text{ positif}$$

$$\Rightarrow (\exists t \in \mathbb{R}) ; x^2 \leq t \leq x$$

$$\Rightarrow \ln(x^2) \leq \ln t \leq \ln x ; t - 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow 2 \ln x \leq \frac{(t-1) \ln t}{(t-1)} \leq \ln x ; t - 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow 2 \ln x \leq \frac{f_1(t)}{(t-1)} \leq \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{2 \ln x}{(t-1)^3} \geq \frac{f_1(t)}{(t-1)^4} \geq \frac{\ln x}{(t-1)^3} ; \text{ car } \frac{1}{(t-1)^3} < 0$$

$$\Rightarrow \int_x^{x^2} \frac{2 \ln x}{(t-1)^3} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{f_1(t)}{(t-1)^4} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{\ln x}{(t-1)^3} dt$$

car ces fonctions sont continues et $x > x^2$

$$\Rightarrow 2 \ln x \int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)^3} \leq F(x) \leq \ln x \int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)^3}$$

التمرين الثالث

1 2 II

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)^3} = \int_x^{x^2} (t-1)^{-3} dt = \left[\frac{-1}{2(t-1)^2} \right]_x^{x^2}$$

$$= \frac{-1}{2(x^2-1)^2} + \frac{1}{2(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x}{2(x^2-1)^2}$$

التمرين الثالث

2 II

$$2 \ln x \int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)^3} \leq F(x) \leq \ln x \int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2 + 2x) \ln x}{(x^2 - 1)^2} \leq F(x) \leq \frac{(x^2 + 2x) \ln x}{2(x^2 - 1)^2}$$

التمرين الثالث

3 2 II

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x \ln x) \cdot \left(\frac{x+2}{(x^2-1)^2} \right)}{0} \leq F(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x \ln x) \cdot \left(\frac{x+2}{2(x^2-1)^2} \right)}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0 = F(0)$$

$$\Rightarrow F \text{ est continue à droite en } 0$$

التمرين الثالث

4 2 II

$$F(x) \leq \frac{(x^2 + 2x)}{2(x+1)^2} \cdot \frac{(\ln x - \ln 1)}{x-1} \cdot \frac{1}{(x-1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = -\infty$$

هندسيا نقول أن منحنى الدالة F يقبل نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $(-1; F(-1))$ موجه نحو الأسفل .

$$\mathcal{A}_1 = \int_1^2 f_1(x) dx = \int_1^2 \frac{(x-1) \cdot \ln x}{u' \cdot v} dx$$

$$= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x}{2} - 1 \right) dx$$

$$= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{4} - x \right]_1^2$$

$$= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x - \frac{x^2}{4} + x \right]_1^2 = \frac{1}{4}$$

$$\mathcal{A}_2 = \int_1^2 f_2(x) dx = \int_1^2 \frac{(x^2 - 2x + 1) \cdot \ln x}{u' \cdot v} dx$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3} - x + 1 \right) dx$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \ln x - \left(\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + x \right) \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{2 \ln 2}{3} - \frac{8}{9} \right) + \frac{11}{18} = \frac{2 \ln 2}{3} - \frac{5}{18}$$

$$\mathcal{A}_3 = \int_2^e f_2(x) dx = \int_2^e \frac{(x^2 - 2x + 1) \cdot \ln x}{u' \cdot v} dx$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \ln x \right]_2^e - \int_2^e \left(\frac{x^2}{3} - x + 1 \right) dx$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \ln x - \left(\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + x \right) \right]_2^e$$

$$= \frac{2e^3}{9} - \frac{e^2}{2} - \frac{2 \ln 2}{3} + \frac{8}{9}$$

$$\mathcal{A}_4 = \int_2^e f_1(x) dx = \int_2^e \frac{(x-1) \cdot \ln x}{u' \cdot v} dx$$

$$= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_2^e - \int_2^e \left(\frac{x}{2} - 1 \right) dx$$

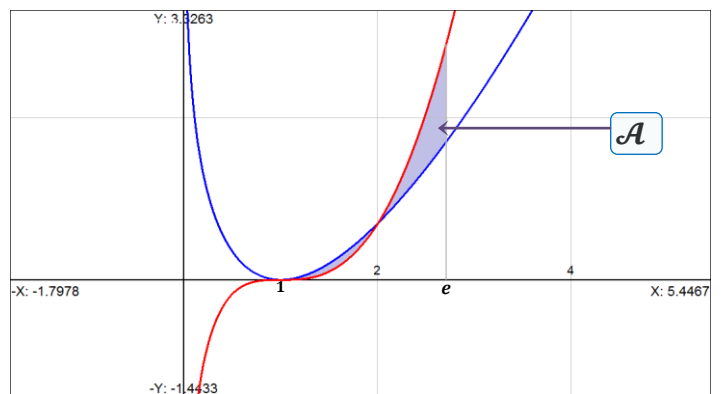
$$= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_2^e - \left[\frac{x^2}{4} - x \right]_2^e$$

$$= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x - \frac{x^2}{4} + x \right]_2^e = \frac{e^2}{4} - 1$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_4$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2 \ln 2}{3} + \frac{5}{18} + \frac{2e^3}{9} - \frac{e^2}{2} - \frac{2 \ln 2}{3} + \frac{8}{9} - \frac{e^2}{4} + 1$$

$$= \frac{2e^3}{9} - \frac{3e^2}{4} - \frac{4 \ln 2}{3} + \frac{29}{12} \approx 0,414$$



$$x \in]0,1[\Rightarrow F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{(t-1)^3} dt$$

$$\Rightarrow F(x) = \int_x^{x^2} \varphi(t) dt ; \varphi(t) = \frac{\ln t}{(t-1)^3}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int_x^a \varphi(t) dt + \int_a^{x^2} \varphi(t) dt ; a \in]0,1[$$

$$\Rightarrow F(x) = \psi_a(x^2) - \psi_a(x)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \psi_a(x) = \int_a^x \varphi(t) dt ; \forall x \in]0,1[\\ \psi'_a(x) = \varphi(x) ; \forall x \in]0,1[\end{cases}$$

φ est continue sur $]0,1[$ comme étant quotient de deux fonctions continues et $(t-1)^3 \neq 0$

$\Rightarrow F$ est dérivable sur $]0,1[$

car :

$$\begin{cases} x \rightarrow x \text{ dérivable sur }]0,1[\\ x \rightarrow x^2 \text{ dérivable sur }]0,1[\\ x \rightarrow \psi_a(x) \text{ dérivable sur }]0,1[\end{cases}$$

$$\Rightarrow F'(x) = (\psi_a(x^2) - \psi_a(x))' ; \forall x \in]0,1[$$

$$= 2x \psi'_a(x^2) - \psi'_a(x) ; \forall x \in]0,1[$$

$$= \frac{2x \cdot \ln(x^2)}{(x^2-1)^3} - \frac{\ln x}{(x-1)^2} ; \forall x \in]0,1[$$

$$\Rightarrow F'(x) < 0 ; \forall x \in]0,1[; \begin{cases} \ln x < 0 \\ x^3 + 3x^2 - x + 1 \geq 0 \\ (x^2-1)^3 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow F$ est décroissante sur $]0,1[$

By analogy and by the same analysis we're gonna get the continuity on $]1, +\infty[$ by choosing this time

$$\psi_a(x) = \int_a^x \varphi(t) dt ; \forall a \in]1, +\infty[$$

$$F'(x) = \frac{-(x^3 + 3x^2 - x + 1) \ln x}{(x^2-1)^3} < 0$$

car : $\forall x \in]0,1[; \begin{cases} \ln x < 0 \\ x^3 + 3x^2 - x + 1 \geq 0 \\ (x^2-1)^3 < 0 \end{cases}$

et : $\forall x \in]1, +\infty[; \begin{cases} \ln x > 0 \\ x^3 + 3x^2 - x + 1 \geq 0 \\ (x^2-1)^3 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow F$ est décroissante sur $]0,1[\cup]1, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$		-	-
F	0	$+\infty$	0

$$\frac{F(x)}{x} \leq \frac{x+2}{2(x^2-1)^2} \cdot \frac{\ln x}{x}$$

$x \rightarrow 0^+ \rightarrow 1$; $x \rightarrow 0^+ \rightarrow -\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{F(x)}{x} \right) = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \right) = -\infty \notin \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow F \text{ n'est pas dérivable à droite en } 0$$

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > x$$

$$\Rightarrow (\exists t \in \mathbb{R}) ; x \leq t \leq x^2$$

$$\Rightarrow \ln x \leq \frac{(t-1) \ln t}{(t-1)} \leq 2 \ln x ; (t-1) \neq 0$$

$$\Rightarrow \ln x \leq \frac{f_1(t)}{(t-1)} \leq 2 \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{\ln x}{(t-1)^3} \leq \frac{f_1(t)}{(t-1)^4} \leq \frac{2 \ln x}{(t-1)^3} ; \frac{1}{(t-1)^2} > 0$$

$$\Rightarrow \int_x^{x^2} \frac{\ln x}{(t-1)^3} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{f_1(t)}{(t-1)^4} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{2 \ln x}{(t-1)^3} dt$$

car ces fonctions sont continue et $x < x^2$

$$\Rightarrow \ln x \int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)^3} \leq F(x) \leq 2 \ln x \int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2+2x) \ln x}{2(x^2-1)^2} \leq F(x) \leq \frac{(x^2+2x) 2 \ln x}{2(x^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2+2x) \ln x}{2(x^2-1)^2} \leq F(x) \leq \frac{(x^2+2x) \ln x}{(x^2-1)^2}$$

$$x > 1 \Rightarrow \frac{(x^2+2x) \ln x}{2(x^2-1)^2} \leq F(x)$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2+2x)}{2(x+1)^2} \left(\frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \right) \left(\frac{1}{x-1} \right) \leq F(x)$$

$x \rightarrow 1^+ \rightarrow \frac{3}{8}$; $x \rightarrow 1^+ \rightarrow 1$; $x \rightarrow 1^+ \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = +\infty$$

$$x > 1 \Rightarrow \frac{(x^2+2x) \ln x}{2(x^2-1)^2} \leq F(x) \leq \frac{(x^2+2x) \ln x}{(x^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(x^3+2x^2)}{2x^4-4x^2+2} \left(\frac{\ln x}{x} \right) \leq F(x) \leq \frac{(x^3+2x^2)}{2x^4-4x^2+2} \left(\frac{\ln x}{x} \right)$$

$x \rightarrow +\infty \rightarrow 0$; $x \rightarrow +\infty \rightarrow 0$; $x \rightarrow +\infty \rightarrow 0$; $x \rightarrow +\infty \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

رسالة الله في العلم والعبادة والتوفيق

والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته

الأستاذ بدر الدين القاسمي

نوفمبر 2014