Chapitre 10 : Espaces vectoriels de type fini

E désigne ici un $\mathbb{K}$-ev (où $\mathbb{K}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$)

I Les théorèmes fondamentaux

A) Existence de base

Théorème :

On suppose que E admet une famille génératrice finie g. Alors, de g, on peut extraire une base de E.

Démonstration :

Montrons par récurrence que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, « si E admet une famille génératrice g de cardinal m, alors, de g, on peut extraire une base de E » (P(m))

- P(0) : Si E admet une famille de cardinal 0, c'est que $E = \{0_E\}$ et la famille vide est une base de E.
- P(1) : Si E admet une famille génératrice de cardinal 1, disons $g = (u_1)$:
  - Si $u_1 = 0_E$, alors $E = \{0_E\}$, et $\varnothing$ est alors une base de E, extraite de g.
  - Si $u_1 \neq 0_E$, (u_1) est une famille libre et génératrice de E, extraite de g (car égale à g).
- P(2) : Si E admet une famille libre et génératrice de cardinal 2, disons $g = (u_1, u_2)$:
  - Si (u_1, u_2) est libre, alors c'est une base de E, extraite de g.
  - Si elle ne l'est pas, alors l'un des u_i, disons u_2, est combinaison linéaire des « autres » (c'est-à-dire u_1). Alors (u_1) est génératrice de E. D'après P(1), on peut donc en extraire une base de E.
- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons P(m). Montrons $\mathrm{P}(m+1)$. Si E admet une famille génératrice de cardinal $m+1$, disons $g = (u_1, u_2, \ldots u_{m+1})$:
  - Si $(u_1, u_2, \ldots u_{m+1})$ est libre, alors elle est une base de E, extraite de g.
  - Si elle ne l'est pas, alors l'un des u_i, disons u_{m+1} est combinaison linéaire des autres. Alors $(u_1, u_2, \ldots u_m)$ est génératrice de E. D'après P(m), on peut donc en extraire une base de E, ce qui achève la récurrence.

Conséquence :

(1) Tout $\mathbb{K}$-ev de type fini admet une base (finie)

(2) « théorème d'extraction de base » : de toute famille génératrice finie d'un $\mathbb{K}$-ev, on peut extraire une base (finie) de ce $\mathbb{K}$-ev.

B) Dimension

Théorème et définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de type fini. Alors toutes les bases de E ont le même cardinal, il est appelé la dimension de E, noté $\dim(E)$.

Démonstration :

Lemme :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ vecteurs qui sont combinaisons linéaires de n vecteurs de E forment toujours une famille liée.

En effet, montrons ce lemme par récurrence sur n :

- Pour $n=0$: « 1 vecteur combinaison linéaire de 0 vecteur est lié ». C'est vrai car une combinaison linéaire de 0 vecteurs, c'est 0_E
- Pour $n=1$: « 2 vecteurs combinaison linéaire de 1 vecteur forment une famille liée ». Si $v_0 = \lambda_0 u_1$ et $v_1 = \lambda_1 u_1$, alors (v_0, v_1) est liée :

Si $\lambda_0 \neq 0$, alors $v_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_0} v_0$. Sinon $v_0 = 0_E$. Donc v_0 et v_1 sont colinéaires.

- Soit $n \geq 2$, supposons le résultat vrai pour $n-1$.

Considérons $n+1$ vecteurs $v_1, v_2, ... v_n$, combinaisons linéaires de n vecteurs $u_1, u_2, ... u_n$. On a donc des scalaires $\alpha_{i,j}$ avec $0 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ tels que :

$$\begin{cases} v_0 = \alpha_{0,1}u_1 + \alpha_{0,2}u_2 + ... + \alpha_{0,n}u_n & (L_0) \\ v_1 = \alpha_{1,1}u_1 + \alpha_{1,2}u_2 + ... + \alpha_{1,n}u_n & (L_1) \\ \qquad \vdots & \vdots \\ v_n = \alpha_{n,1}u_1 + \alpha_{n,2}u_2 + ... + \alpha_{n,n}u_n & (L_n) \end{cases}$$

- Si $\forall i \in [\![0,n]\!], \alpha_{i,n} = 0$, alors $v_1, v_2, ... v_n$ sont combinaisons linéaires des $n-1$ vecteurs $u_1, u_2, ... u_{n-1}$. Par hypothèse de récurrence, $(v_1, v_2, ... v_{n-1})$ est liée. Donc $(v_1, v_2, ... v_n)$ l'est aussi.
- Si l'un des $\alpha_{i,n}$, pour $i \in [\![0,n]\!]$ n'est pas nul, disons $\alpha_{n,n}$ (sinon on échange les lignes), alors les transformations $L_i \leftarrow L_i - \underbrace{\dfrac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{n,n}}}_{\lambda_n} L_n$ pour $i \in [\![0,n-1]\!]$ donnent :

$$\begin{cases} v_0 - \lambda_0 v_n = \text{Combinaison linéaire de } u_1, u_2, ... u_n \\ v_1 - \lambda_1 v_n = ... \\ \qquad \vdots \\ v_n - \lambda_n v_n = ... \end{cases}$$

Les vecteurs $v_i - \lambda_i v_n, i \in [\![0,n-1]\!]$ forment donc une famille liée puisque ce sont n vecteurs combinaisons linéaires de $n-1$ (hypothèse de récurrence). Il existe donc des scalaires $\beta_1, \beta_2, ... \beta_{n-1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i (v_i - \lambda_i v_n) = 0$. Donc $\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i v_i + \gamma . v_n = 0$ avec $\gamma = -\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \lambda_i$, ce qui prouve que $(v_1, v_2, ... v_n)$ est liée car au moins l'un des β_i est non nul, ce qui achève la récurrence.

Maintenant :

Soient $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ deux bases (finie) de E, notons m, n leur cardinal.

- $\mathfrak{B}$ est génératrice de E. donc chacun des m vecteurs de $\mathfrak{B}'$ est combinaison linéaire des n vecteurs de $\mathfrak{B}$. donc $m \leq n$ (sinon, selon le lemme, $\mathfrak{B}'$ serait liée)
- De même, $n \leq m$. Donc $n = m$

Exemple important : $\mathbb{K}^n$ est de dimension n : on en connaît une base de cardinal n (la base canonique)

Remarque :

- Si E est de dimension 0, alors $E = \{0_E\}$
- Si E est de dimension 1, alors E est une droite vectorielle.

Vocabulaire : "E de type fini" = "E de dimension finie".

Théorème « de la base incomplète » :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Alors toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Démonstration :

Soit L une famille libre de E.

- Si L est vide, il suffit de la compléter avec une base de E.
- Sinon, $L = (u_1, u_2, \dots u_p)$, où $p \in \mathbb{N}^*$

Soit $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de E.

- Si L est génératrice de E, alors L est une base de E.
- Sinon, l'un au moins des $e_i, i \in [\![1, n]\!]$ n'est pas combinaison linéaire de $u_1, u_2, \dots u_p$ (car sinon L serait génératrice). Soit alors $i_1 \in [\![1, n]\!]$ tel que $e_{i_1} \notin \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots u_p)$. Alors la famille $L' = (u_1, u_2, \dots u_p, e_{i_1})$ est libre. Si elle est génératrice, c'est une base de E. Sinon, on recommence. Au bout d'un moment, on obtient une famille libre et génératrice (puisque, au pire, $(u_1, u_2, \dots u_p, e_1, e_2, \dots e_n)$ est génératrice).

Conséquence du théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Alors :

(1) Les familles libres de E ont au plus n vecteurs.

(2) Si une famille libre de E est de cardinal n, alors c'est une base de E.

Remarque : la démonstration du théorème montre que, pour compléter une famille libre en une base de E, on peut imposer de piocher les éléments qui complètent dans une base, fixée d'avance, de E.

Conséquence du théorème « d'extraction de base » :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Alors :

(1) Les familles génératrices de E sont de cardinal $\geq n$.

(2) Si une famille génératrice de E est de cardinal n, alors c'est une base de E.

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Alors :

E est de dimension finie $\Leftrightarrow$ il admet une famille génératrice finie

$\Leftrightarrow$ il admet une base finie

$\Leftrightarrow$ le cardinal des familles libres de E est majoré

Démonstration : (les deux premières équivalences sont des rappels)

$\Rightarrow$: Evident, l'ensemble est majoré par $\dim(E)$

$\Leftarrow$: Supposons que le cardinal des familles libres de E est majoré. L'ensemble des cardinaux des familles libres est donc une partie non vide (contient 0) et majorée de $\mathbb{N}$. On note n le maximum de cette partie.

Soit alors une famille L de cardinal n.

- Si $n=0$, alors $E=\{0_E\}$ car $\varnothing$ est la seule famille de cardinal 0.
- Sinon, $L=(u_1,u_2,...u_n)$. Alors cette famille est génératrice, car sinon on pourrait trouver $v\in E$ qui n'est pas combinaison linéaire des u_i, et ainsi la famille $(u_1,u_2,...u_n,v)$ serait libre de cardinal $n+1$, ce qui contredit la définition de n.

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Alors F a une dimension finie et $\leq n$, et si elle vaut n, alors $F=E$

Démonstration :

- Les familles libres d'éléments de F sont des familles libres d'éléments de E. Donc leur cardinal est majoré par n. Donc F est de dimension finie $p\leq n$ (puisque si $(u_1,u_2,...u_p)$ est une base de F, alors c'est aussi une famille libre de E, donc $p\leq n$)
- Si $p=n$, alors soit $(u_1,u_2,...u_p)$ une base de F. C'est donc une famille libre de E de cardinal $p=n$. C'est donc une base de E. Donc $F=E$.

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Alors tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E (mais pas un seul en général).

Démonstration :

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

- Si $F=E$, $\{0_E\}$ est supplémentaire de F. (et vice-versa)
- Sinon, F est de dimension finie p avec $1\leq p<n$. Soit $(u_1,u_2,...u_p)$ une base de F. C'est aussi une famille libre de E. on peut donc la compléter en une base $(u_1,u_2,...u_p,u_{p+1},...u_n)$ de E. On pose alors $G=\mathrm{Vect}(u_{p+1},...u_n)$. Alors G est un supplémentaire de F dans E. En effet :

- Soit $v\in E$. Donc $v=\underbrace{x_1u_1+...+x_pu_p}_{\in F}+\underbrace{x_{p+1}u_{p+1}+...+x_nu_n}_{\in G}$. (car $(u_1,u_2,...u_n)$ est génératrice de E) C'est vrai pour tout $v\in E$. Donc $E=F+G$.
- Montrons maintenant que la somme est directe, soit que $F\cap G=\{0_E\}$:

Soit $v\in F\cap G$, alors $v=x_1u_1+...+x_pu_p$ et $v=y_1u_{p+1}+...+y_{n-p}u_n$. Donc $x_1u_1+...+x_pu_p-y_1u_{p+1}-...-y_{n-p}u_n=0$. Comme la famille $(u_1,u_2,...u_n)$ est libre, $x_1=x_2=...=x_p=y_1=y_2=...=y_{n-p}=0$. Donc $v=0$.

Donc $F\cap G\subset\{0_E\}$. Donc $F\cap G=\{0_E\}$.

Donc $E=F\oplus G$

II Rang d'une famille de vecteurs

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-ev.

Définition :
Soit $\mathfrak{F}$ une famille de vecteurs de E. Le rang de $\mathfrak{F}$ est : $\operatorname{rg}(\mathfrak{F}) \underset{\text{déf}}{=} \dim(\operatorname{Vect}(\mathfrak{F}))$.

Exemples :

- Si $E = \mathbb{R}^3$.

$\mathfrak{F} = [\underbrace{(1,2,3)}_{u_1}, \underbrace{(4,5,6)}_{u_2}, \underbrace{(7,8,9)}_{u_3}]$. Alors $\operatorname{rg}(\mathfrak{F}) = 2$ (car $u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_3)$)

- Si $E = \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$f_1 : x \mapsto 1 \quad f_2 : x \mapsto e^x \quad f_3 : x \mapsto |x|$

Alors $\operatorname{rg}(f_1, f_2, f_3) = 3$ ((f_1, f_2, f_3) est libre, donc une base de $\operatorname{Vect}(f_1, f_2, f_3)$)

Démonstration :

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, supposons que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0$. D'où, en prenant trois valeurs pour x, par exemple -1, 0, 1, on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Propriétés :
Soit E de dimension finie n.
Soit $\mathfrak{F}$ une famille d'éléments de E de cardinal p, disons $\mathfrak{F} = (u_1, u_2, \dots u_p)$
Notons $F = \operatorname{Vect}(\mathfrak{F})$. Soit $r = \operatorname{rg}(\mathfrak{F})$ (ainsi, $r = \dim F$)
Alors :
* $r \leq p$: $(u_1, u_2, \dots u_p)$ est génératrice de F donc $p \geq r$
* $r \leq n$: F est un sous-espace vectoriel de E donc $\dim F \leq \dim E$
* $r = p \Leftrightarrow \mathfrak{F}$ est libre : $r = p \Leftrightarrow \dim F = p \Leftrightarrow (u_1, u_2, \dots u_p)$ est une base de F.
* $r = n \Leftrightarrow \mathfrak{F}$ est génératrice de E : $r = p \Leftrightarrow \dim F = n \Leftrightarrow F = E \Leftrightarrow \mathfrak{F}$ engendre E.
* $r = n = p \Leftrightarrow \mathfrak{F}$ est une base de E (résulte des deux derniers points)

Exemple : famille de 5 vecteurs de rang 3 dans un espace vectoriel de dimension 4 :
$[(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (7,5,2,0), (49,2,-3,0)]$

III Somme de sous-espaces vectoriels et dimension

Ici, E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.

Théorème :
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe.
Si $(u_1, u_2, \dots u_p)$ est une base de F.
Et si $(v_1, v_2, \dots v_q)$ est une base de G.
Alors $(u_1, u_2, \dots u_p, v_1, v_2, \dots v_q)$ est une base de $F \oplus G$.

En effet :

* $(u_1, u_2, \dots u_p, v_1, v_2, \dots v_q)$ est génératrice de $F \oplus G$: évident.

* Cette famille est libre : si $\underbrace{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p}_{=u \in F} + \underbrace{\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_q v_q}_{=v \in G} = 0_E$, alors $v = u = 0_E$ car F et G sont en somme directe.

Or, si $u = 0_E$, alors $\forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i = 0$ car $(u_1, u_2, \dots u_p)$ est libre.

Et si $v = 0_E$, alors $\forall i \in [\![1, q]\!], \mu_i = 0$ car $(v_1, v_2, \dots v_q)$ est libre.

Donc $(u_1, u_2, \dots u_p, v_1, v_2, \dots v_q)$ est libre. C'est donc une base de $F \oplus G$.

Conséquence : si F et G sont en somme directe, alors $\boxed{\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)}$

Théorème :
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

Démonstration :
Posons $H = F \cap G$. Alors H est un sous-espace vectoriel de E, F et G.
H est un sous-espace vectoriel de G, il a donc un supplémentaire dans G, disons G_1.
Donc $G = H \oplus G_1$.
Alors $F + G = F + G_1$, et F et G_1 sont en somme directe :

(1) La somme est directe : si $u \in F \cap G_1$, alors $u \in F \cap G = H$, et $u \in G_1$. Donc $u \in \underbrace{H \cap G_1}_{=\{0_E\}}$. Donc $u = 0_E$

(2) $F + G = F + G_1$: Déjà, $F + G \subset F + G_1$ (si $u = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w_1}_{\in G_1 \subset G}$, alors $u \in F + G$)

Soit $u \in F + G$. Alors $u = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in G}$. Or, $w \in G$. Donc $w = \underbrace{h}_{\in H} + \underbrace{w_1}_{\in G_1}$.

Donc $u = \underbrace{v + h}_{\substack{\in F \\ \text{car } h \in H \subset F}} + \underbrace{w_1}_{\in G_1}$

Donc $F + G = F \oplus G_1$
Ainsi, $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G_1)$
Or, $\dim(G) = \dim(G_1) + \dim(H)$ (car $G = H \oplus G_1$)
Donc $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(H)$

Conséquence :
Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \Leftrightarrow \begin{cases} F + G = E & (1) \\ F \cap G = \{0_E\} & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dim F + \dim G = n & (3) \\ F \cap G = \{0_E\} & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dim F + \dim G = n & (3) \\ F + G = E & (1) \end{cases}$$

En effet :

- (1) et (2) $\Rightarrow$ (3) : évident selon la formule
- (2) et (3) $\Rightarrow$ (1) : $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)=\dim(F)+\dim(G)$

  Ainsi, $\dim(F+G)=n$ donc $F+G=E$
- (3) et (1) $\Rightarrow$ (2) : $\dim(F+G)=\dim(E)=n$ et $\dim F+\dim G=n$

  Donc $\dim(F\cap G)=0$ donc $F\cap G=\{0_E\}$

IV Applications linéaires en dimension finie

Dans ce paragraphe :
E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $p\geq 1$.
F est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n\geq 1$.

A) Détermination d'une application linéaire par la donnée des images des vecteurs d'une base

Théorème :
Soit $\mathfrak{B}_E=(e_1,e_2,\dots e_p)$ une base de E.
Soit $(v_1,v_2,\dots v_p)$ un p-uplet de vecteurs quelconques de F.
Alors il existe une unique application linéaire φ de E dans F telle que $\forall i\in[\![1,p]\!],\ \varphi(e_i)=v_i$

Démonstration :

- Unicité : si φ convient, alors, étant donné $u\in E$, $u=\sum_{j=1}^{p}x_je_j$. Donc $\varphi(u)=\sum_{j=1}^{p}x_j\varphi(e_j)=\sum_{j=1}^{p}x_jv_j$.
- Existence : Soit φ l'application de E dans F définie par :

$$\varphi:\quad \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \underset{(x_1,\dots x_p)\text{ dans }\mathfrak{B}_E}{u\text{ de composantes}} & \mapsto & \sum_{j=1}^{p}x_ju_j \end{array}$$

(La définition a un sens car la décomposition dans une base est unique)
Alors φ est linéaire :
Soient $u,u'\in E$, de composantes $(x_1,x_2,\dots x_p)$, $(x'_1,x'_2,\dots x'_p)$ dans $\mathfrak{B}_E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.
Alors $u+\lambda u'$ a pour composantes $(x_1+\lambda x'_1,x_2+\lambda x'_2,\dots x_p+\lambda x'_p)$ dans $\mathfrak{B}_E$.

Donc $\varphi(u+\lambda u')=\sum_{j=1}^{p}(x_j+\lambda x'_j)v_j=\sum_{j=1}^{p}x_jv_j+\lambda\sum_{j=1}^{p}x'_jv_j=\varphi(u)+\lambda\varphi(u')$

Enfin, on a bien $\forall i\in[\![1,p]\!],\ \varphi(e_i)=v_i$:
Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, e_i a pour composantes $(0,\dots,\underset{i}{1},\dots 0)$ dans $\mathfrak{B}_E$, donc $\varphi(e_i)=x_iv_i=v_i$

Conséquence :

Si $\mathfrak{B}_E=(e_1,e_2,...e_p)$ est une base de E, et $\mathfrak{B}_F=(f_1,f_2,...f_n)$ est une base de F.

Alors la donnée d'une application linéaire de E dans F revient à la donnée de $n\times p$ scalaires, à savoir les $a_{i,j}$, pour $i\in[\![1,n]\!]$, $j\in[\![1,p]\!]$ tels que :

$\forall j\in[\![1,p]\!], \varphi(e_j)=(\text{vecteur de composantes les } a_{i,j} \text{ dans } \mathfrak{B}_F)$

$\forall j\in[\![1,p]\!], \varphi(e_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}f_i \ \ (=v_j)$

On range ces scalaires dans un tableau à n lignes, p colonnes, de sorte que, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $a_{i,j}$ est placé sur la i-ème ligne de la j-ème colonne :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Ce tableau s'appelle la matrice de φ dans les bases $\mathfrak{B}_E$ et $\mathfrak{B}_F$ (attention : le « et » n'est pas commutatif)

La j-ème colonne de cette matrice est la colonne des composantes de $\varphi(e_j)$ dans la base $\mathfrak{B}_F$.

B) Applications linéaires et images des vecteurs d'une base

Proposition :

Soit $\varphi\in L(E,F)$, $\mathfrak{B}_E=(e_1,e_2,...e_p)$ une base de E. Alors :

(1) $\mathrm{Vect}(\varphi(e_1),\varphi(e_2),...\varphi(e_p))=\mathrm{Im}\,\varphi$

(2) φ est surjective si et seulement si $(\varphi(e_1),\varphi(e_2),...\varphi(e_p))$ est génératrice de F.

(3) φ est injective si et seulement si $(\varphi(e_1),\varphi(e_2),...\varphi(e_p))$ est libre.

(4) φ est bijective si et seulement si $(\varphi(e_1),\varphi(e_2),...\varphi(e_p))$ est une base de F.

Démonstration :

(1) * Si $v\in\mathrm{Vect}(\varphi(e_1),\varphi(e_2),...\varphi(e_p))$, alors $v=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\varphi(e_j)=\varphi\left(\sum_{j=1}^{p}\lambda_je_j\right)\in\mathrm{Im}\,\varphi$.

* Si $v\in\mathrm{Im}\,\varphi$, alors $v=\varphi(u)$, où $u\in E$. Or, $u=\sum_{j=1}^{p}x_je_j$ (décomposition de u dans $\mathfrak{B}_E$). Donc $v=\varphi\left(\sum_{j=1}^{p}\lambda_je_j\right)=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\varphi(e_j)\in\mathrm{Vect}(\varphi(e_1),\varphi(e_2),...\varphi(e_p))$

(2) Conséquence évidente de (1)

(3) * Si $(\varphi(e_1),\varphi(e_2),...\varphi(e_p))$ est libre : soit $u\in\ker\varphi$, $u=\sum_{j=1}^{p}x_je_j$. Alors $0=\varphi(u)=\sum_{j=1}^{p}x_j\varphi(e_j)$. $(\varphi(e_1),\varphi(e_2),...\varphi(e_p))$ est libre, donc $\forall j\in[\![1,p]\!]$, $x_j=0$. Donc $\ker\varphi=\{0_E\}$. Donc φ est injective.

* Si φ est injective : soient $x_1, x_2, \dots x_p \in \mathbb{K}$. Supposons que $\sum_{j=1}^{p} x_j \varphi(e_j) = 0_F$.

Alors $\varphi\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = 0_F$. Donc $\sum_{j=1}^{p} x_j e_j = 0_E$ (car $\ker\varphi = \{0_E\}$). Donc $\forall j \in [\![1, p]\!], x_j = 0$ (car $(e_1, e_2, \dots e_p)$ est libre). Donc $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_p))$ est libre.

(4) Conséquence directe de (2) et (3)

Conséquence :
Si $\dim E = p$, $\dim F = n$, alors :
φ surjective $\Rightarrow n \leq p$
φ injective $\Rightarrow p \leq n$

C) Isomorphismes

Proposition :
Soit E de dimension p, F de dimension n.
Alors E et F sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

Démonstration :

- Si E et F sont isomorphes, alors il existe $\varphi \in L(E,F)$ bijective. On a alors $\dim E = \dim F$ (car alors $\dim E \leq \dim F$ et $\dim F \leq \dim E$)
- Si $\dim E = \dim F = p$. Soient alors $\mathfrak{B}_E = (e_1, e_2, \dots e_p)$ une base de E et $\mathfrak{B}_F = (f_1, f_2, \dots f_p)$ une base de F. Il existe alors une application linéaire $\varphi \in L(E,F)$ telle que $\forall i \in [\![1, p]\!], \varphi(e_i) = f_i$. Cette application est donc un isomorphisme (car la famille $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_p))$ est libre et génératrice)

Proposition :
Soient E et F de même dimension finie.
Alors, pour tout $\varphi \in L(E,F)$, on la les équivalences :
φ est bijective $\Leftrightarrow$ φ est injective
$\Leftrightarrow$ φ est surjective

Démonstration :
Supposons que $\dim E = \dim F = n$. Soit alors $\mathfrak{B}_E = (e_1, e_2, \dots e_p)$ une base de E.
Alors :
φ est injective $\Leftrightarrow (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_n))$ est libre
$\Leftrightarrow (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_n))$ est une base de F (car $\dim F = n$)
$\Leftrightarrow$ φ est bijective
On fait la même chose pour l'autre équivalence.

Proposition :
Les isomorphismes conservent le rang, c'est-à-dire que si φ est un isomorphisme de E dans E', alors, pour toute famille $(u_1, u_2, \dots u_q)$ de vecteurs de E, $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \dots u_q) = \mathrm{rg}(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots \varphi(u_q))$.

En effet :

Si on note $F=\text{Vect}(u_1,u_2,...u_q)$, alors $\varphi(F)=\text{Vect}(\varphi(u_1),\varphi(u_2),...\varphi(u_q))$, et φ réalise alors un isomorphisme de F dans $\varphi(F)$. Donc $\dim F=\dim\varphi(F)$.

Exemple :

Soit E de dimension n, $\mathfrak{B}_E=(e_1,e_2,...e_n)$ une base de E.

Alors $\varphi:\begin{array}{l}\mathbb{K}^n\to E\\ (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\mapsto\sum_{i=1}^n x_ie_i\end{array}$ est un isomorphisme.

D) Le théorème « noyau - image »

Théorème :

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev, où E est de dimension finie.

Soit $\varphi\in L(E,F)$.

Alors $\text{Im}\,\varphi$ est de dimension finie, et $\dim E=\dim(\ker\varphi)+\dim(\text{Im}\,\varphi)$.

Démonstration :

On peut introduire un supplémentaire G de $\ker\varphi$ dans E. Ainsi, $E=\ker\varphi\oplus G$.

On définit alors $\hat{\varphi}:\begin{array}{l}G\to\text{Im}\,\varphi\\ u\mapsto\varphi(u)\end{array}$. Alors $\hat{\varphi}$ est linéaire (C'est en quelque sorte "$\varphi_{/G}$")

Alors :

- $\hat{\varphi}$ est injective : $\ker\hat{\varphi}=\{u\in G,\hat{\varphi}(u)=0\}=\{u\in G,\varphi(u)=0\}=G\cap\ker\varphi=\{0_E\}$
- $\hat{\varphi}$ est surjective : Soit $v\in\text{Im}\,\varphi$. v s'écrit $\varphi(u)$, où $u\in E$. Alors $u=\underbrace{w'}_{\in\ker\varphi}+\underbrace{w}_{\in G}$.

Donc $\varphi(u)=\varphi(w')+\varphi(w)=\varphi(w)=v$.

Donc $\hat{\varphi}$ est un isomorphisme. Donc $\dim(\text{Im}\,\varphi)=\dim G$.

Or, $\dim G=\dim E-\dim(\ker\varphi)$. Donc $\dim E=\dim(\ker\varphi)+\dim(\text{Im}\,\varphi)$.

Conséquence :

On retrouve le fait que :

- $\dim(\text{Im}\,\varphi)\leq\dim E$
- φ injective $\Rightarrow\dim E\leq\dim F$
- φ surjective $\Rightarrow\dim E\geq\dim F$
- Si $\dim E=\dim F$, φ bijective $\Leftrightarrow\varphi$ surjective $\Leftrightarrow\varphi$ injective

E) Rang d'une application linéaire

Soit $\varphi\in L(E,F)$, où E est de dimension finie.

Alors $\text{rg}\,\varphi\underset{\text{déf}}{=}\dim(\text{Im}\,\varphi)$

Propositions :

- Si $(e_1,e_2,...e_p)$ est une base de E, alors :

$$\begin{aligned}\text{rg}\,\varphi=\dim(\text{Im}\,\varphi)&=\dim(\text{Vect}(\varphi(e_1),\varphi(e_2),...\varphi(e_p)))\\&=\text{rg}(\varphi(e_1),\varphi(e_2),...\varphi(e_p))\end{aligned}$$

- Si on note $\dim E = p$, $\dim F = n$, $\mathrm{rg}(\varphi) = r$, alors :
$r \leq n \quad ; r \leq p$
$r = p \Leftrightarrow \varphi$ injective $\quad ; r = n \Leftrightarrow \varphi$ surjective $\quad ; r = n = p \Leftrightarrow \varphi$ bijective
(découle directement du théorème noyau – image)

V Formes linéaires et hyperplan

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 2$.

A) Formes linéaires de E.

Rappel : une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des formes linéaires de E est $L(E,\mathbb{K})$, noté aussi E^* (dual de E).
(E^* est un $\mathbb{K}$-ev).

Proposition :
Soit $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de E.
Les formes linéaires de E sont exactement les applications du type :
$\begin{array}{c} E \to \mathbb{K} \\ \underset{(x_1,x_2,\dots x_n) \text{ dans } \mathfrak{B}}{u \text{ de composantes}} \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \end{array}$, où $(a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n$.

En effet :
L'application : $\begin{array}{c} E \to \mathbb{K} \\ u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \end{array}$ est l'unique application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!], \varphi(e_i) = a_i$. La matrice de cette application linéaire φ dans les bases $\mathfrak{B}$ et (1) est la matrice ligne $(a_1, a_2, \dots a_n)$ (1 ligne, n colonnes)

Cas particulier :
Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note p_i la forme linéaire : $p_i \begin{array}{c} E \to \mathbb{K} \\ \underset{(x_1,x_2,\dots x_n) \text{ dans } \mathfrak{B}}{u \text{ de composantes}} \mapsto x_i \end{array}$
(matrice $(0, \dots \underset{i}{1}, \dots 0)$) ; on les appelle les projections relatives à $\mathfrak{B}$.

La famille des p_i est évidemment génératrice de E^* (lire « E dual »), et elle est libre : $\sum_{i=1}^{n} a_i p_i = 0_{E^*} \Rightarrow \forall j \in [\![1,n]\!], \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i p_i\right)(e_j)}_{=a_j} = 0_E$.

Donc $(p_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de E^*. Donc E^* est de même dimension que E. La base $(p_1, p_2, \dots p_n)$ est appelée la base duale de $(e_1, e_2, \dots e_n)$.

B) Hyperplan

Définition :
Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Exemple :
En dimension 2, les hyperplans sont des droites.
En dimension 3, les hyperplans sont des plans.

Théorème :
Les hyperplans sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles de E.
Plus précisément :
(1) Si $\varphi \in L(E,\mathbb{K}) \setminus \{0_{L(E,\mathbb{K})}\}$, alors $\ker\varphi$ est un hyperplan de E.
(2) Si H est un hyperplan de E, alors il existe $\varphi \in L(E,\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $H = \ker\varphi$.
(3) Si $\varphi_1, \varphi_2 \in L(E,\mathbb{K})$ tels que $\ker\varphi_1 = \ker\varphi_2$, alors φ_1 et φ_2 sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $\varphi_2 = \lambda\varphi_1$.

Démonstration :
(1) Si $\varphi \in L(E,\mathbb{K}) \setminus \{0_{L(E,\mathbb{K})}\}$, alors $\operatorname{Im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$, qui est de dimension 1. Donc $\operatorname{Im}\varphi$ est de dimension 0 ou 1. Si $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 0$, alors $\operatorname{Im}\varphi = \{0\}$ et $\varphi = 0_{L(E,\mathbb{K})}$. Donc $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 1$ (et $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{K}$).
Donc $\dim(\ker\varphi) = \dim E - \dim(\operatorname{Im}\varphi) = n-1$
(2) Soit H un hyperplan de E. Soit $(u_1, u_2, \dots u_{n-1})$ une base de H.
On la complète en une base de E : $(u_1, u_2, \dots u_n)$.
Soit φ la forme linéaire qui envoie les $u_i, i \in [\![1, n-1]\!]$ sur 0 et u_n sur 1.
Alors $\ker\varphi = H$ (car pour $v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \varphi(v) = 0 \Leftrightarrow x_n = 0 \Leftrightarrow v \in H$)
(3) Si $\varphi_1 = 0$, $\ker\varphi_1 = E$; donc $\ker\varphi_2 = E$, donc $\varphi_2 = 0 = 1.\varphi_1$.
Si $\varphi_1 \neq 0$, le noyau de φ_1 est un hyperplan H de base $(u_1, u_2, \dots u_{n-1})$, que l'on complète en une base $(u_1, u_2, \dots u_n)$ de E.
Alors :
$$\begin{cases} \varphi_1(u_1) = \varphi_2(u_1) = 0 \\ \quad\vdots \\ \varphi_1(u_{n-1}) = \varphi_2(u_{n-1}) = 0 \\ \varphi_1(u_n) = a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \quad ; \varphi_2(u_n) = b \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \end{cases}$$
Donc $\varphi_2 = \frac{b}{a}\varphi_1$ (puisque $\forall j \in [\![1, n]\!], \varphi_2(u_j) = \frac{b}{a}\varphi_1(u_j)$ et la donnée des images des vecteurs d'une base détermine l'application linéaire)

Conséquence :
Soit $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de E. Alors les hyperplans de E sont exactement les parties de E qui admettent dans la base $\mathfrak{B}$, <u>une</u> équation du type $a_1x_1 + a_2x_2 \dots a_nx_n = 0$ ou les a_i sont des scalaires non tous nuls. De plus, si un hyperplan admet deux équations, alors elles sont proportionnelles.

Rappel : Etant donnée $F \in F(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$, la partie E d'équation $F(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$ dans la base $\mathfrak{B}$ est, par définition, l'ensemble des composantes $(x_1, x_2, \dots x_n)$ dans $\mathfrak{B}$ vérifiant $F(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$.

On verra que si F est un sev de E de dimension p, alors F est l'intersection d'hyperplans (et peut donc être défini par un système d'équations), le nombre minimum d'équations nécessaires étant $n-p$.